KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zasada zachowania energii

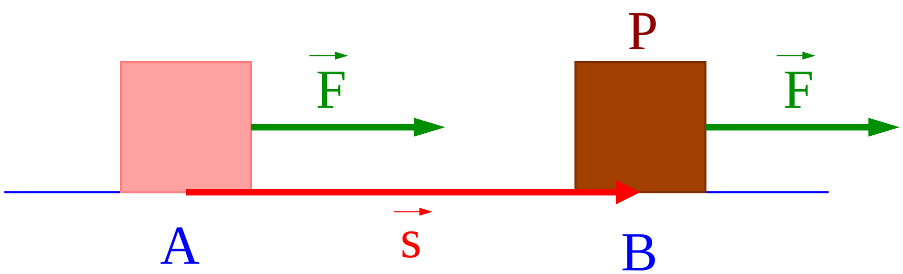
Fizyka I (Mechanika)

Wykład VII:

- Praca, siły zachowawcze i energia potencjalna
- Energia kinetyczna i zasada zachowania energii
- Zderzenia elastyczne
- Układ środka masy

Praca i energia

Praca

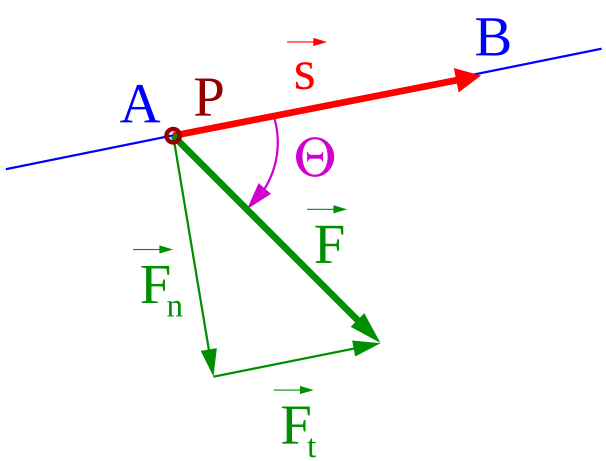


Najprostszy przypadek:

Stała siła $\vec{F}$ działa na ciało P powodując jego przesunięcie wzdłuż kierunku działania siły o $\vec{s}$.

Praca jaką wykona przy tym siła $\vec{F}$

$$W_{AB} = F \cdot s$$



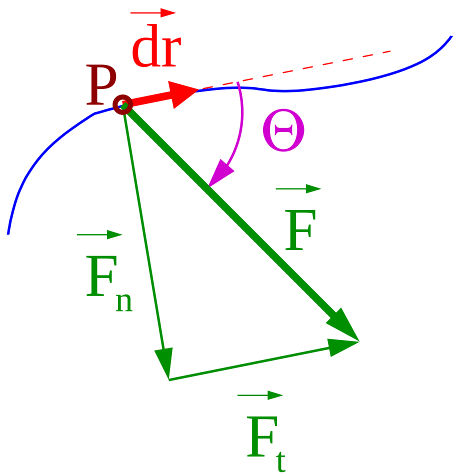
W przypadku siły działającej pod kątem w stosunku do przesunięcia praca jaką wykonuje

$$W_{AB} = F \cdot s \cdot \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Składowa prostopadła nie wykonują pracy!

Liczy się tylko równoległa składowa siły...

Praca i energia



Praca

Dowolna siła $\vec{F}$ działa na punkt materialny P

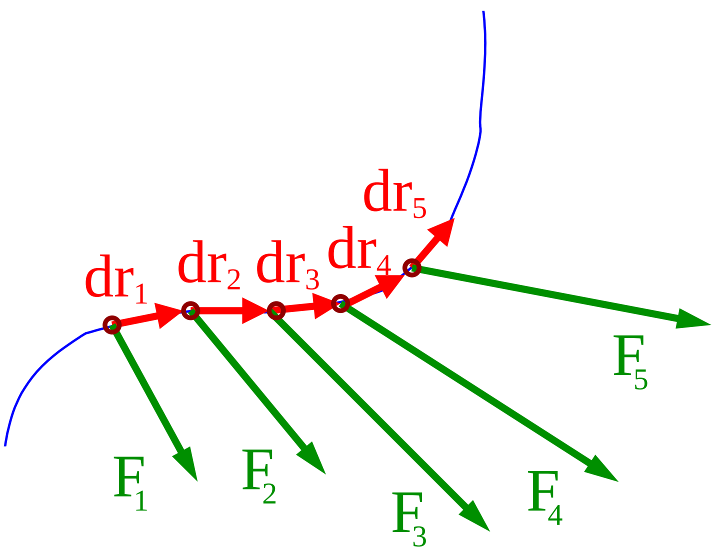
Praca jaką wykonuje siła przy przesunięciu o $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos\theta ds = F_t \, ds$$

Aby policzyć pracę siły $\vec{F}$ dla dowolnej drogi, musimy posumować wkłady od kolejnych małych przesunięć $\Rightarrow$ całkowanie.

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

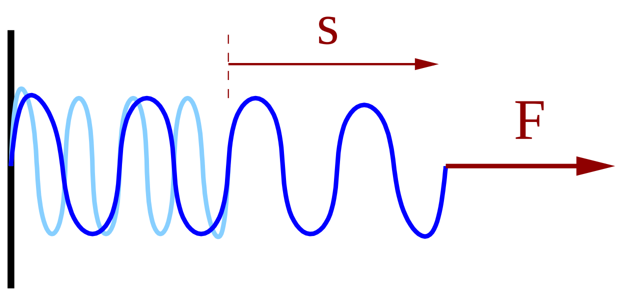


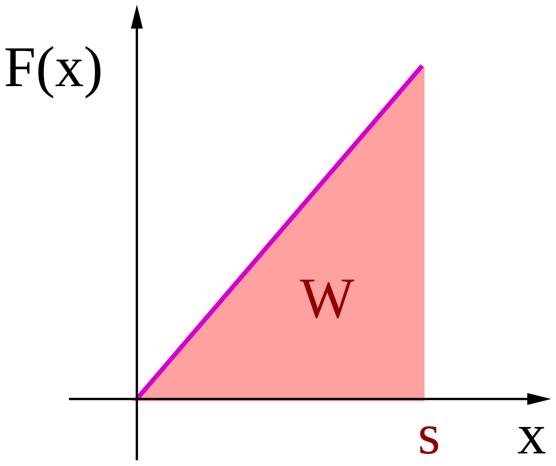
Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy!

siła Lorenza, siła Coriolisa, siły reakcji więzów...

Praca i energia

Praca





Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy przeciwko sile sprężystości:

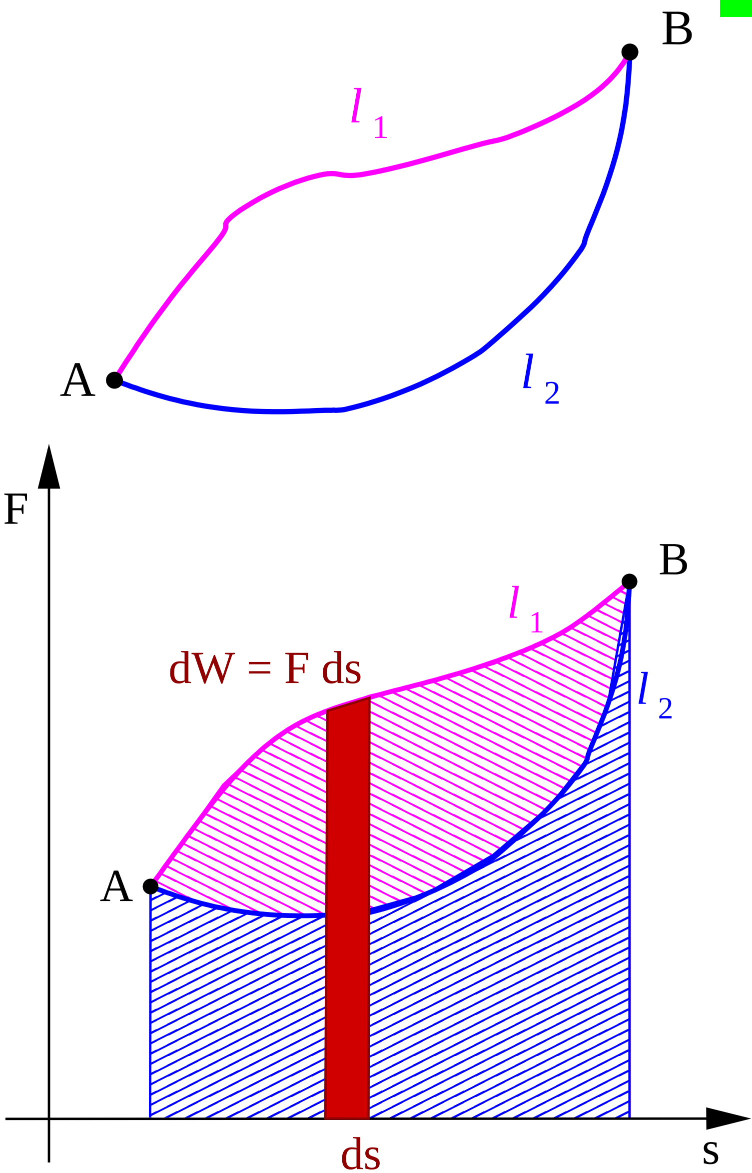
$$F(x) = kx$$

Wykonana praca:

$$W = \int_0^s F(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^s kx \cdot dx = \left[\frac{1}{2} kx^2\right]_0^s = \frac{1}{2} ks^2$$

Praca i energia



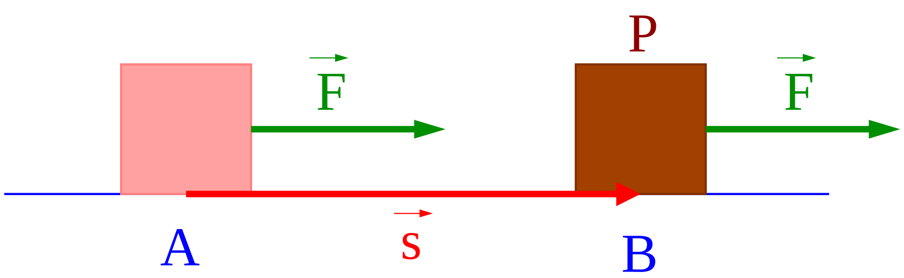
Praca

W ogólnym przypadku praca W_{AB} jaką wykonujemy podczas ruchu punktu z A do B może zależeć od:

- przebytej drogi l
  np. praca sił tarcia będzie proporcjonalna do l
- toru ruchu
  np. jeśli siły oporu zależą od wyboru toru
- prędkości
  siły oporu w ośrodku zależą od prędkości
- czasu
  jeśli działające siły zależą od czasu

Praca i energia

Energia kinetyczna



Przyjmijmy, że siła $\vec{F}$ jest siłą wypadkową działającą na ciało P. Zmiana prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$v_B - v_A = \frac{F}{m} \cdot \Delta t = \frac{F}{m} \cdot \frac{s}{\langle v \rangle} = \frac{F}{m} \cdot \frac{2s}{v_A + v_B}$$

Gdzie skorzystaliśmy z wyrażenia na prędkość średnią: $\langle v \rangle = \frac{v_A + v_B}{2}$

Otrzymujemy:

$$v_B^2 - v_A^2 = (v_B - v_A)(v_B + v_A) = \frac{2}{m} \cdot F \cdot s = \frac{2}{m} \cdot W_{AB}$$

$$\Rightarrow \quad W_{AB} = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

Pracę możemy wyrazić poprzez zmianę energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Praca i energia

Energia kinetyczna

Praca jaką wykonuje siła $\vec{F}$ przy przesunięciu P o ds

$$dW = F_t\, ds = m\, a_t\, ds = m\, \frac{dv}{dt}\, ds$$

$$\frac{dv}{dt}\, ds = dv\, \frac{ds}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad = m\, \frac{ds}{dt}\, dv = m\, v\, dv$$

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B F_t(s) \cdot ds = \int_A^B mv\, dv = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

Niezależnie od postaci siły $\vec{F}$ i drogi

na ciało nie działają inne siły, układ inercjalny

praca siły jest równa zmianie energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Praca i energia

Moc

Moc średnia opisuje średnią pracę wykonywaną na jednostkę czasu:

$$P^{(\text{śr})} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Moc chwilowa

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Wstawiając $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Moc siły jest proporcjonalna do prędkości ciała!

Jednostką pracy jest Dżul:

$$1J = 1N \cdot 1m = 1 \frac{kg\ m^2}{s^2}$$

Jednostką mocy jest Wat:

$$1W = \frac{1J}{1s} = 1 \frac{kg\ m^2}{s^3}$$

Kiedyś używano jako jednostki mocy konia mechanicznego:

$$1\ KM = 735.498\ W$$

Praca i energia

Energia potencjalna

Ruch w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym $\vec{g}$.

Siła ciężkości działająca na masę m: $\vec{F} = m\,\vec{g} = m\,(0, -g, 0)$

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -m\,\vec{g}\,(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = m\,g\,(y_A - y_B)$$

Możemy wprowadzić energię potencjalną dla jednorodnego pola grawitacyjnego

$$E_p(\vec{r}) = -m\,\vec{g}\,\vec{r} = m\,g\,y$$

Pracę możemy wtedy wyrazić przez zmianę energii potencjalnej

$$W_{AB} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Mówimy, że siła ciężkości jest siłą zachowawczą.

Praca i energia

Energia potencjalna

Siła $\vec{F}(\vec{r})$ jest zachowawcza (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od położenia punktów początkowego (A) i końcowego (B)

$\Rightarrow$ można ją wyrazić przez zmianę energii potencjalnej

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Jeśli droga jest zamknięta to praca jest równa zeru

$$\int_A^A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

cyrkulacja (krążenie) $\vec{F}$

Siłami zachowawczymi są też wszystkie siły centralne, zależne tylko od odległości

$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$ siła kulombowska, siła grawitacyjna, siły sprężystości...

Praca i energia

Siła a energia potencjalna

Praca wykonana przy infintezymalnym przesunięciu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$$dW \;=\; \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \;=\; -\, dE_p$$

$$\text{zmiana energii potencjalnej} \quad \Rightarrow \quad = \; -\frac{\partial E_p}{\partial x}\, dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}\, dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}\, dz$$

Otrzymujemy:

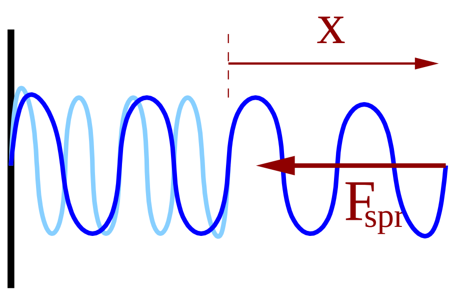
$$\boxed{\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x},\; -\frac{\partial E_p}{\partial y},\; -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)}$$

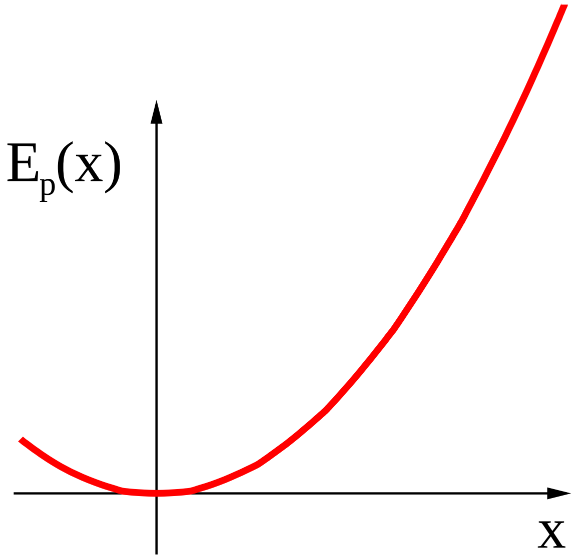
Znajomość potencjału siły zachowawczej jest rownoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany.

Praca i energia

Siła a energia potencjalna





Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy.

$$W \;=\; \int_0^s F(x)\cdot dx \;=\; \frac{1}{2}ks^2$$

Kosztem tej pracy rośnie energia potencjalna:

$$E_p(x) \;=\; \frac{1}{2}kx^2$$

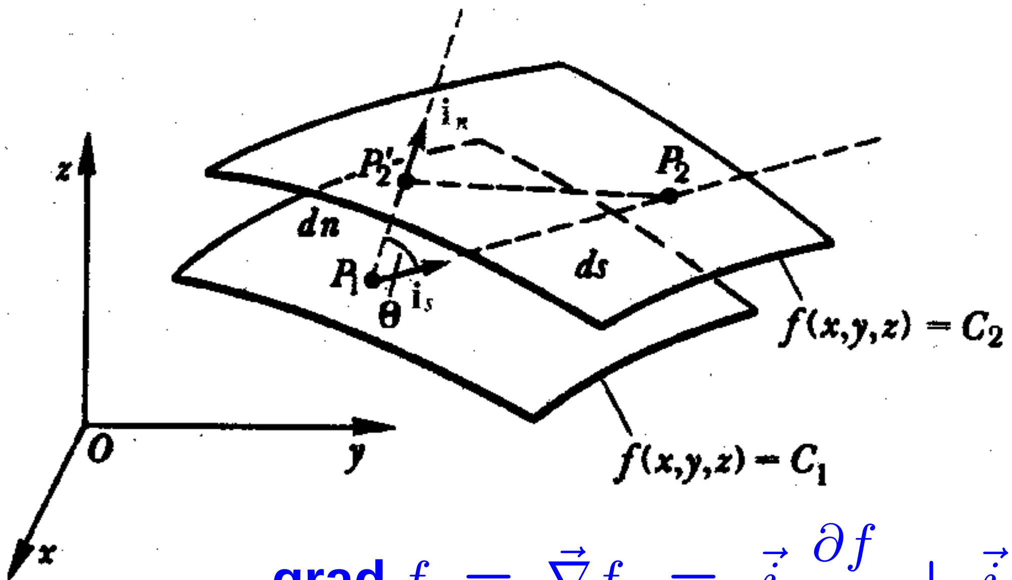
Siła sprężystości:

$$F_x^{spr}(x) \;=\; -\frac{dE_p(x)}{dx} \;=\; -kx$$

W momencie puszczenia sprężyny energia potencjalna zamienia się na kinetyczną...

Praca i energia

Gradient



Gradient wskazuje kierunek w którym następuje największa zmiana wartości funkcji skalarnej $f(x, y, z)$.

Wartość gradientu odpowiada wartości pochodnej funkcji $f(x, y, z)$ wzdłuż tego kierunku.

$$\textbf{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \vec{i}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

"nabla" $\Rightarrow \quad \vec{\nabla} = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}_n \frac{\partial f}{\partial n}$$ $\vec{n}$ - wektor normalny do f=const

Siłę zachowawczą wyrażamy jako gradient energii potencjalej: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$ pomiędzy A i B wyraża się przez energię potencjalną

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B$$

Z drugiej strony, praca siły działającej na ciało zmienia energię kinetyczną:

$$W_{AB} = E_k^B - E_k^A$$

$$\Rightarrow \quad E_k^B - E_k^A = E_p^A - E_p^B$$

$$\Rightarrow \quad E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A$$

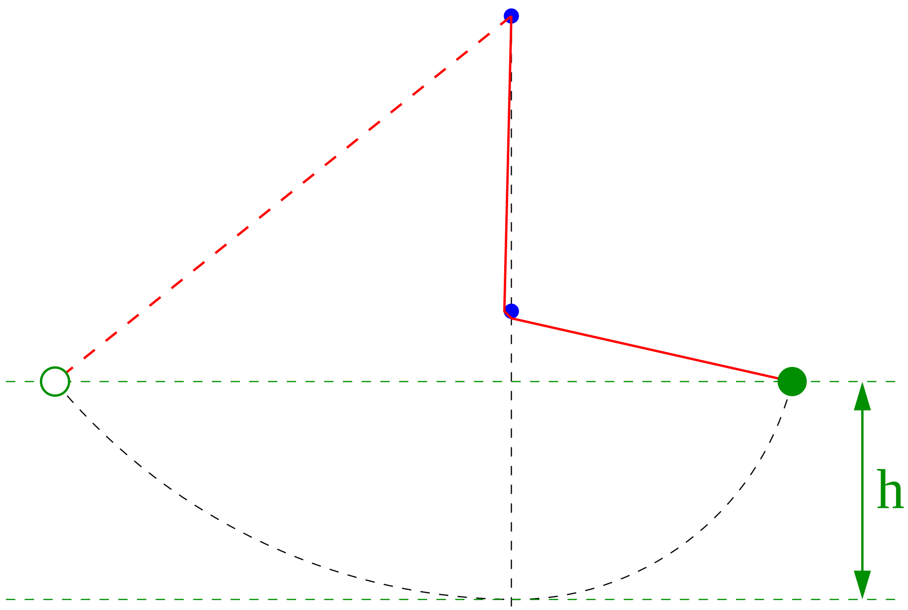
$$\Rightarrow \quad E = E_p + E_k = \mathrm{const}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

Zasada zachowania energii

Wahadło Galileusza

Wysokość na jaką wznosi się wahadło
nie zmienia się przy zmianie długości nici:

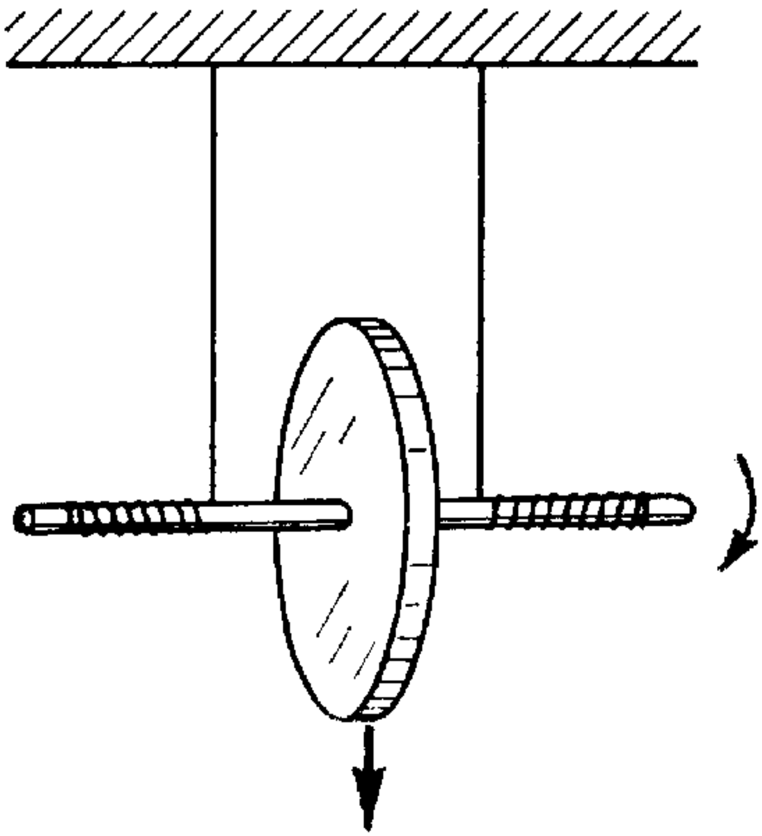


$$E_p + E_k \;=\; E \;=\; \mathrm{const}$$

$$E_k = 0 \;\Rightarrow\; m\,g\,h = E$$

siły reakcji więzów nie wykonują pracy

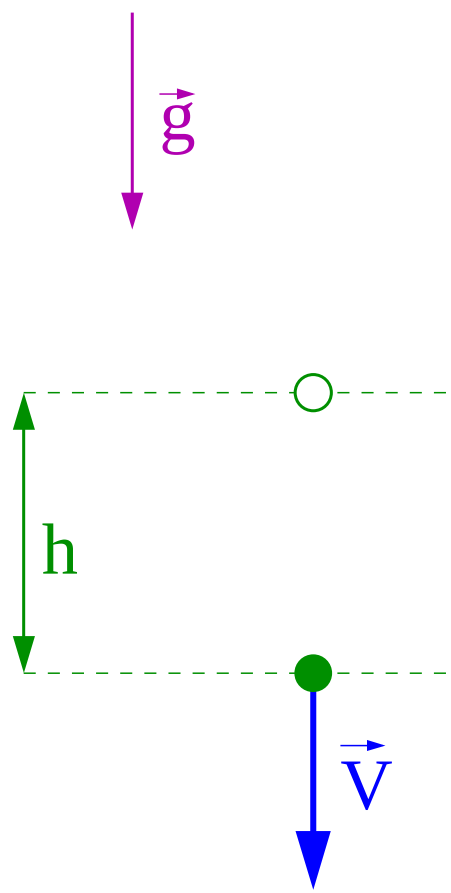
Koło Maxwella



Przemiana energii potencjalnej w
energię kinetyczną ruchu obrotowego.

Zasada zachowania energii

Spadek swobodny



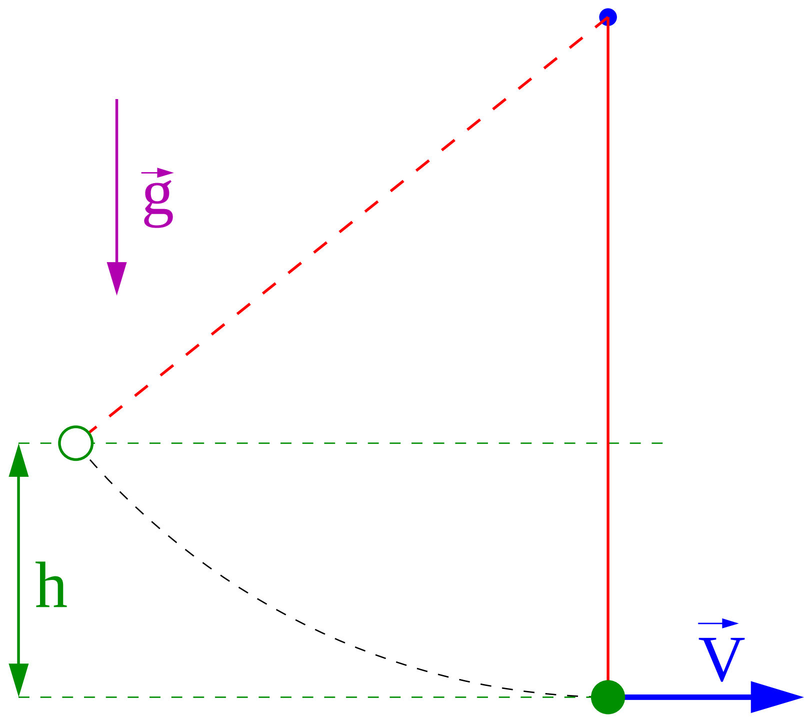
W jednorodnym polu $\vec{g}$ ciało spada swobodnie z wysokości h $(\vec{v}(0) = 0)$.

Prędkość końcowa z zasady zachowania energii:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\frac{m\, v^2}{2} = m\, g\, h$$

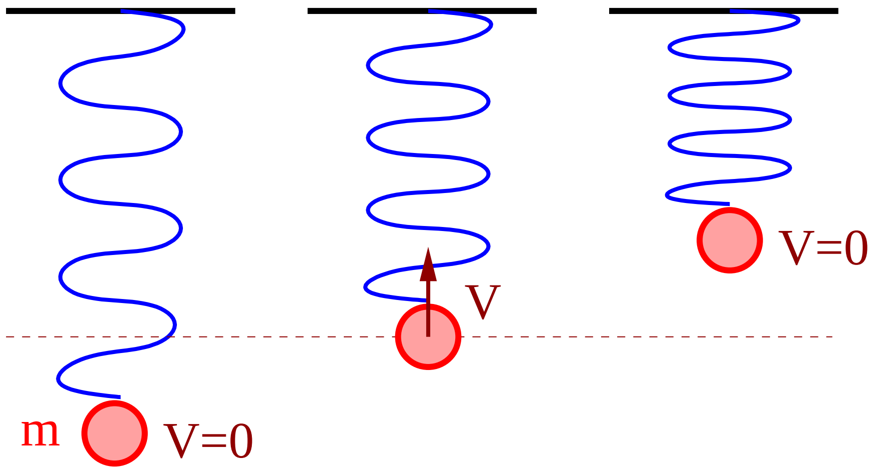
$$v = \sqrt{2\, g\, h}$$

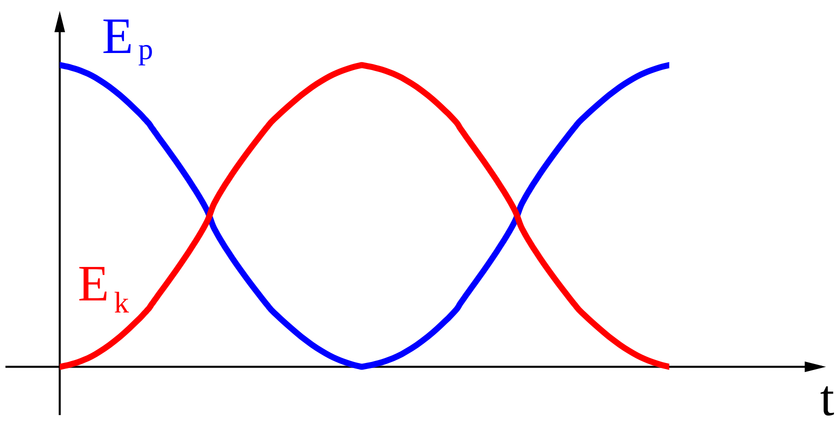


Taką samą prędkość uzyska wahadło puszczone z wysokości h

Zasada zachowania energii

Siły sprężystości





Ruchu pod wpływem sił sprężystości:

$$E = E_p(x) + E_k(x) = \text{const}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

Ruch harmoniczny $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad E_p(x) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$v = \omega\, A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad E_k(x) = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$$

Zasada zachowania energii

Równania ruchu

Znajomość energii potencjalnej jest rownoważna znajomości siły (zachowawczej):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Czy znając $E_p(\vec{r})$ możemy rozwiązać równania ruchu ciała ?

- Możemy wyznaczyć zależność $\vec{F}(\vec{r})$ i skorzystać z II zasady dynamiki...

albo

- Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii:

$$E = E_k(\dot{\vec{r}}) + E_p(\vec{r}) = const$$

W zależności od zagadnienia jeden albo drugi sposób może być bardziej użyteczny...

Zasada zachowania energii

Dla ruchu prostoliniowego pod działaniem siły zachowawczej $\vec{F}(x)$, energia potencjalna $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x) = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymujemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}}$$

$$t = \int_{x_\circ}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x')\right)}}$$

$\Rightarrow$ Znając $E_p(x)$ możemy zawsze znaleźć związek między x i t.

Zasada zachowania energii

Przykład: $\vec{F} = F\,\vec{i}_x = const \quad \Rightarrow E_p(x) \;=\; -F\,x \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

Przyjmując, że $x = 0$ w chwili $t = 0$ mamy:

$$t \;=\; \sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E + F\,x'}}$$

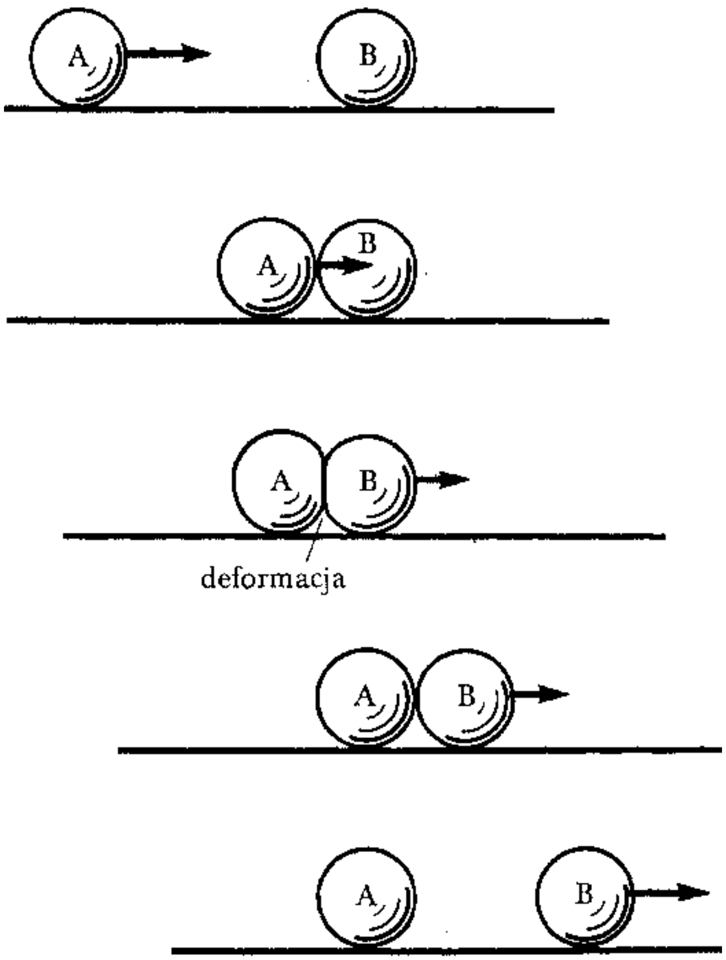
$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \;=\; \frac{2}{F}\left[\sqrt{E + F\,x'}\right]_0^x \;=\; \frac{2}{F}\sqrt{E + F\,x} - \frac{2}{F}\sqrt{E}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{\sqrt{2m}}\,t + \sqrt{E} \;=\; \sqrt{E + F\,x} \qquad \Rightarrow \quad x \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)\cdot t^2 \;+\; \sqrt{\frac{2E}{m}}\cdot t$$

$$\frac{1}{2}\quad a \quad \cdot t^2 \;+\; v_\circ \;\cdot t$$

$v_\circ$ - predkość w chwili $t = 0 \Rightarrow$ energia całkowita $E \;=\; \frac{m v_\circ^2}{2} > 0$

Zderzenia



Poprzednio rozpatrywaliśmy zderzenia ciał z punktu widzenia zasady zachowania pędu (i momentu pędu)

zasada zachowania pędu jest zawsze bezwzględnie spełniona

Czy zachowana jest energia kinetyczna ?

TAK

- jeśli działające siły mają charakter zachowawczy

siły kulombowskie, siły spężystości

$$\Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_k = 0$$

NIE

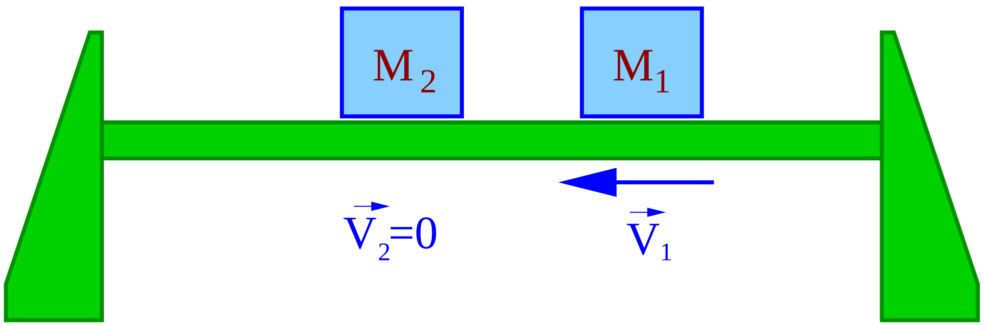
- jeśli mamy wkład sił niezachowawczych

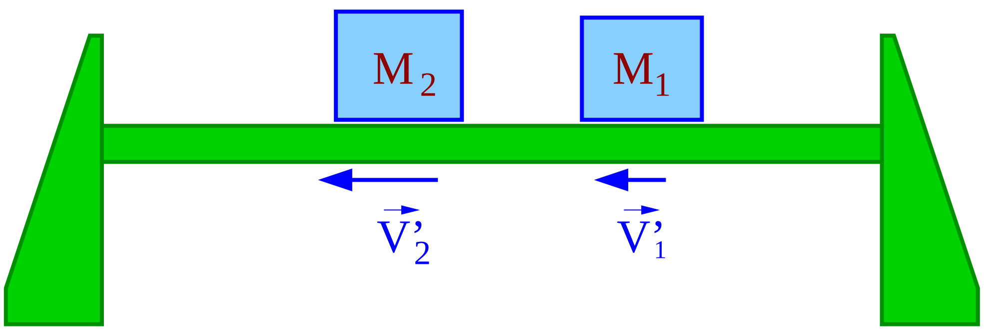
w wyniku zderzenia następują trwałe zmiany (np. odkształcenia) w zderzających się ciałach

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przypadek jednowymiarowy:





Z zasad zachowania:

po przed

$$p: \quad m_1 V_1' + m_2 V_2' = m_1 V_1$$

$$E: \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Przekształcamy:

$$p: \quad m_2 V_2' = m_1 (V_1 - V_1')$$

$$E: \quad m_2 V_2'^2 = m_1 (V_1^2 - V_1'^2)$$
$$= m_1 (V_1 - V_1')(V_1 + V_1')$$

$$\Rightarrow V_2' = V_1 + V_1' \quad \Rightarrow V_2' - V_1' = V_1$$

wartość bezwzględna prędkości względnej przed i po zderzeniu jest taka sama

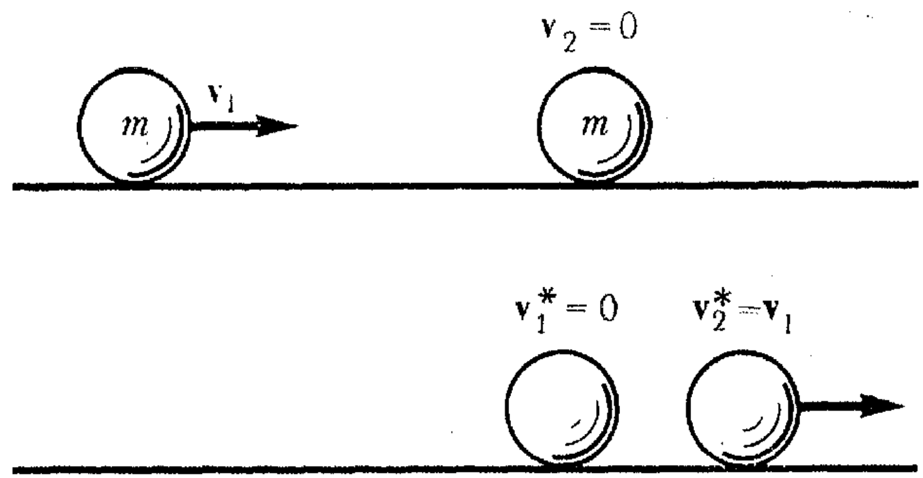
Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przekształcając dalej otrzymujemy:

$$m_2 \, (V_1 + V_1') \;=\; m_1 \, (V_1 - V_1')$$

$$\Rightarrow \quad V_1' \, (m_1 + m_2) \;=\; V_1 \, (m_1 - m_2)$$



Ostatecznie:

$$V_1' \;=\; \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \, V_1$$

$$V_2' \;=\; \frac{2 \, m_1}{m_1 + m_2} \, V_1$$

Przypadek szczególny: $m_1 \;=\; m_2$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} V_1' &= V_2 = 0 \\ V_2' &= V_1 \end{aligned}$$

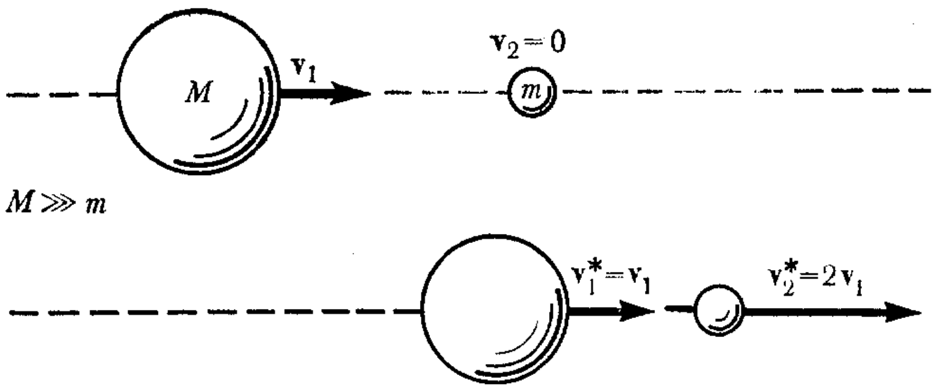
Zderzające się ciała "wymieniają się" prędkościami; rozwiązanie słuszne także w przypadku $\vec{V}_2 \neq 0$

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$m_1 > m_2$

Masa "pocisku" większa od masy "tarczy":



Przypadek graniczny: $m_1 \gg m_2$

$$\Rightarrow \quad V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 = V_1$$

$$V_2' = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} V_1 = 2 \cdot V_1$$

"Pocisk" nie zauważa zderzenia

"Tarcza" uzyskuje prędkość $2 \cdot V_1$

Otrzymujemy: $V_2' > V_1' > 0$

Po zderzeniu oba ciała poruszają się w tą samą stronę.

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$m_1 \ < \ m_2$

Masa "pocisku" mniejsza od masy "tarczy":

Otrzymujemy:

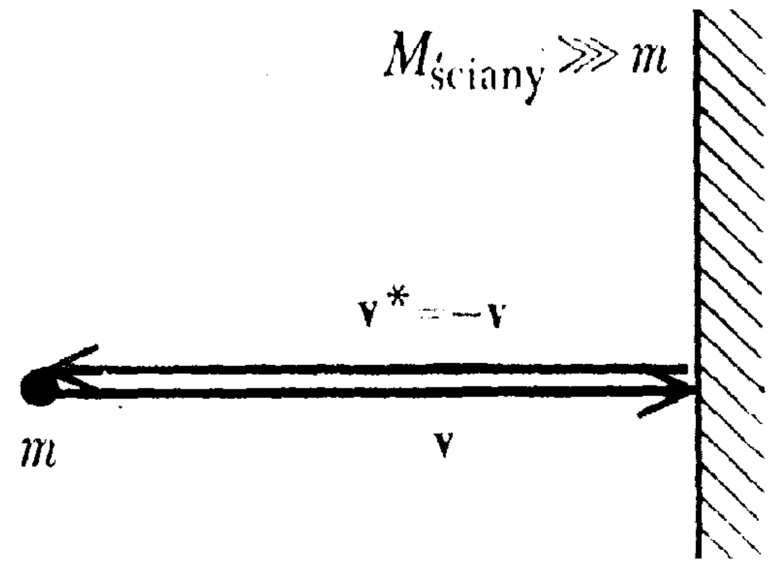
$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 < 0$$

$$V_2' = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} V_1 > 0$$

Prędkość "pocisku" zmienia znak
$\Rightarrow$ "pocisk" odbija się od "tarczy"

Przypadek graniczny: $m_1 \ \ll \ m_2$

$$\Rightarrow \quad V_1' = -V_1$$
$$V_2' = 0$$

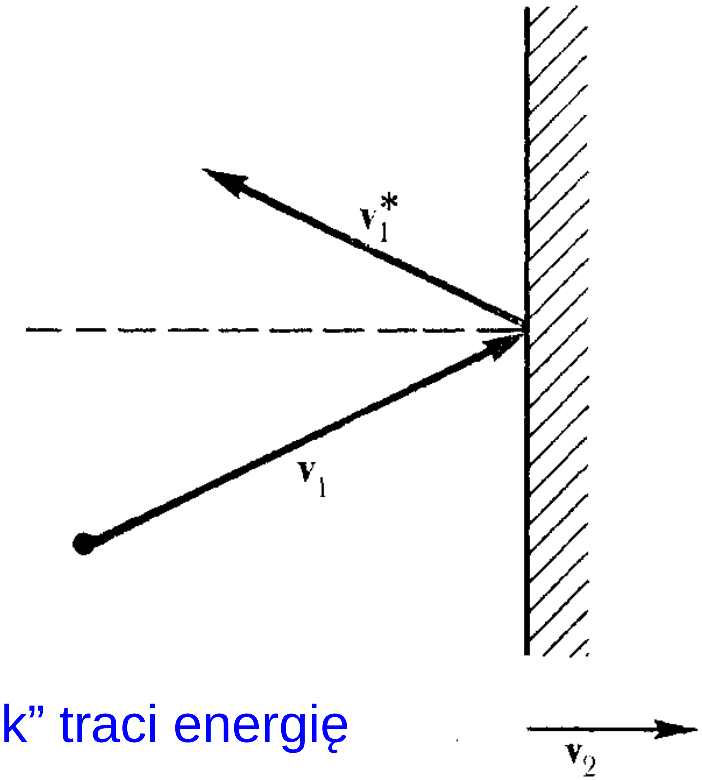


Sprężyste odbicie od nieruchomej "ściany"

Zderzenia

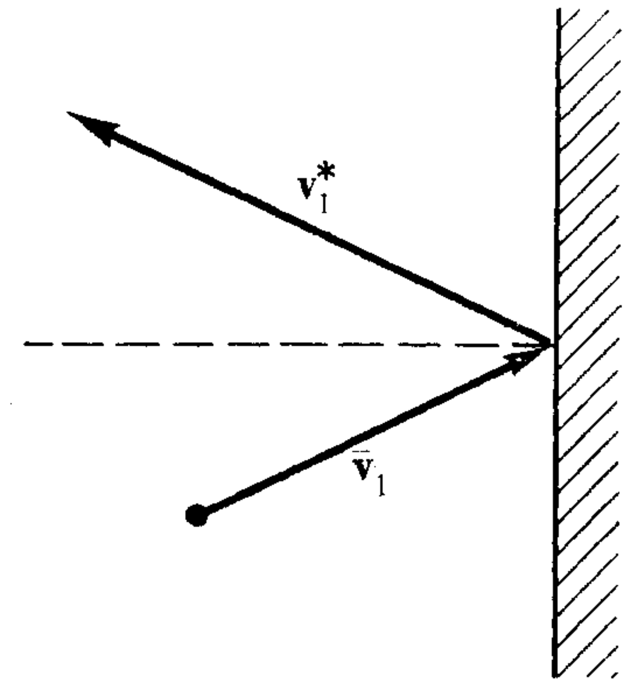
$m_1 \ll m_2$

“Tarcza” oddala się od “pocisku”
(“ściana”)



“pocisk” traci energię

“Tarcza” przybliża się do “pocisku”
(“ściana”)



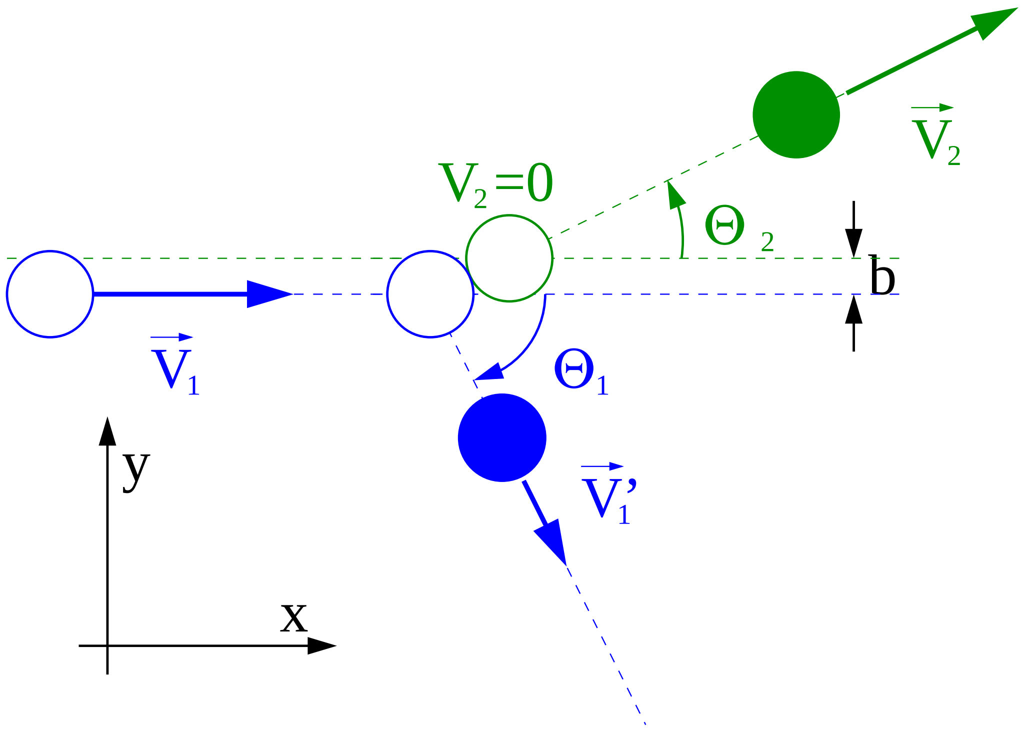
“pocisk” zyskuje energię

Mikroskopowy obraz ochładzania (ogrzewania) się gazu przy rozprężaniu (sprężaniu)

Zderzenia nie centralne

Do tej pory rozpatrywaliśmy tzw. zderzenia centralne,
dla których parametr zderzenia $b = 0$ "pocisk" trafia w sam środek "tarczy"

W przypadku gdy $b \neq 0$ zderzenie trzeba rozpatrywać w dwóch wymiarach:



Zasada zachowania pędu:

$$\begin{array}{llcl} & \text{po zderzeniu} & & \text{przed} \\ p_x: & m_2 V_2' \cos\theta_2 + m_1 V_1' \cos\theta_1 & = & m_1 V_1 \\ p_y: & m_2 V_2' \sin\theta_2 - m_1 V_1' \sin\theta_1 & = & 0 \end{array}$$

Dla zderzeń spężystych:

$$E_k: \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Znajomość m_1, m_2 i V_1 ($V_2 = 0$) nie wystarcza do wyznaczenia pełnej kinematyki zderzenia (V_1', V_2', θ_1 i θ_2) !

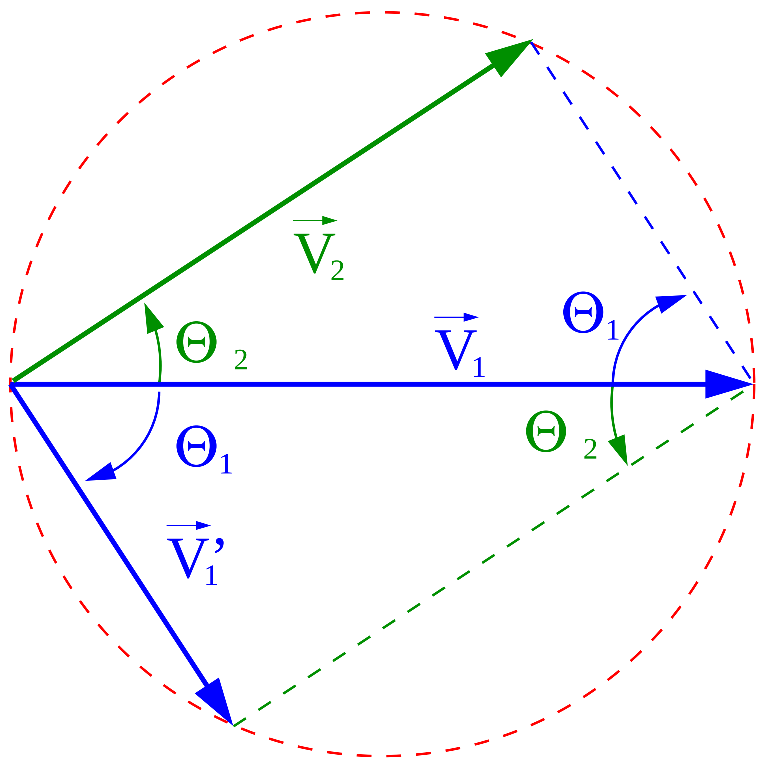
$\Rightarrow$ musimy ustalić b albo jeden z parametrów rozproszenia (np. kąt θ_1).

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Jeśli masy zderzających się sprężyscie ciał są równe

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ zagadnienie bardzo się upraszcza



Z zasad zachowania:

$$\vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 = \vec{V}_1$$

$$V_1'^2 + V_2'^2 = V_1^2$$

$\Rightarrow$ wektory $\vec{V}_1$, $\vec{V}'_1$ i $\vec{V}'_2$ tworzą trójkąt prostokątny.

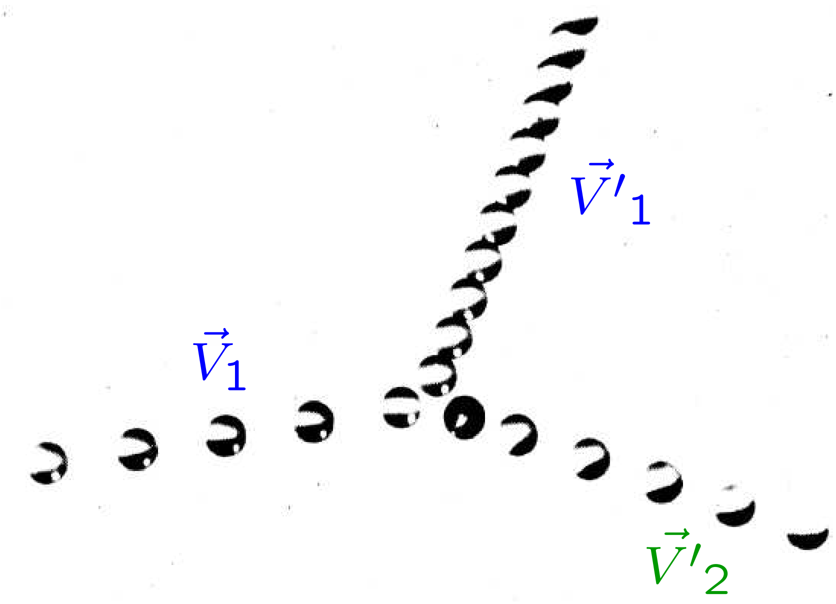
$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

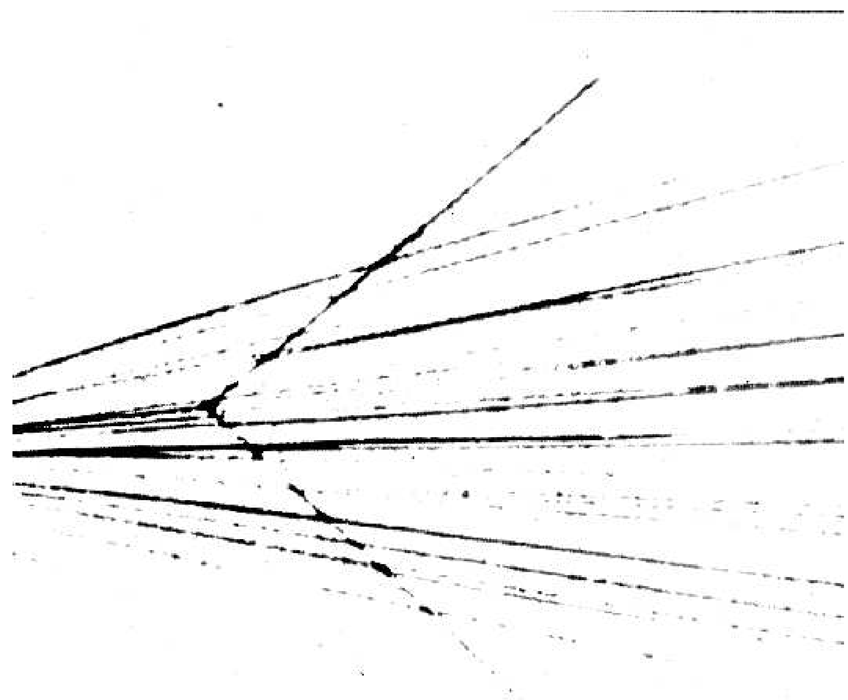
Zderzenia

$\underline{\underline{m_1 \ = \ m_2}}$

Zderzenie proton-proton w komorze pęcherzykowej:

Fotografia zderzających się kul:



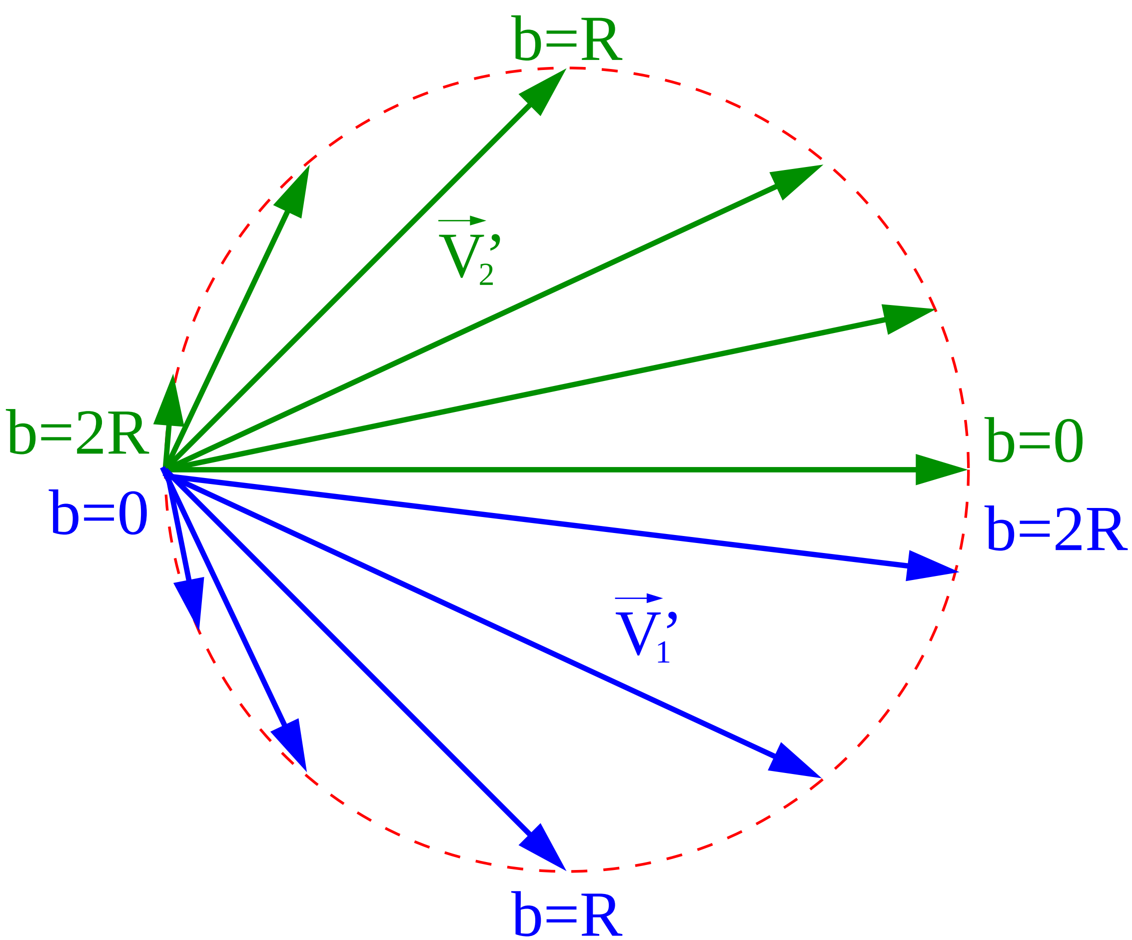


niska energia padającej wiązki

$\Rightarrow$ dynamika nierelatywistyczna

Zderzenia

$m_1 = m_2$



Stan końcowy zależy od parametru zderzenia b

- $b = 0 \Rightarrow$ zderzenie centralne

$$\vec{V}'_2 = \vec{V}_1$$
$$\vec{V}'_1 = 0$$

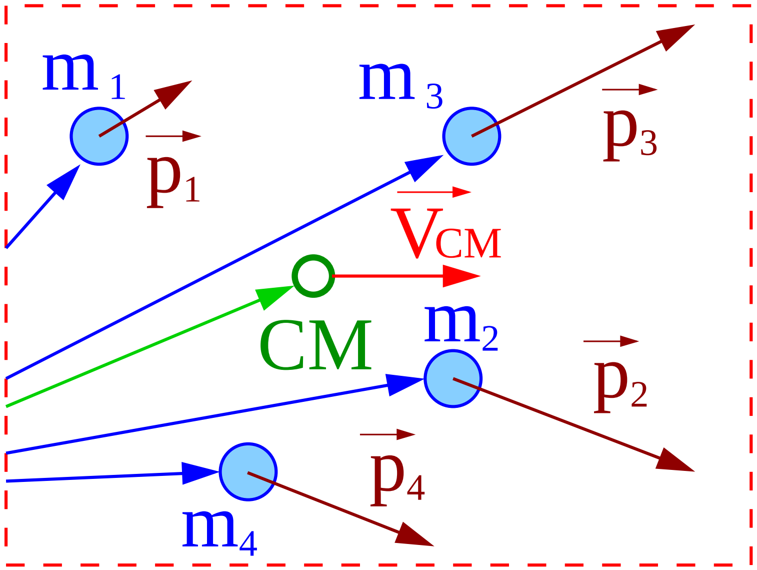
- $b >= 2R \Rightarrow$ brak zderzenia (kule mijają się)

$$\vec{V}'_2 = 0$$
$$\vec{V}'_1 = \vec{V}_1$$

Układ środka masy

Układ izolowany

Izolowany układ wielu ciał:



układ inercjalny

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Środek masy

Klasyczna definicja położenia środka masy:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$\Rightarrow$ średnia ważona z $\vec{r}_i$ (z wagami $w_i = m_i$)

Ruch środka masy: m_i=const

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_i m_i\right) \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M \vec{V}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

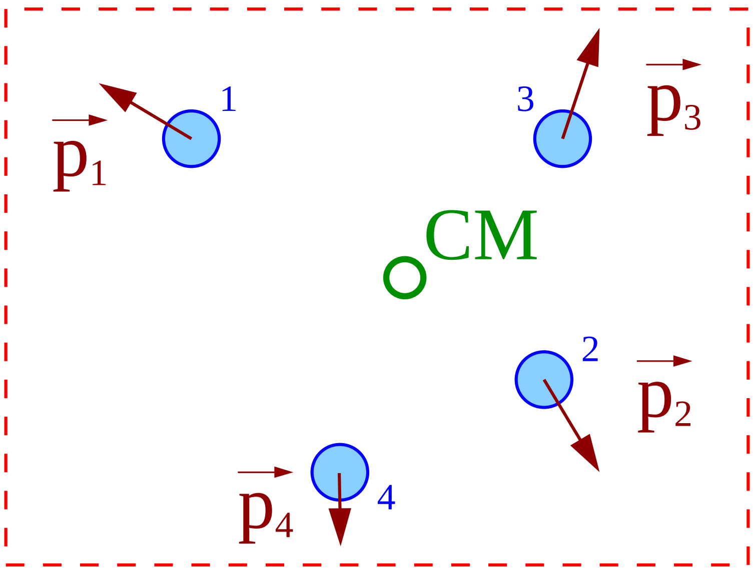
pęd układu możemy związać z ruchem środka masy

Układ środka masy

Prędkość środka masy: (klasycznie)

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Zawsze możemy tak zmienić układ odniesienia, żeby środek masy spoczywał



⇒ układ środka masy (CMS)

Układ środka masy

Układ środka masy jest w wielu przypadkach najwygodniejszym układem odniesienia

⇒ szereg relacji bardzo się upraszcza

Zasada zachowania pędu w CMS:
(zmienne w CMS oznaczamy *)

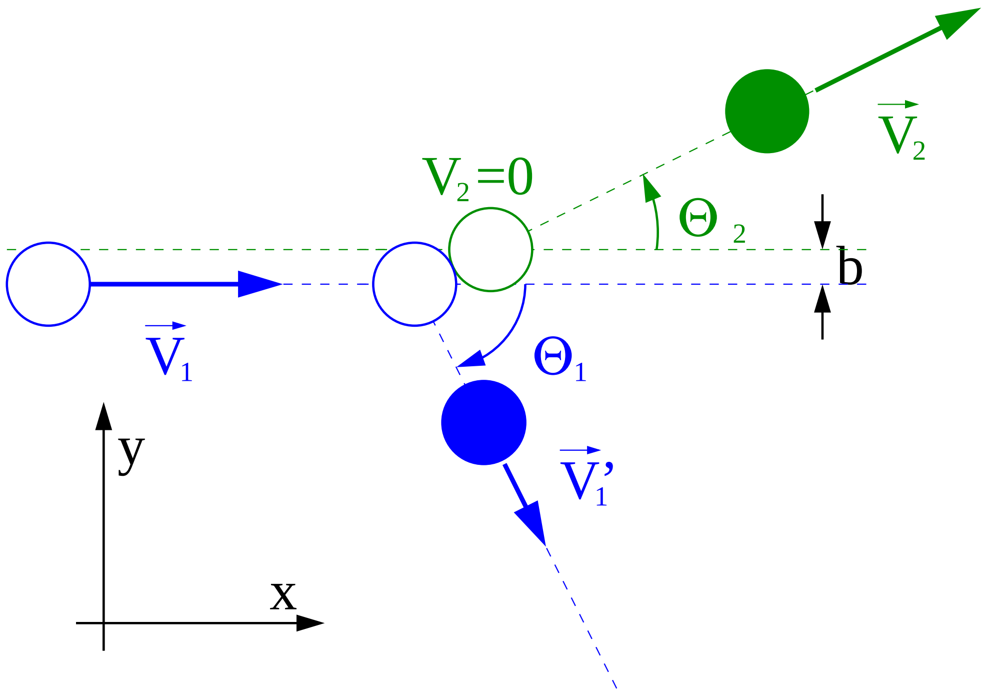
$$\vec{P}^\star = \sum_i \vec{p}_i^{\,\star} = 0$$

ogólna definicja układu środka masy słuszna także w przypadku $v \sim c$

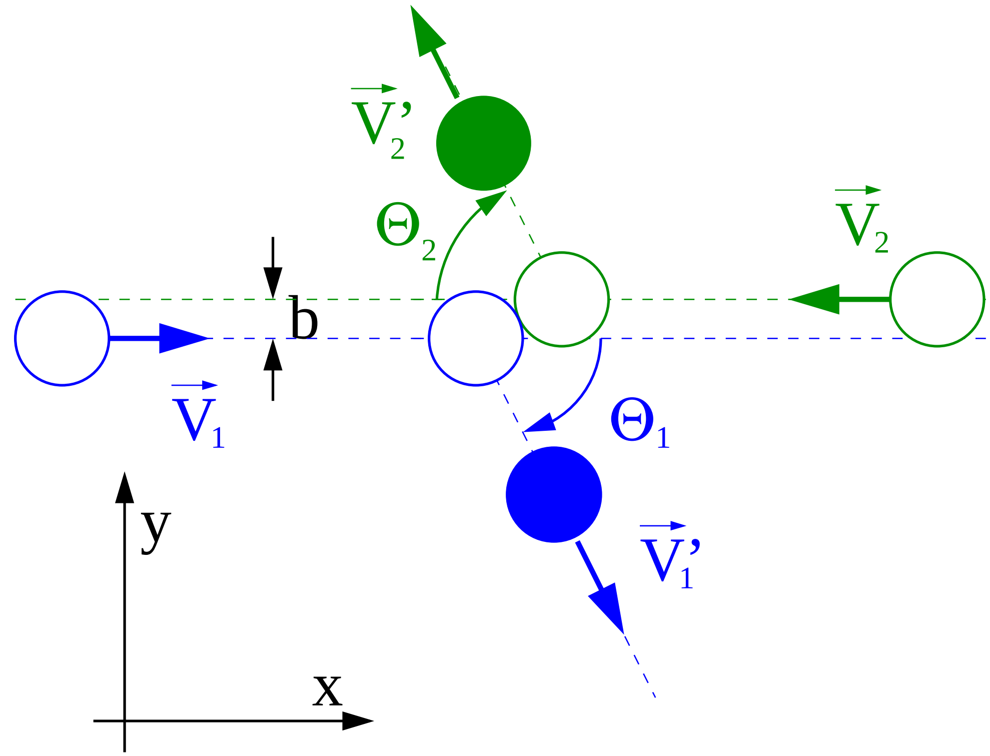
Układ środka masy

Zderzenia nie centralne

Układ laboratoryjny:



Układ środka masy:



Zasada zachowania pędu: $\vec{P}^{\star} = 0$

Skomplikowane wyrażenia na prędkości końcowe w funkcji np. kąta rozproszenia θ_1.

$$\theta_1 = \theta_2$$

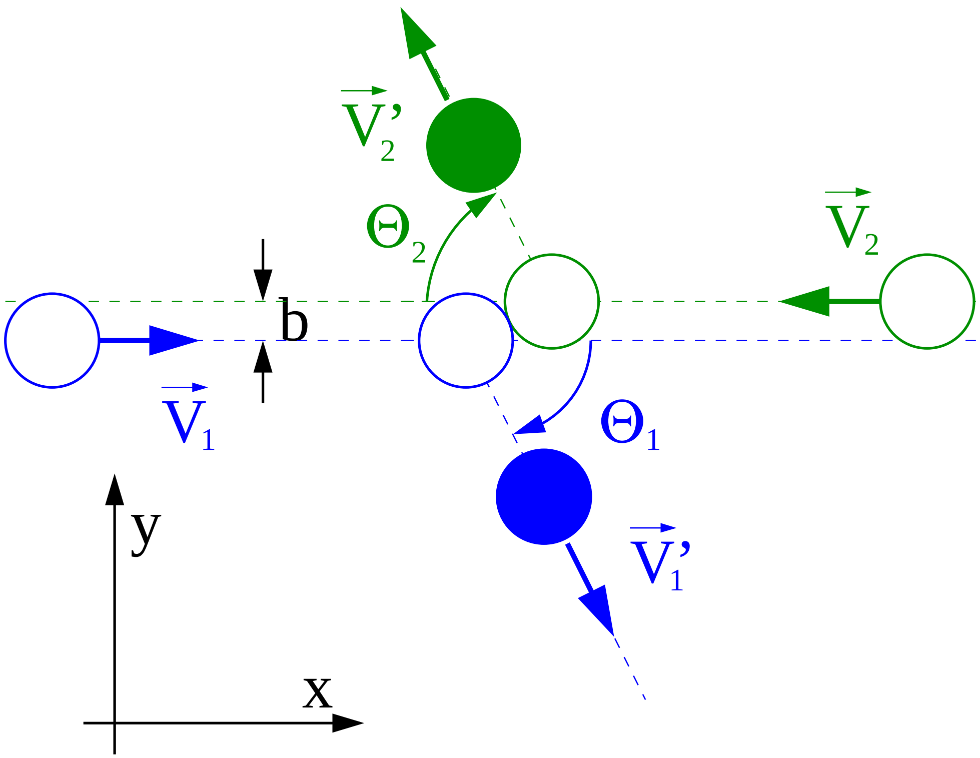
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

Łatwiej jeśli $m_1 = m_2$

Układ środka masy

Zderzenia sprężyste

Układ środka masy:



Zasada zachowania energii: $V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}$$

$$\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1'^2$$

$$\Rightarrow \quad V_1' = V_1 \qquad V_2' = V_2$$

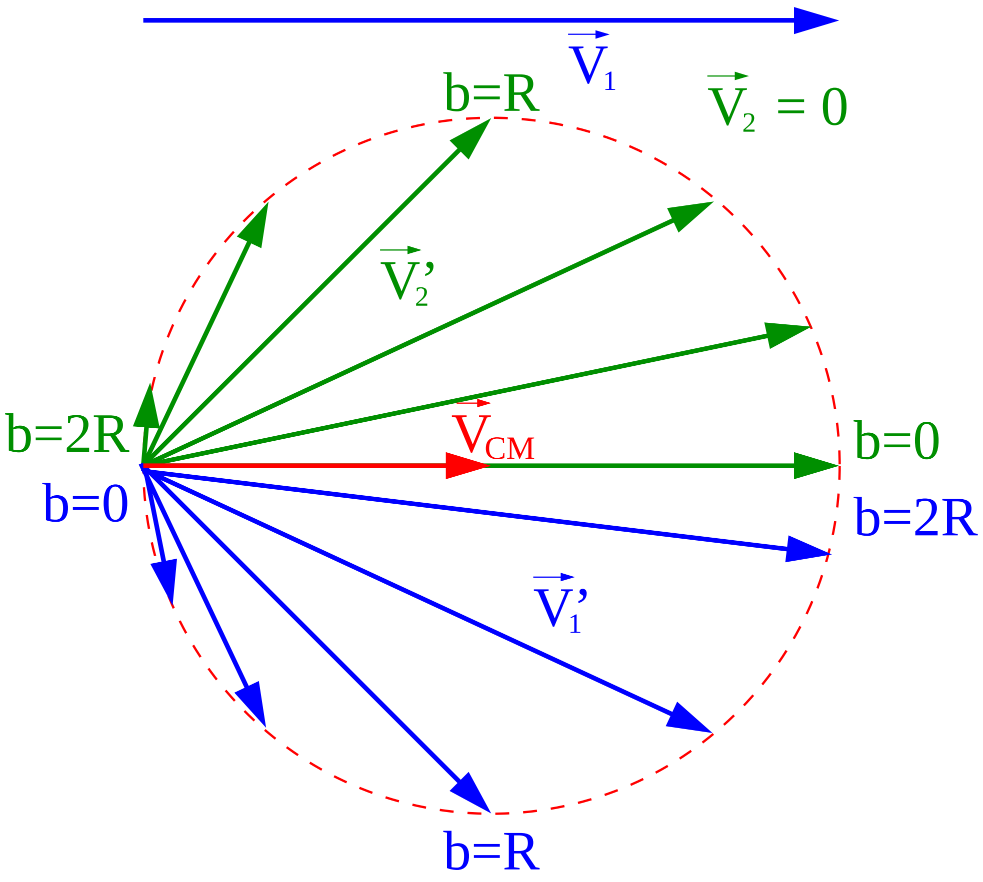
Niezależnie od mas zderzających się ciał, wartości ich prędkości przed i po zderzeniu sprężystym są takie same.

W układzie środka masy !

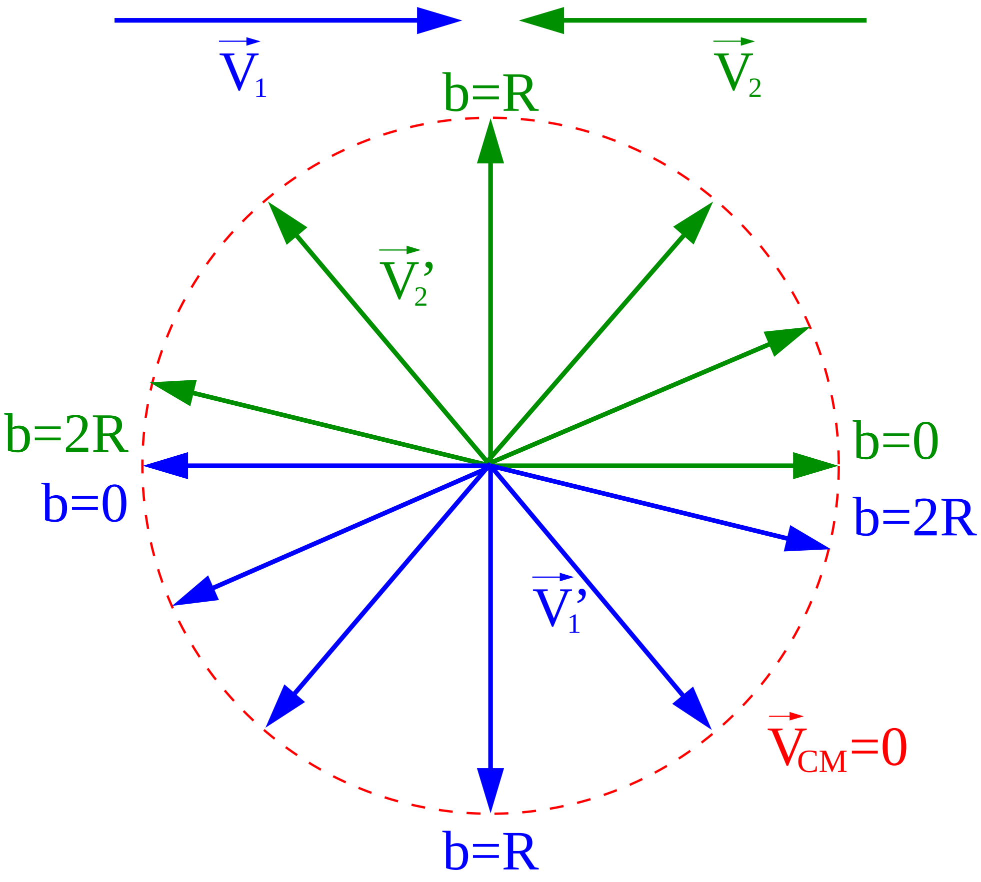
Układ środka masy

$m_1 = m_2$

Układ laboratoryjny:



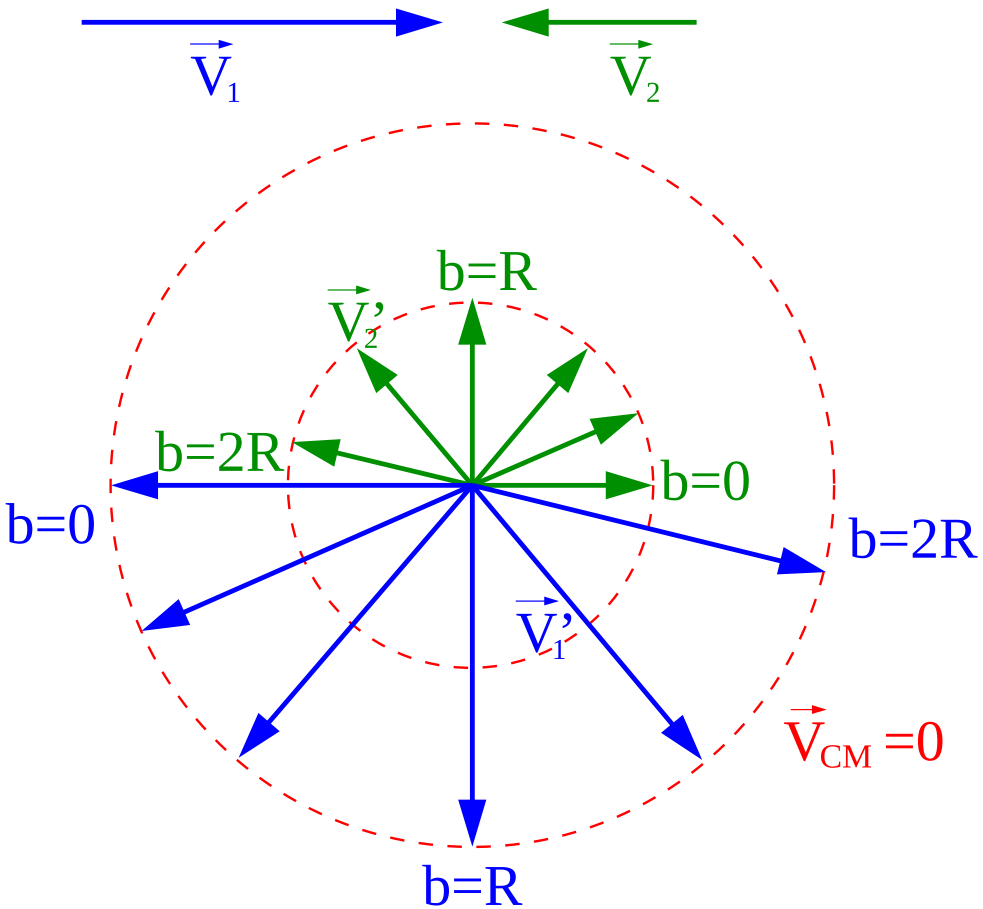
Układ środka masy:



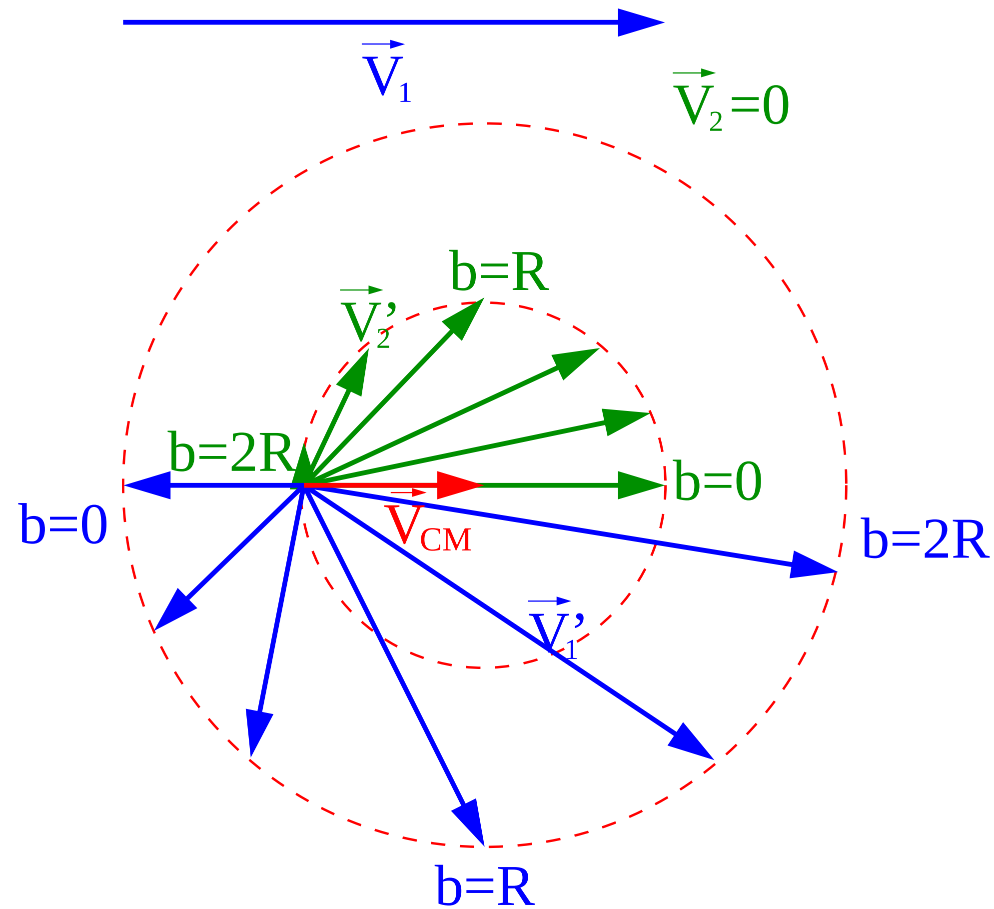
Układ środka masy

$m_1 < m_2$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny



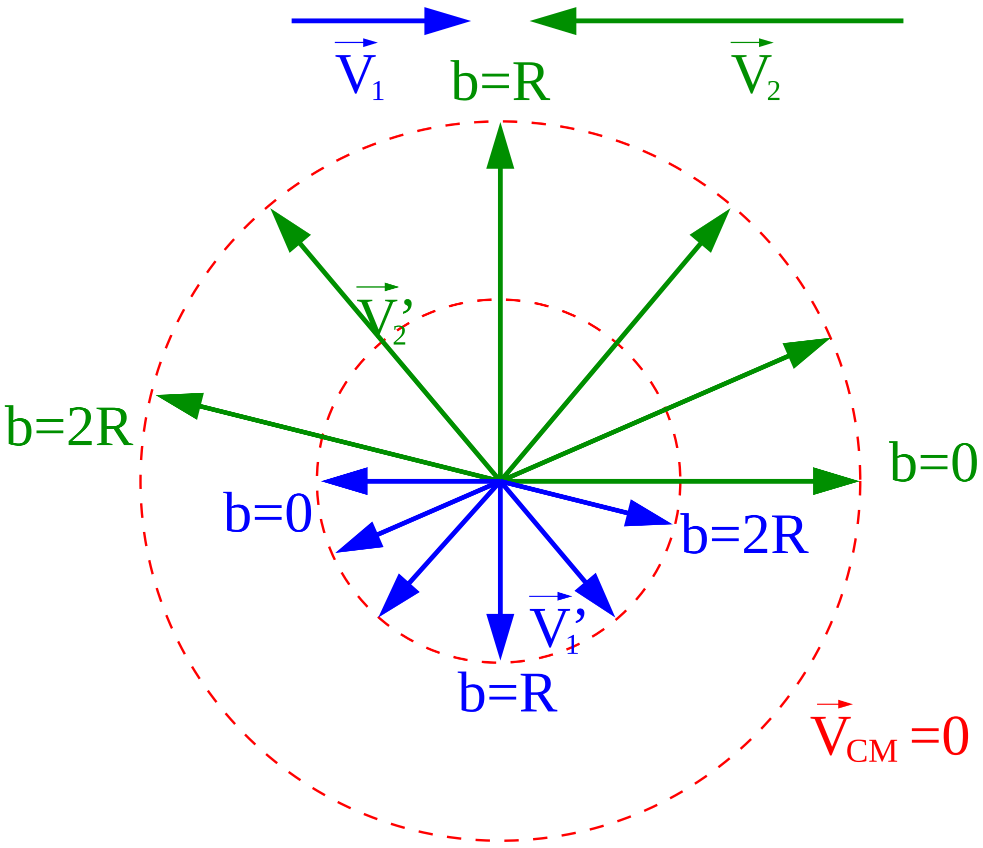
Dla $m_1 = \frac{1}{2} m_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2\, v_2$

$V_{CM} = \frac{1}{3} V_1$

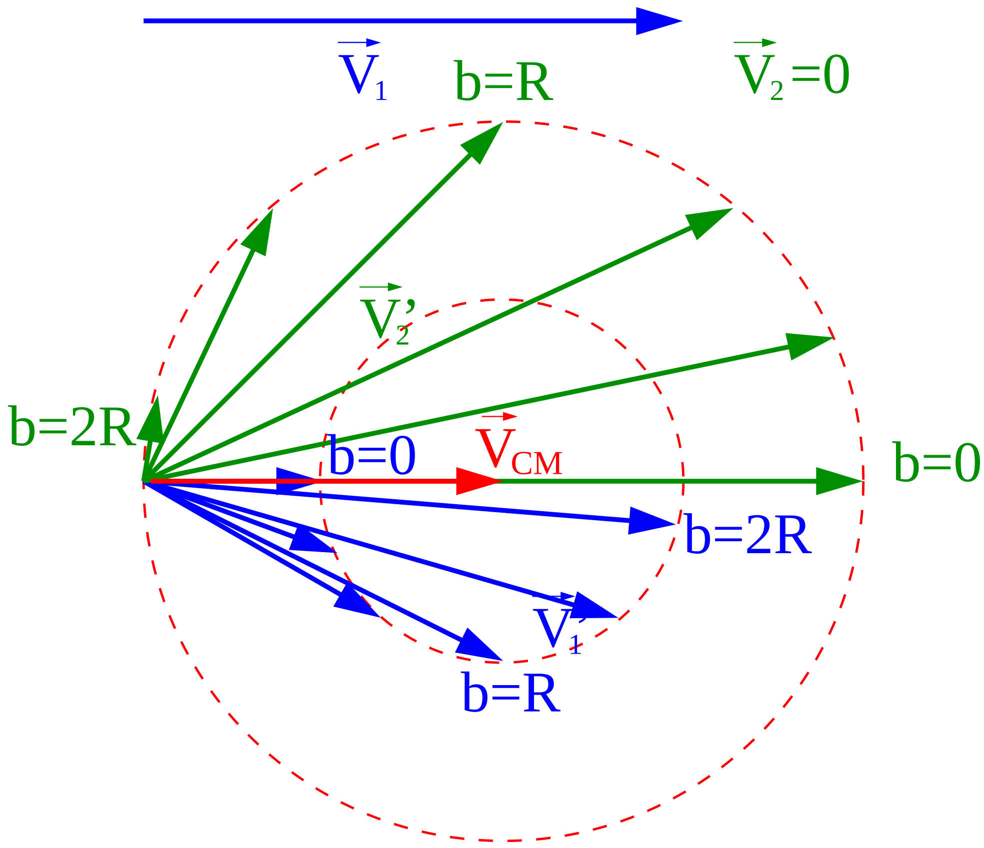
Układ środka masy

$m_1 > m_2$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny:



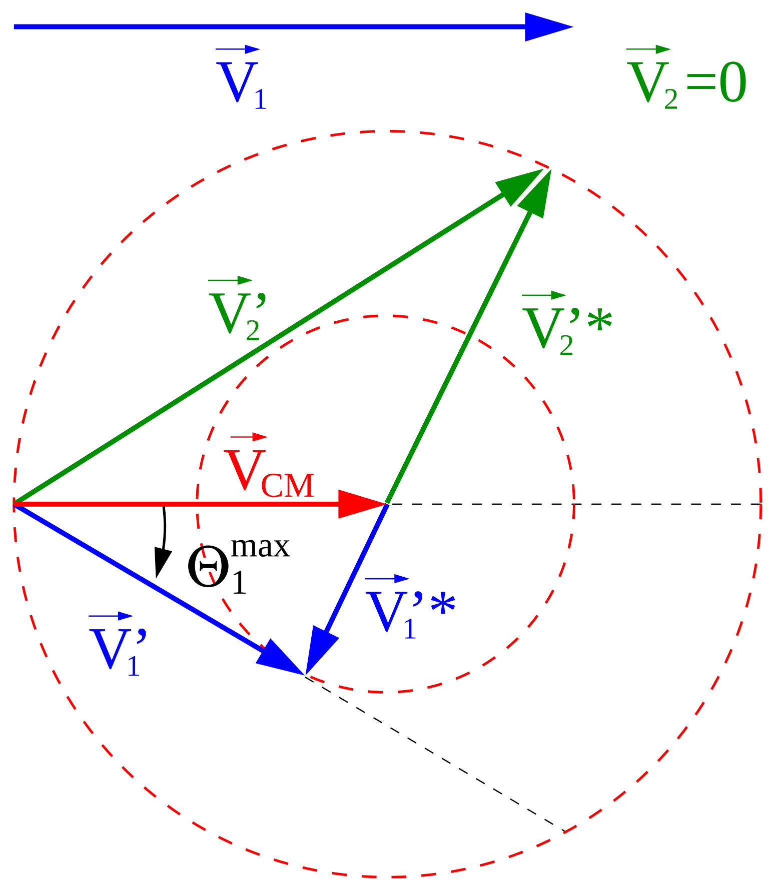
Dla $m_1 = 2\, m_2 \;\; \Rightarrow \;\; v_1 = \frac{1}{2} v_2$

$$V_{CM} = \frac{2}{3} V_1$$

Układ środka masy

$m_1 \; > \; m_2$

Układ laboratoryjny:



Związek między prędkościami:

$$V_{CM} \; = \; v_2^\star \; = \; \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

$$v_1^\star \; = \; \frac{m_2}{m_1} v_2^\star \; = \; \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

Maksymalny kąt rozproszenia "pocisku":

$$\sin \theta_1^{max} \; = \; \frac{v_1^\star}{V_{CM}} \; = \; \frac{m_2}{m_1}$$

Dla "tarczy" ograniczenie nie zależy od stosunku mas:

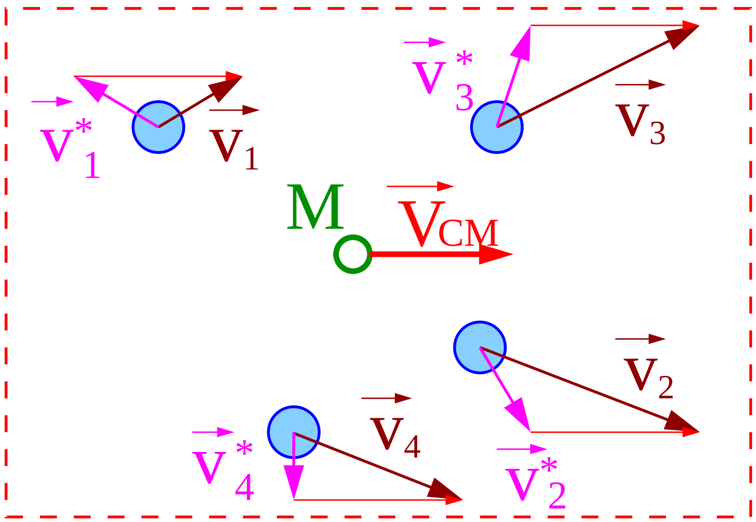
$$0 \; < \; \theta_2 \; < \; \frac{\pi}{2}$$

Układ środka masy

Energia układu

Transformacja prędkości:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\star} + \vec{V}_{CM}$$



Energia kinetyczna układu:

$$E_k = \sum_i \frac{m_i\, v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i\, |\vec{v}_i^{\star} + \vec{V}_{CM}|^2}{2}$$

$$= \sum_i \left(\frac{m_i\, (v_i^{\star})^2}{2} + 2\frac{m_i\, \vec{v}_i^{\star}\vec{V}_{CM}}{2} + \frac{m_i\, V_{CM}^2}{2} \right)$$

Z zasady zachowania pędu:

$$\sum_i m_i\, \vec{v}_i^{\star}\vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM} \sum_i m_i\, \vec{v}_i^{\star} = \vec{V}_{CM}\, \vec{P}^{\star} = 0$$

Ostatecznie:

$$E_k = E_k^{\star} + \frac{M\, V_{CM}^2}{2}$$

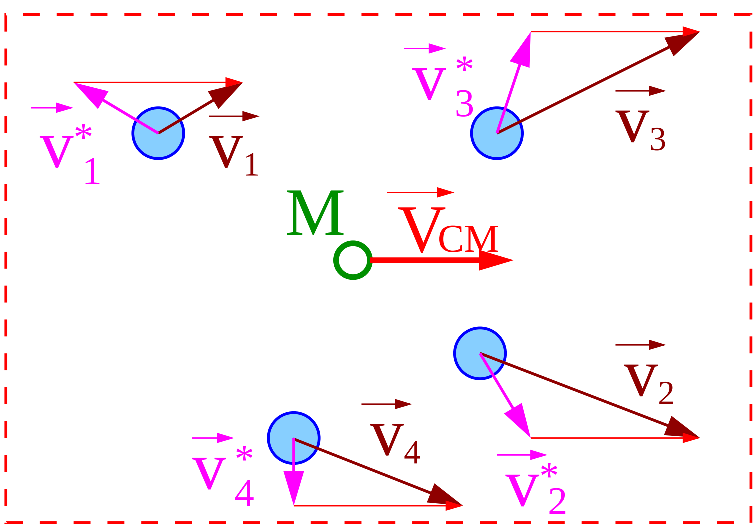
Energia kinetyczna układu jest sumą energii “wewnętrznej” ($E_k^{\star}$) i energii kinetycznej układu jako całości.

Układ środka masy

Moment pędu układu

Transformacja galileusza:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,\star} + \vec{R}_{CM}$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,\star} + \vec{V}_{CM}$$



Całkowity moment pędu względem początku układu

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^{\,\star}\right) \times \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^{\,\star}\right) \\
&= \left[\sum_i m_i\right] \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,\star} \\
&\quad + \left[\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\star}\right] \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\star} \times \vec{v}_i^{\,\star}
\end{aligned}$$

Z definicji CMS: $\sum m_i \vec{v}_i^{\,\star} = \sum m_i \vec{r}_i^{\,\star} = 0$

$\Rightarrow$ otrzymujemy:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}^{\star}_{CM}$$

Moment pędu układu jest sumą “wewnętrznego” momentu pędu ($\vec{L}^{\star}_{CM}$) (względem CM) i momentu pędu układu jako całości.

Układ środka masy

Ruch środka masy

Dla układu izolowanego

$$\vec{P} = \text{const}$$

środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym I Zasada Dynamiki

Pod działaniem sił zewnętrznych:

$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw}$$

zmiana pędu układu:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \sum_i \vec{F}_i^{zw} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}^{zw}$$

II Zasada Dynamiki

W oparciu o pojęcie środka masy możemy opisać ruch układu jako całości stosując równania ruchu punktu materialnego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**

współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego