



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Grawitacja

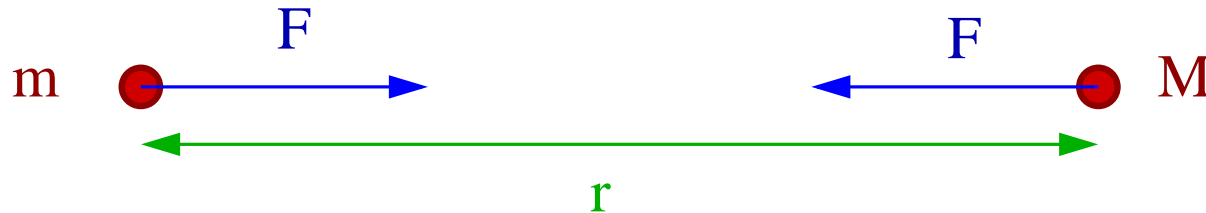
## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład XI:

- Prawo powszechnego ciążenia
- Ruch w polu siły centralnej
- Prawa Keplera
- Pole odpychające
- Doświadczenie Rutherforda
- Masa zredukowana

# Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia **Newtona (1687)**:

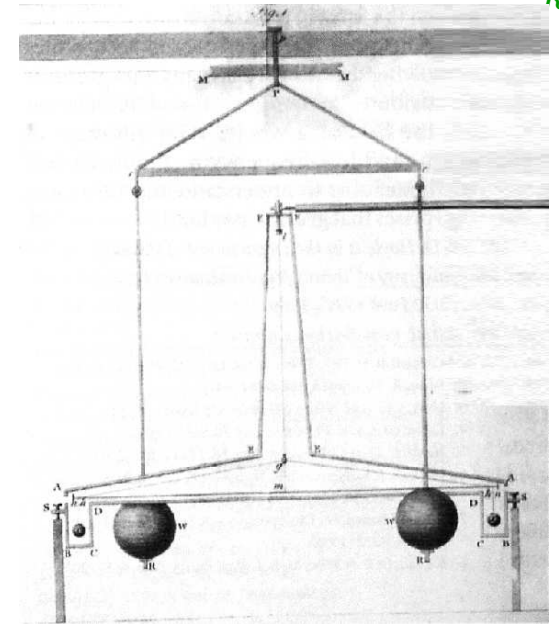
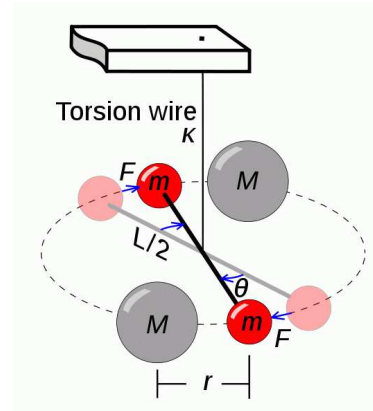


$$F = G \frac{m M}{r^2}$$

Opisuje zarówno spadanie jabłka z drzewa jak i ruchy Księżyca i planet.

Grawitacja jest opisywana przez jeden parametr, stałą Newtona:  $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

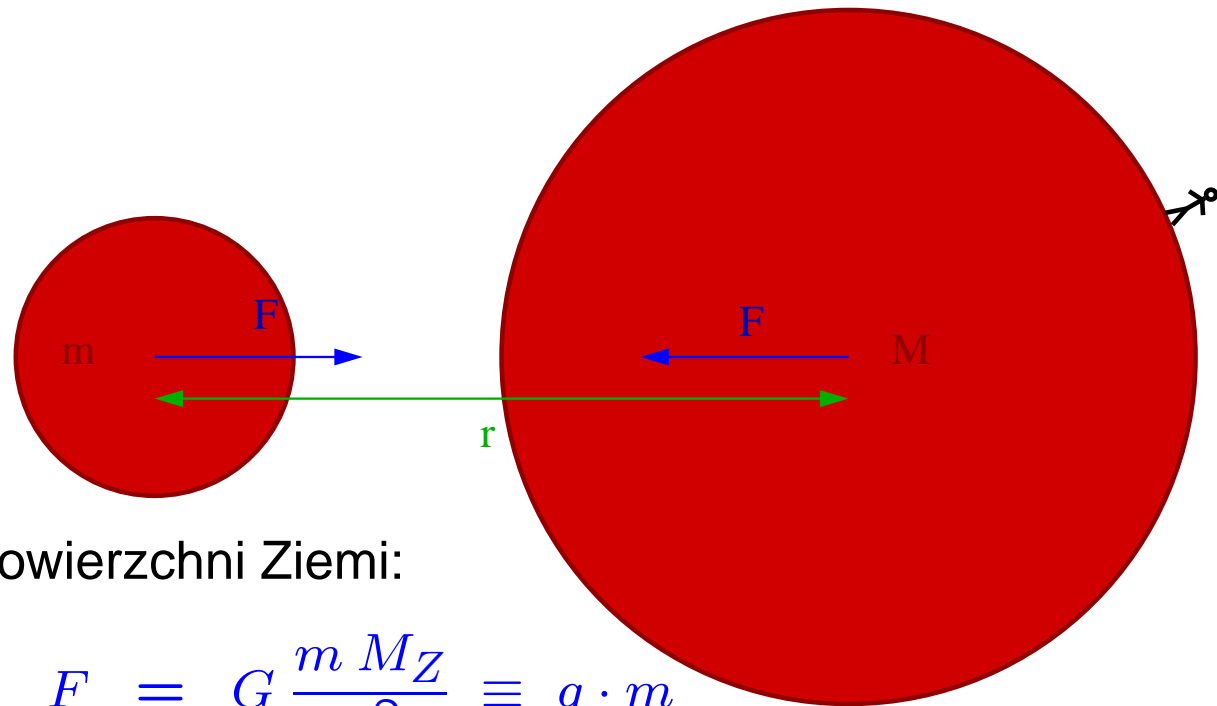
W warunkach laboratoryjnych potwierdzona przez doświadczenie **Cavendisha (1798)**, w którym zmierzył oddziaływanie kul ołowianych masach  $m = 0.73 \text{ kg}$  i  $M = 158 \text{ kg}$ .



# Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia sformułowane zostało dla mas punktowych.  
Ale stosuje się także dla oddziaływań ciał sferycznie symetrycznych

$$F = G \frac{m M}{r^2}$$



Siła ciążenia dla ciała przy powierzchni Ziemi:

$$F = G \frac{m M_Z}{R_Z^2} \equiv g \cdot m$$

$$\Rightarrow g = \frac{G M_Z}{R_Z^2}$$

# Ruch satelity

Satelita na orbicie kołowej o promieniu  $R$ .  
Siła grawitacji

$$F = G \frac{m M_Z}{R^2}$$

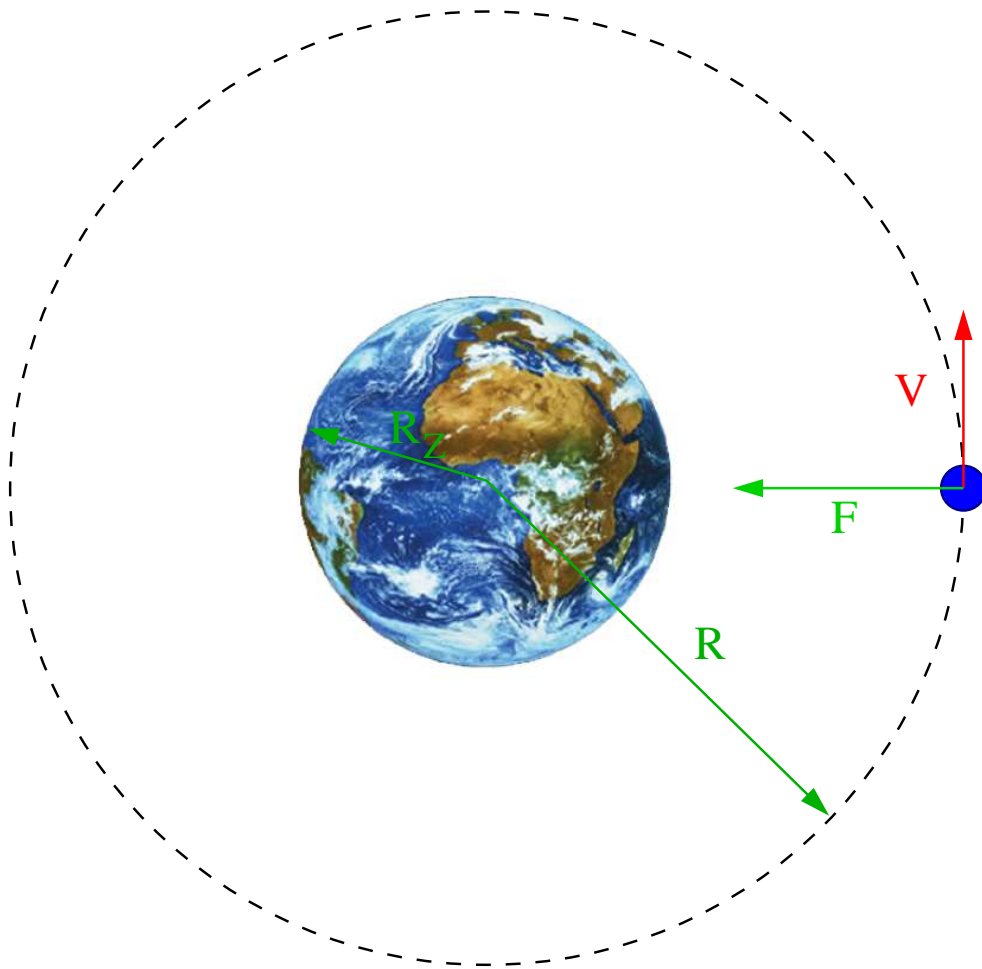
jest siłą dośrodkową, konieczną do utrzymania satelity na orbicie:

$$G \frac{m M_Z}{R^2} = m \frac{V^2}{R}$$
$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{G M_Z}{R}}$$

Pierwsza prędkość kosmiczna ( $R = R_Z$ ):

$$V_1 = 7.91 \text{ km/s}$$

prędkość pozioma konieczna do “oderwania” od Ziemi (zaniedbując jej ruch wirowy)



# Ruch satelity

Okres obiegu dookoła Ziemi:

$$T = \frac{2\pi R}{V}$$

Podstawiając wyrażenie na prędkość:

$$T = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{G M_Z}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{G M_Z}}$$

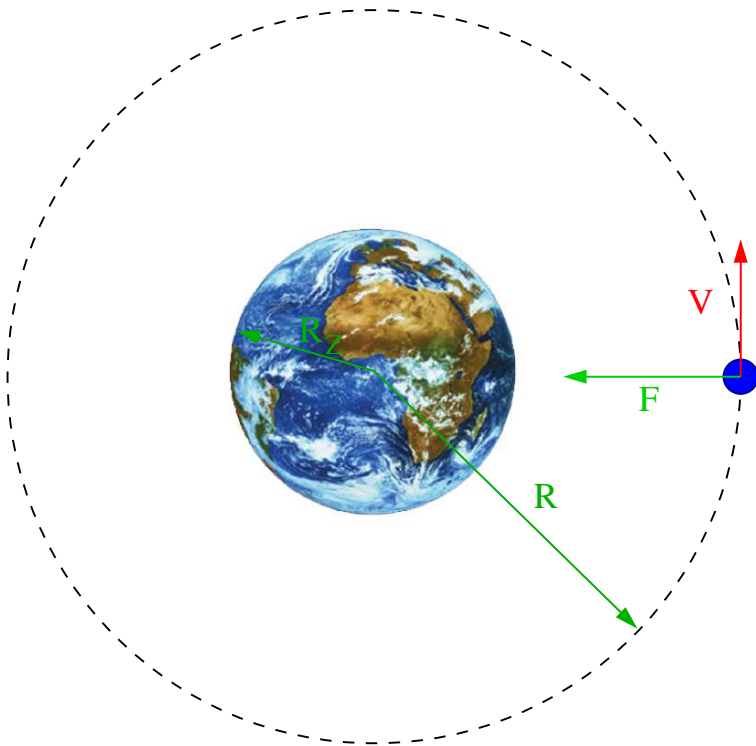
Im wyższa orbita tym dłuższy okres obiegu...

Odwracając tą zależność:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G M_Z T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{g R_Z^2 T^2}{4\pi^2}}$$

Dla okresu obiegu równego okresowi obrotu Ziemi ( $23^h 56^m 4.09^s$ ):

$$R = 42\,164 \text{ km} \quad \text{satelita geostacjonarny}$$



# Prawo powszechnego ciążenia

Siła grawitacji (jak każda siła centralna) jest zachowawcza:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} -F(r) \cdot dr = -\Delta E_p$$

$$\Rightarrow \Delta E_p = \int_{r_A}^{r_B} G \frac{M m}{r^2} \cdot dr = \left[ -\frac{G M m}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

Energia potencjalna masy  $m$  w polu grawitacyjnym masy  $M$ :

$$E_p(r) = -\frac{G M m}{r} + C$$

określona z dokładnością do stałej.

Zwyczajowo przyjmuje się  $C = 0$ , co jest równoważne ustaleniu

$$E_p(\infty) = 0$$

# Siła centralna

Rozważmy przypadek ogólny ruchu punktu materialnego o masie  $m$

w polu centralnej siły zachowawczej  $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$

⇒ zasada zachowania energii:  $E = \frac{mv^2}{2} + E_p(r) = \text{const}$

⇒ zasada zachowania momentu pędu:  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const}$

Zachowanie momentu pędu ⇒ ruch płaski (w płaszczyźnie  $\vec{r}$  i  $\vec{v}$ )

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{i}_r \cdot \frac{dr}{dt} + \vec{i}_\theta \cdot r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \omega^2$$

$$L = m r^2 \omega \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2$$

Wstawiając do wyrażenia na energię kinetyczną

$$E = E_k + E_p = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r) = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{\text{eff}}(r)$$

⇒ równanie różniczkowe dla składowej radialnej ⇒ problem jednowymiarowy

# Siła centralna

## Energia efektywna

“Efektywna” energia potencjalna w polu siły centralnej:

$$E_p^{eff}(r) = \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

“energia  
odśrodkowa”

Jeśli  $L \neq 0$  to zasada **zachowania momentu pędu**

“przeciwstawia się” zbliżeniu ciała do źródła siły ( $r = 0$ ).

**bariera centryfugalna**

“energia odśrodkowa”  $\Leftrightarrow$  siła odśrodkowa

$$F_o = -\frac{d}{dr} \left( \frac{L^2}{2 m r^2} \right) = \frac{L^2}{m r^3} = m r \omega^2 = m r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$



# Siła centralna

## Ruch radialny

Jednowymiarowe zagadnienie ruchu radialnego:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}$$

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r'))}}$$

$$E_p^{eff}(r) = \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

Ruch może się odbywać tylko w obszarze  $E - E_p^{eff}(r) \geq 0$

⇒ dla  $L \neq 0$  istnieje ograniczenie na odległość najmniejszego zbliżenia:  $r \geq r_{min}$

teoretycznie można wymyśleć siłę centralną silniejszą od siły odśrodkowej

⇒ jeśli  $E < E_p^{eff}(\infty)$  to ciało nie może dowolnie oddalić się od centrum siły:  $r \leq r_{max}$

⇒ ruch w ograniczonym obszarze

# Siła centralna

## Ruch kątowy

Zachowany moment pędu:  $L = m r^2 \omega$

$$\Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{L}{m r^2} dt'$$

Możemy wyprowadzić równanie na tor ciała porównując zależności od czasu:

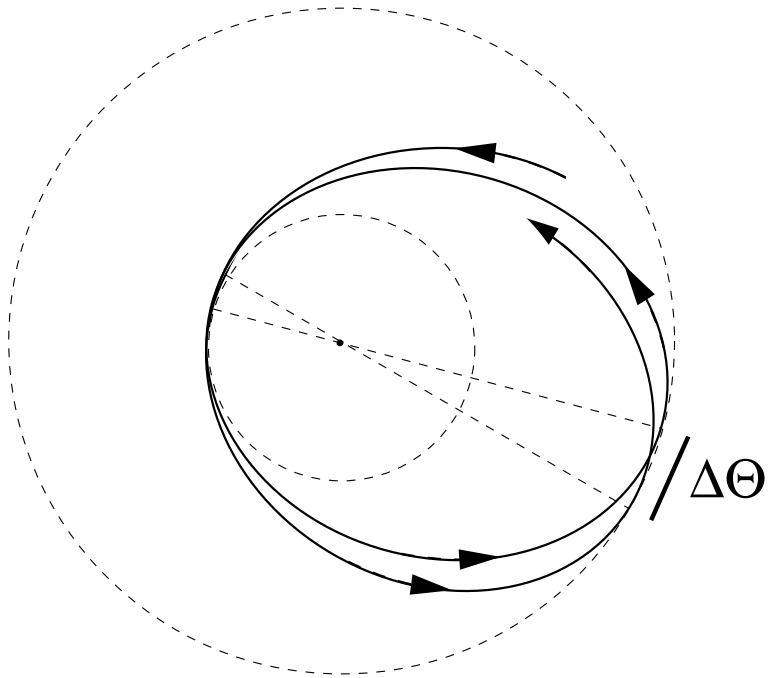
$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}} = \frac{m r^2}{L} d\theta$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \int \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}}$$

równanie toru we współrzędnych biegunowych

# Siła centralna

## Ruch kątowy



Zmiana kąta biegunowego przy przejściu ciała od  $r_{min}$  do  $r_{max}$

$$\Delta\theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}}$$

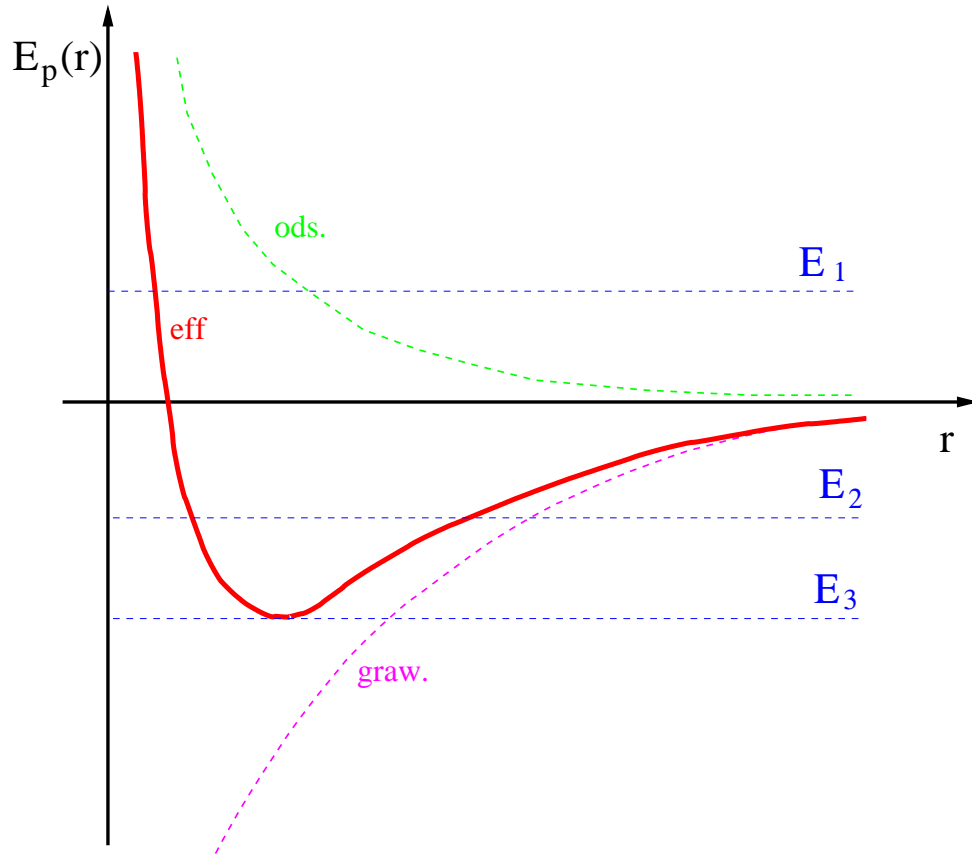
Tor będzie krzywą zamkniętą, jeśli  $\Delta\theta = 2\pi \frac{m}{n}$   
 $m, n$  - liczby całkowite

Warunek ten spełniony jest tylko dla dwóch pól:  
(niezależnie od warunków początkowych)

- $E_p(r) \sim \frac{1}{r}$  - siła grawitacyjna, siła kulombowska  
( $\Delta\theta = \pi$ )
- $E_p(r) \sim r^2$  - siły sprężystości ( $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ )

# Ruch w polu grawitacyjnym

energia efektywna



## Pole grawitacyjne

Ogólne wyrażenie na energię potencjalną:

$$E_p(r) = -\frac{k}{r}$$

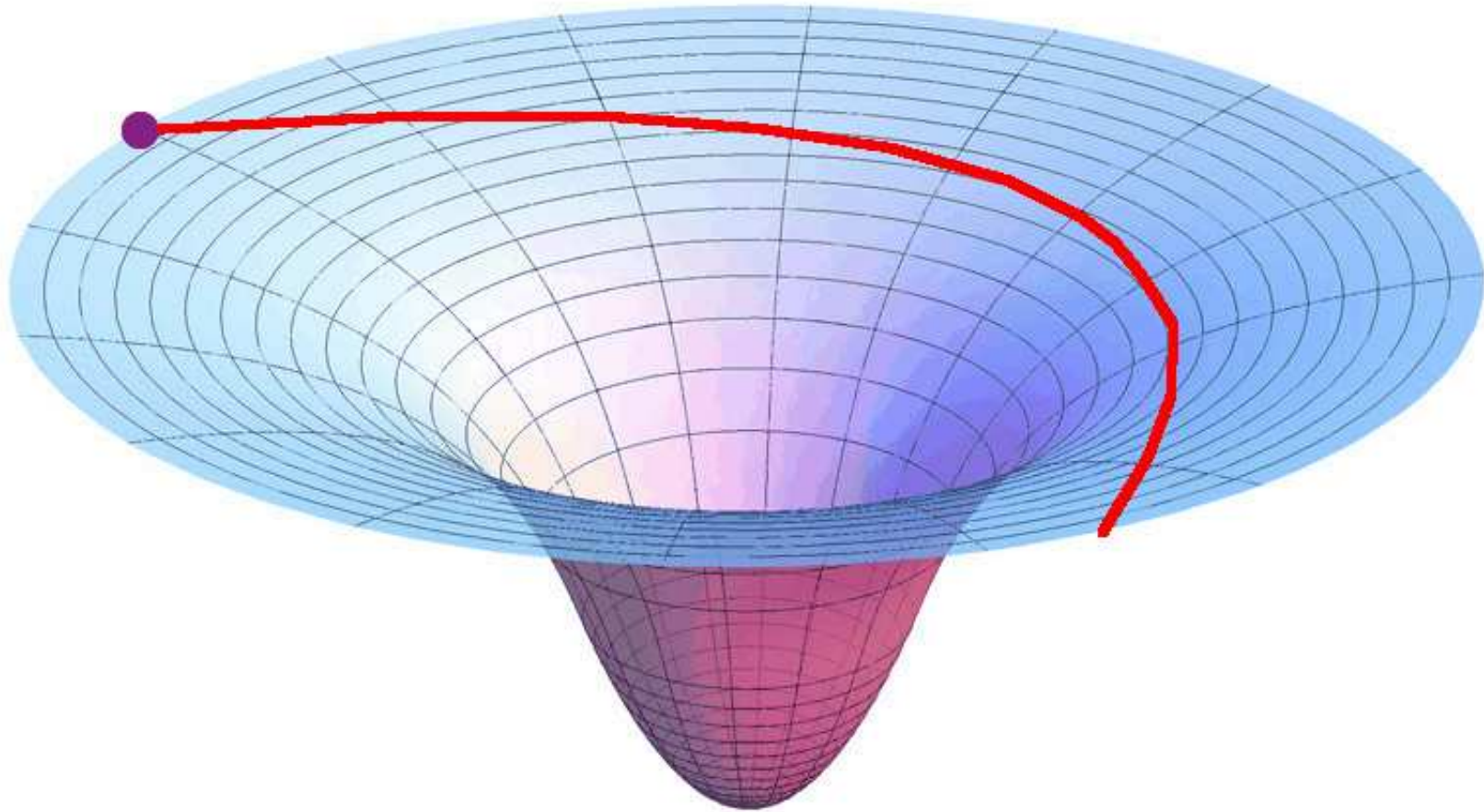
$k > 0 \Rightarrow$  siła przyciągająca  
wybieramy  $E_p(\infty) = 0$

Charakter ruchu zależy od energii całkowitej:

- $E_1 > 0$  - tor otwarty
- $E_2 < 0$  - tor zamknięty
- $E_3 = E_{min}$  - ruch po okręgu

# Ruch w polu grawitacyjnym

## Model



Dwuwymiarowy ruch ciała po zakrzywionej powierzchni.

Profil wysokości odpowiada energii potencjalnej pola:  $h(x, y) \sim E_p(r)$

# Ruch w polu grawitacyjnym

## Równanie toru

Rozwiązujemy:

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \int \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}} = \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2m}{L^2} \left( E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}}\end{aligned}$$

Gdzie wprowadziliśmy parametry:  $p = \frac{L^2}{mk}$  oraz  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

Otrzymaliśmy całkę postaci:

$$- \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos(x) \quad \implies \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

# Ruch w polu grawitacyjnym

## Równanie toru

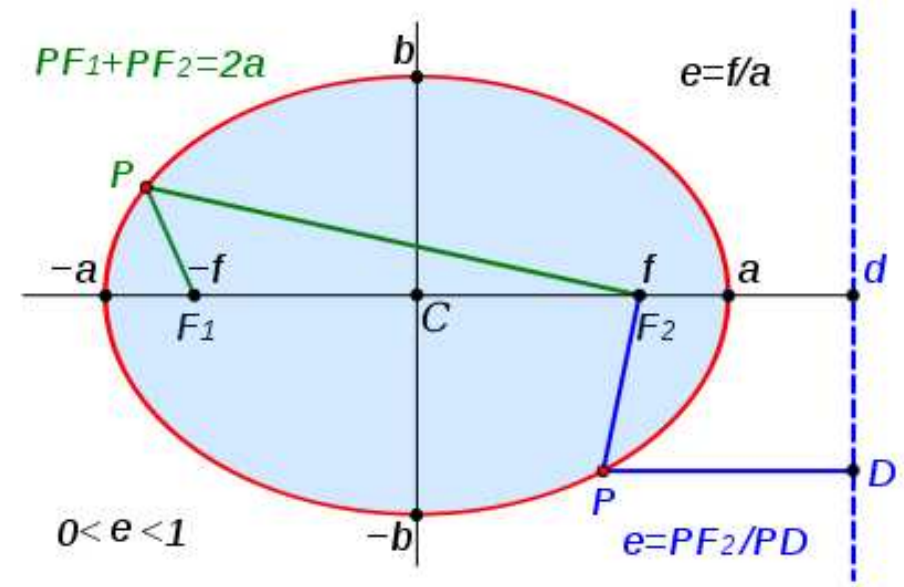
Otrzymaliśmy równanie **krzywej stożkowej**  
(we współrzędnych biegunowych)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

$\varepsilon$  - mimośród orbity

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \quad p = \frac{L^2}{mk}$$

- $\varepsilon = 0$  - ruch po **okręgu**  
o promieniu  $p$
- $\varepsilon < 1$  - ruch po **elipsie**  $E < 0$
- $\varepsilon = 1$  - ruch po **paraboli**  $E = 0$
- $\varepsilon > 1$  - ruch po **hiperboli**  $E > 0$

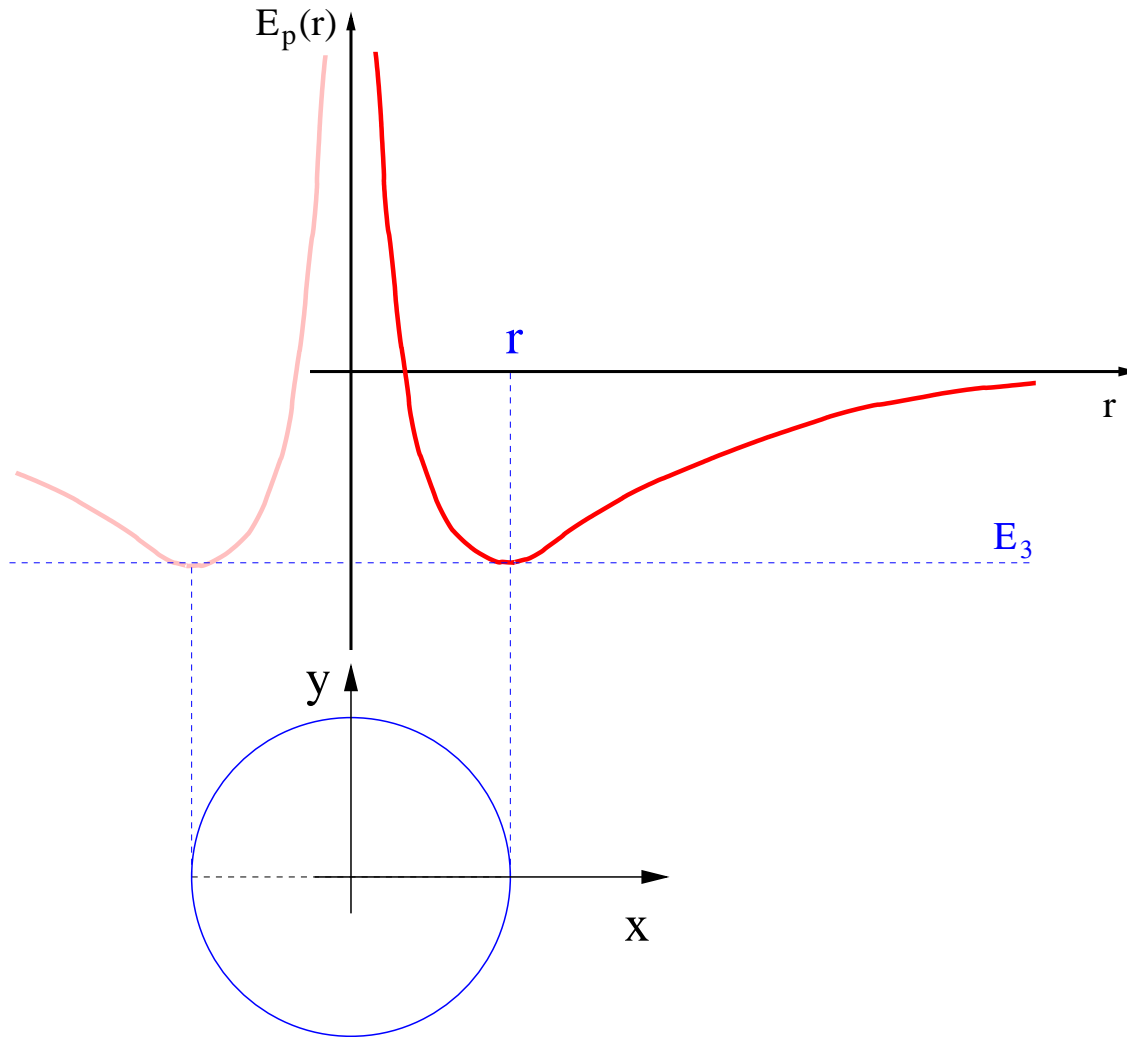


Osie elipsy:

- $2a = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$   
- zależy tylko od energii
- $2b = \frac{2p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$   
- zależy także od momentu pędu

# Ruch w polu grawitacyjnym

## Ruch po okręgu



Przypadek szczególny:  $\varepsilon = 0$

$$E = E_{min} = -\frac{m k^2}{2 L^2}$$

minimalna energia całkowita  
przy ustalonym  $L$

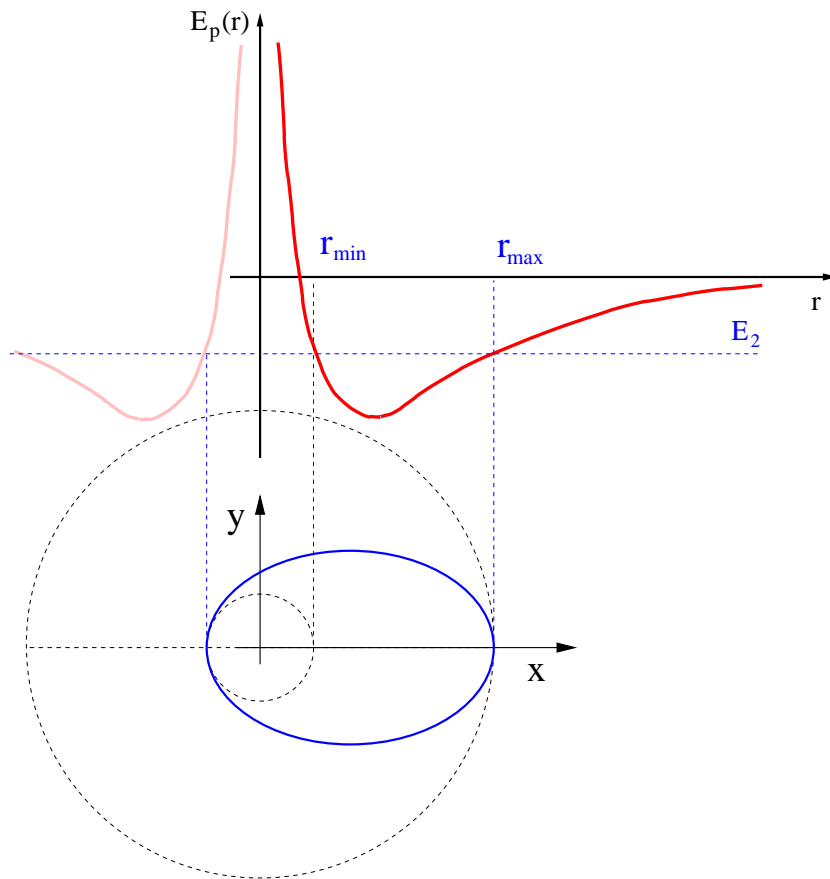
Inny przypadek szczególny:

Dla  $L = 0$  mamy ruch po odcinku  
o długości  $2a = \frac{k}{2|E|}$ ;  $b = 0$



# Ruch w polu grawitacyjnym

## Ruch po elipsie

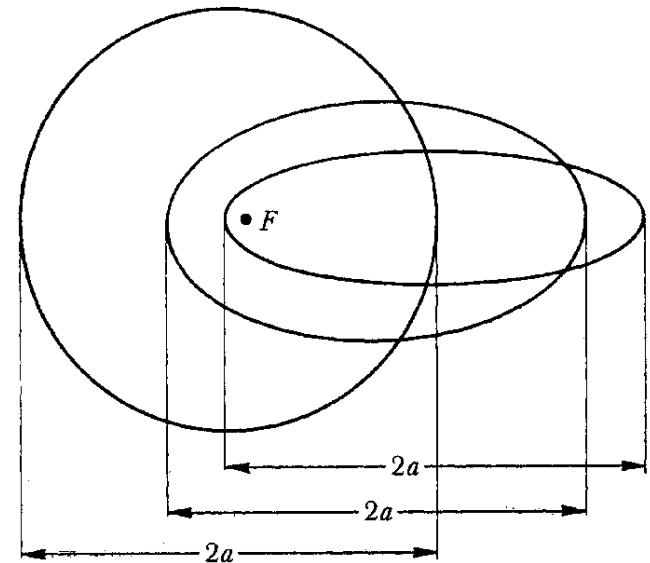


Warunek:  $E_{min} < E < 0$

Ruch ograniczony do:  $r_{min} < r < r_{max}$   
 $E_p^{eff}(r_{min}) = E_p^{eff}(r_{max}) = E$

Źródło siły znajduje się w jednym z ognisk elipsy.

Długa półoś zależy wyłącznie od energii;  
“spłaszczenie” zależy od momentu pędu



# Ruch w polu grawitacyjnym

## Prawa Keplera

- I. Każda planeta krąży po elipsie ze Słońcem w jednym z jej ognisk
- II. Promień wodzący każdej planety zakreśla równe pola w równych czasach
- III. Kwadrat okresu obiegu każdej planety wokół Słońca jest proporcjonalny do sześciangu półosi wielkiej elipsy

Okres obiegu możemy wyznaczyć z prędkości polowej  $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$ ,  $2a = \frac{k}{2|E|}$ ,  $2b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$

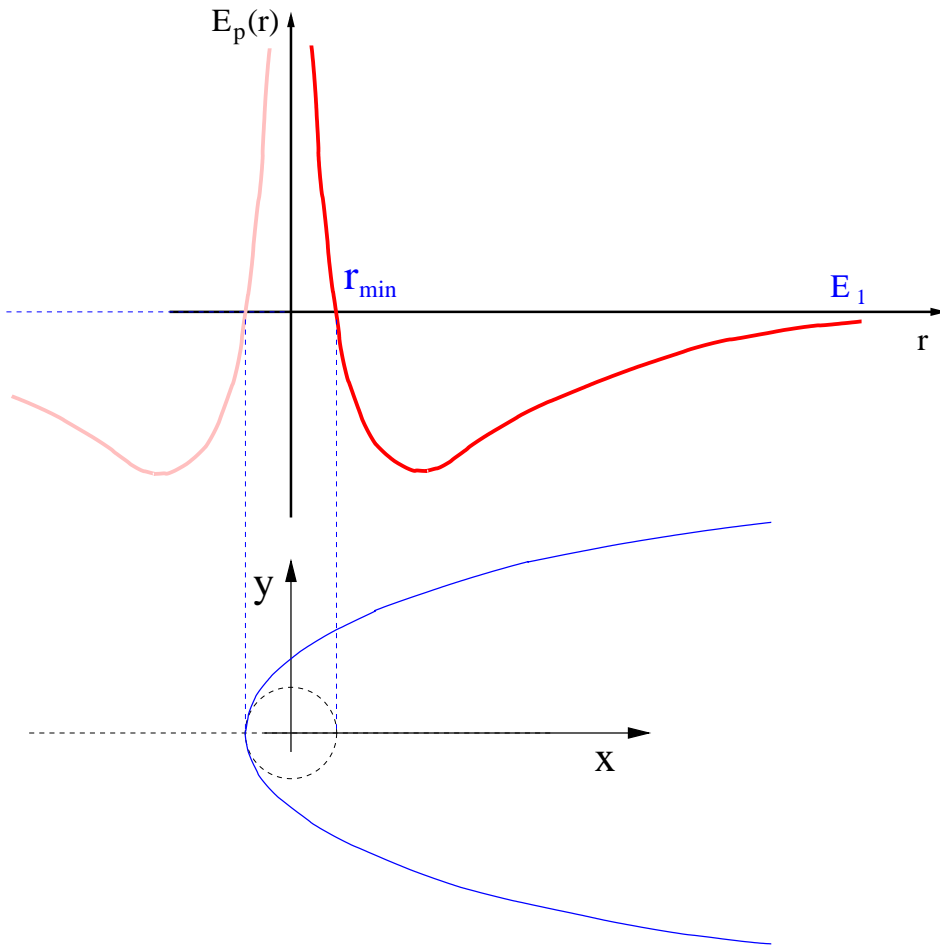
$$T = \frac{S}{\left(\frac{dS}{dt}\right)} = \frac{\pi a b}{\frac{L}{2m}} = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Podnosząc do kwadratu

$$T^2 = \frac{\pi^2 k^2 m}{2|E|^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} \cdot a^3$$

# Ruch w polu grawitacyjnym

## Ruch po paraboli



Przypadek szczególny:  $E = 0$

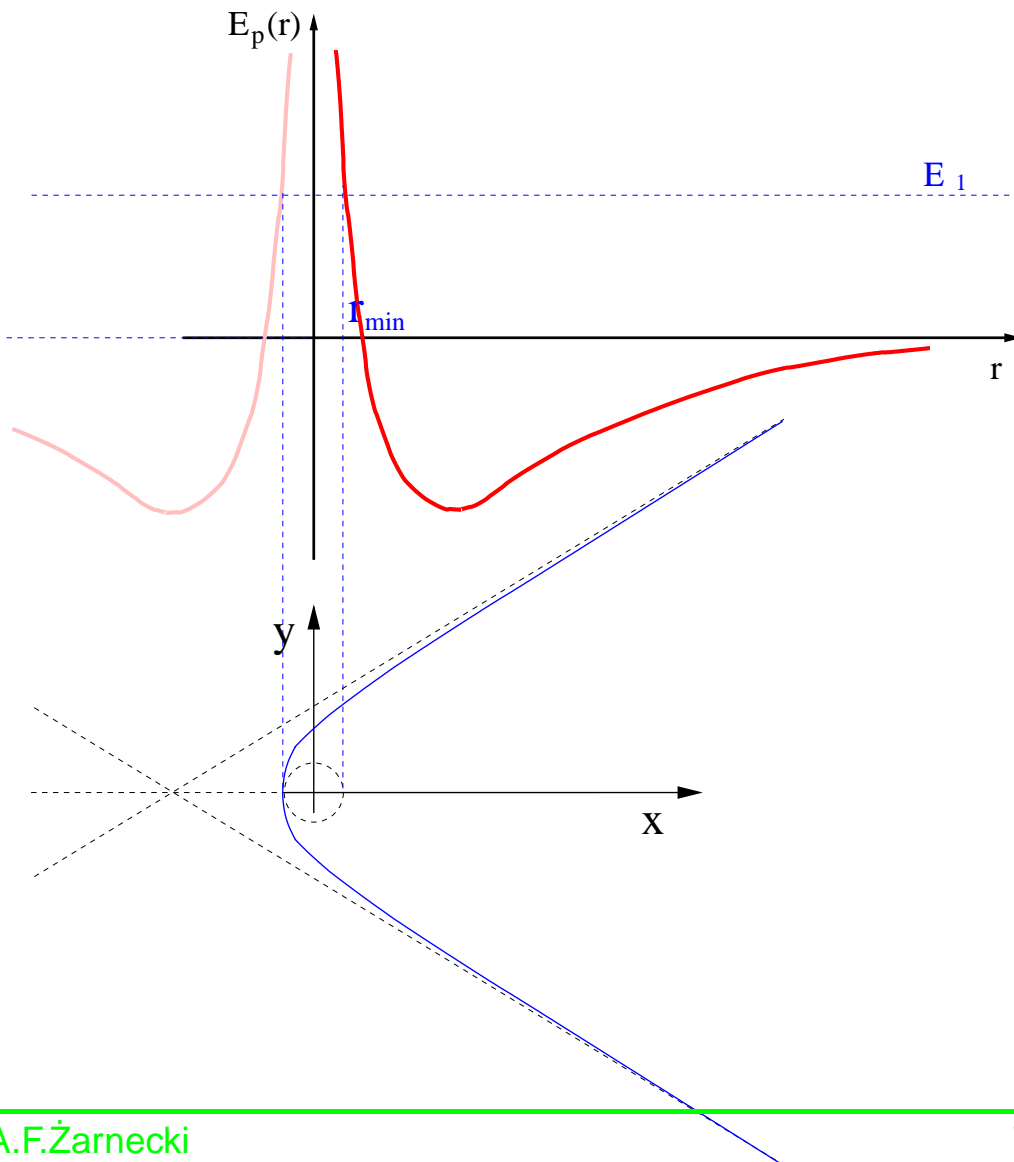
Ruch jest nieskończony,  
ciało nie jest związane przez centrum siły.

Jednak oddalając się do nieskończoności  
ciało będzie poruszać się coraz wolniej.

Asymptotycznie zatrzyma się.

# Ruch w polu grawitacyjnym

## Ruch po hiperboli



Dla  $E > 0$

Ruch jest nieskończony.

Asymptotycznie prędkość ciała dąży do

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2E}{m}} > 0$$

orbity komet nieperiodycznych

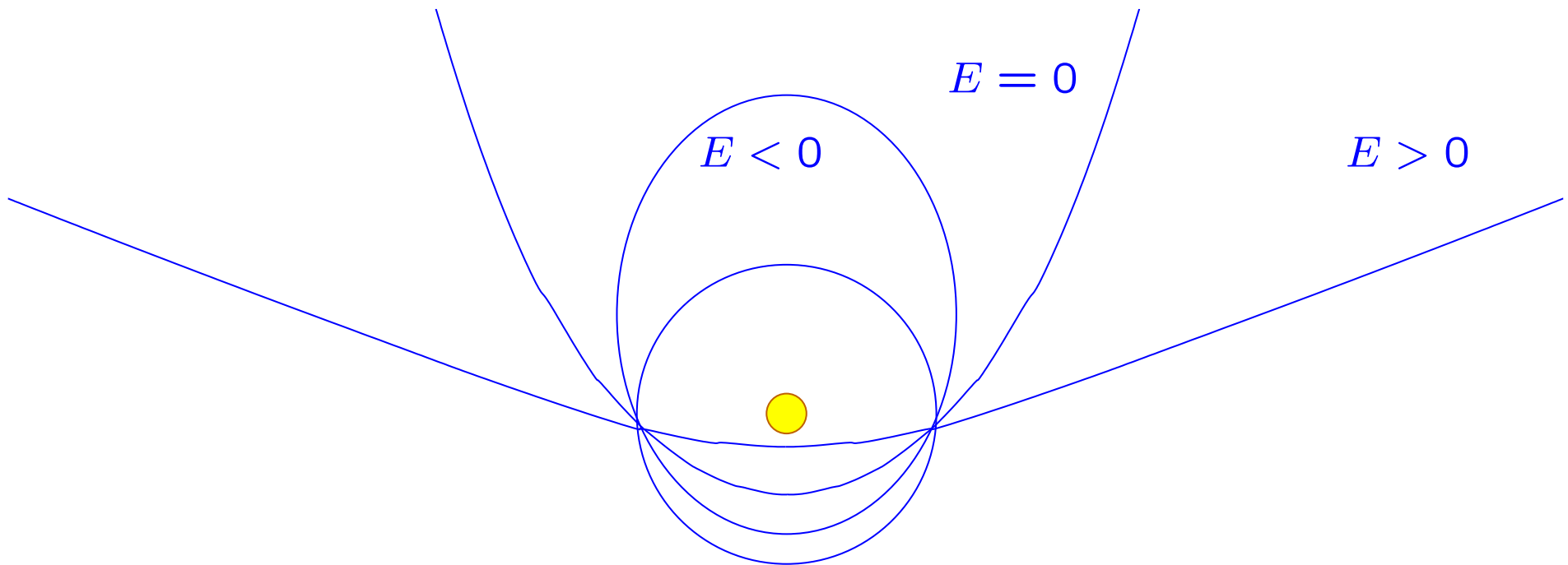
Im mniejsze  $L$   
tym mniejsza odległość zbliżenia  $r_{min}$

# Ruch w polu grawitacyjnym

## Rodzaje orbit

Kształt orbity zależy od energii całkowitej  $E$  i momentu pędu ciała  $L$

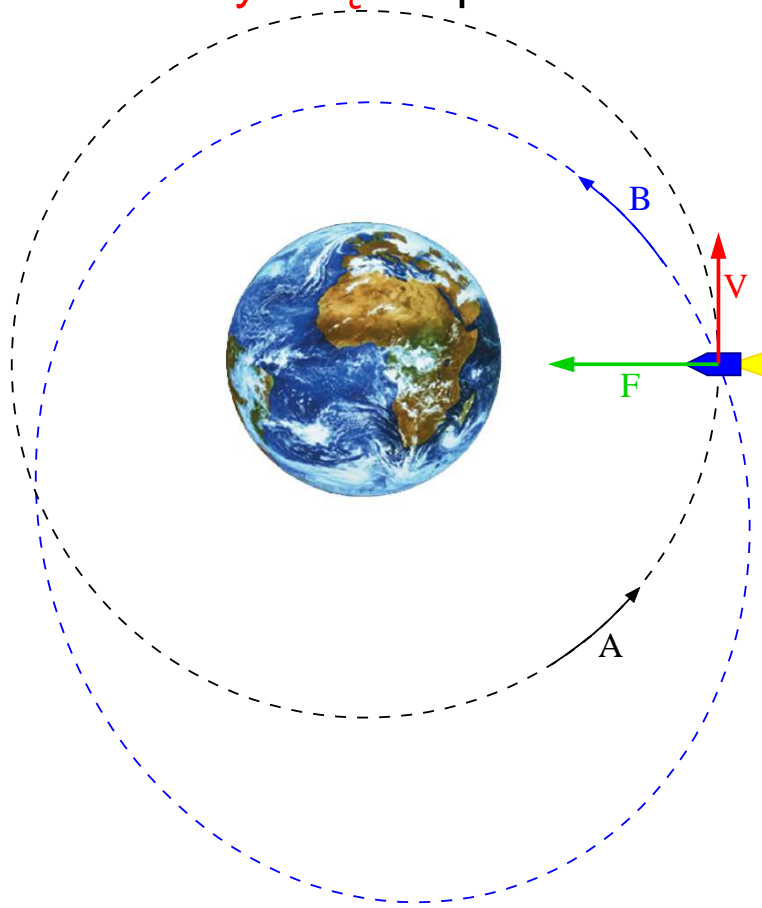
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$



Orbity o tej samej wartości  $L$ , lecz o różnych wartościach  $E$

# Ruch satelity

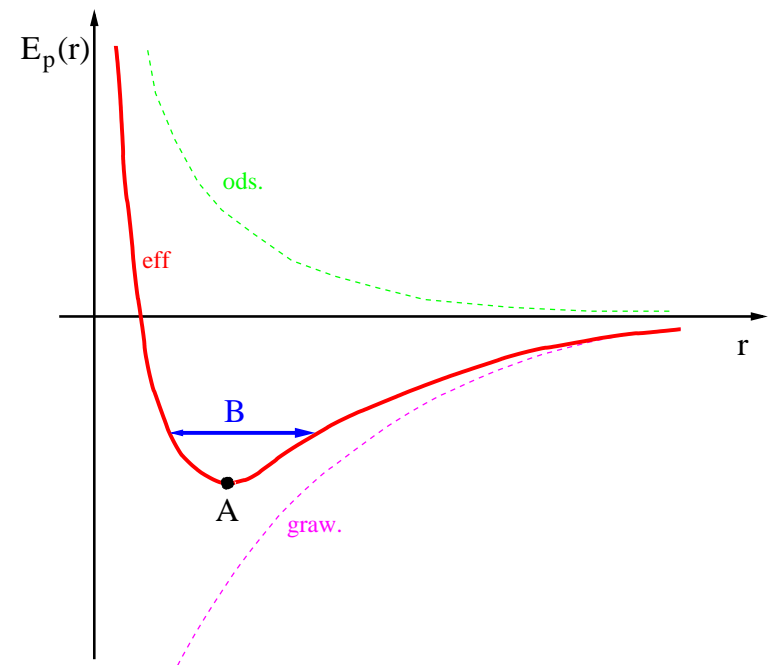
Jak powinien się zachować kosmonauta w rakiecie na orbicie kołowej, jeśli chce zbliżyć się do powierzchni Ziemi?



Odpalenie silników w kierunku Ziemi daje efekt przeciwny do zamierzonego!

$L = const$ ,  $E$  rośnie

$\Rightarrow$  Średnia odległość od Ziemi rośnie!

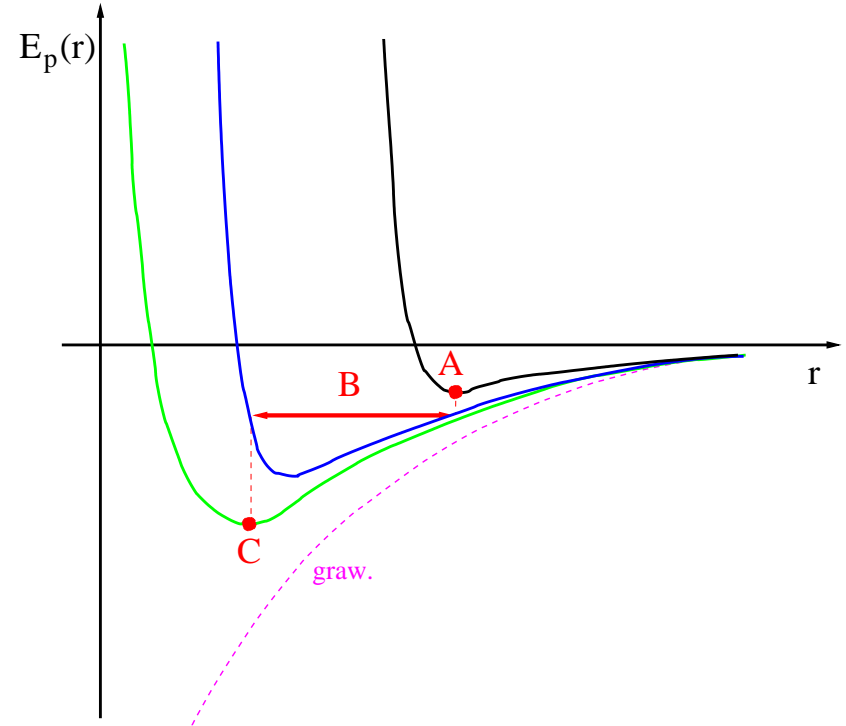
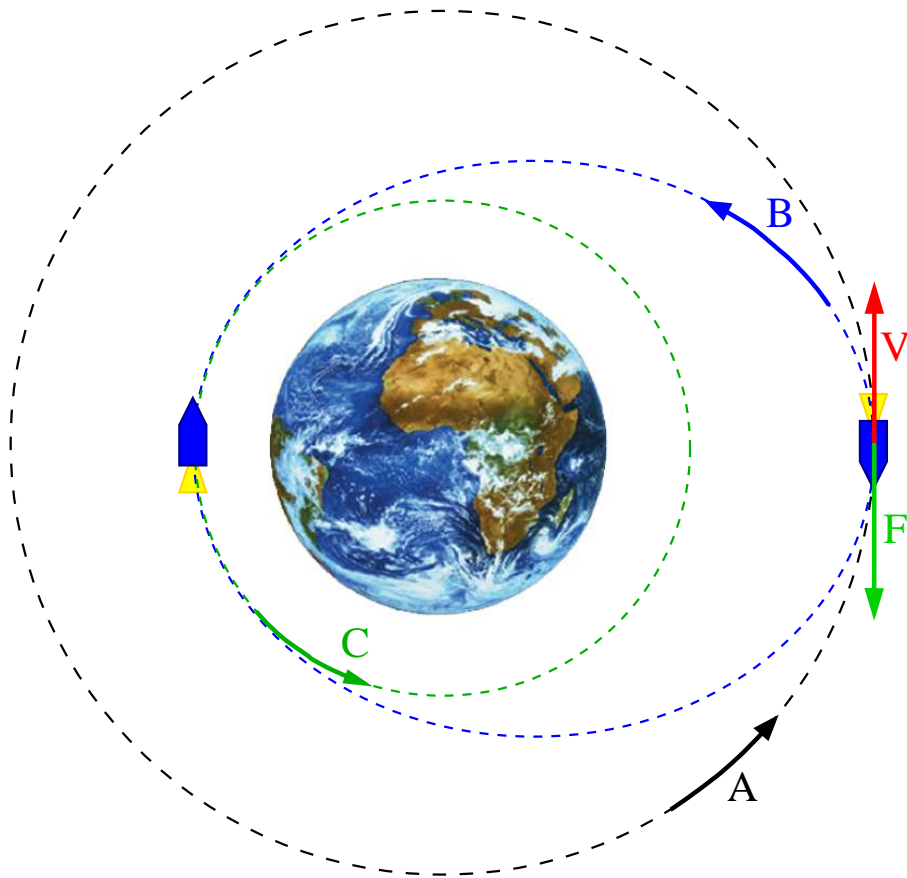


# Ruch satelity

Lepszym sposobem na przejście na niższą orbitę jest włączenie silników **hamujących**

*L* maleje, *E* maleje

⇒ Średnia odległość od Ziemi maleje



Powtórne hamowanie po połowie obiegu umożliwia przejście na niższą orbitę kołową.

# Ruch w polu sił

## Potencjał odpychający

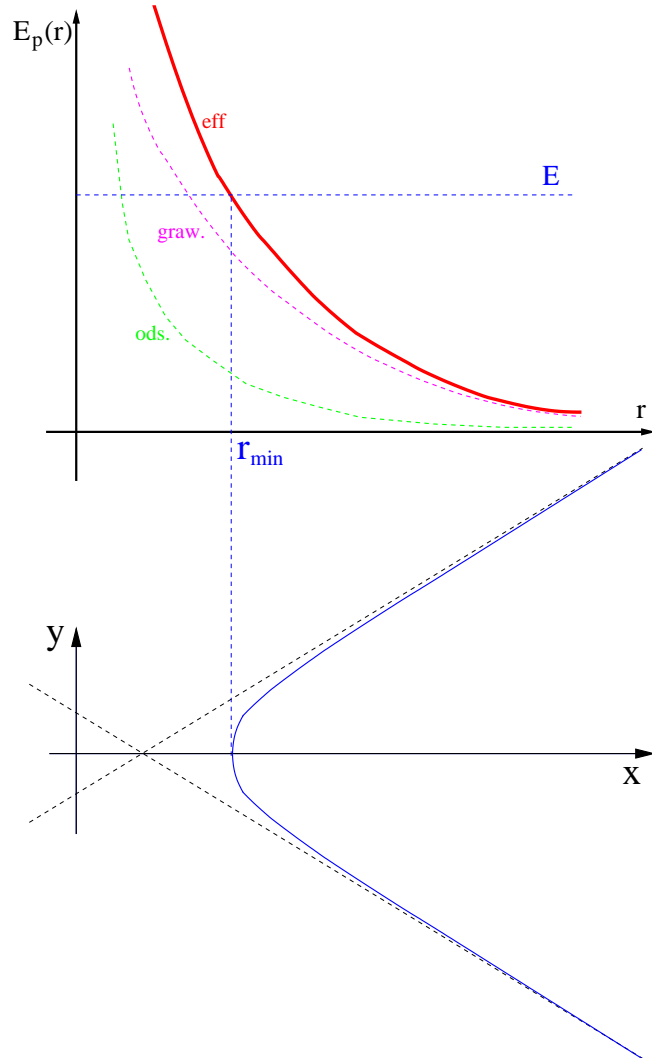
$$E_p(r) = +\frac{k}{r} \quad k > 0$$





# Ruch w polu sił

## Potencjał odpychający



Uzyskane rozwiązanie pozostaje słuszne, z dokładnością do zmiany znaku  $k \Rightarrow$  zmiana znaku  $p$

$$r(\theta) = \frac{p}{\varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

Jak poprzednio  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

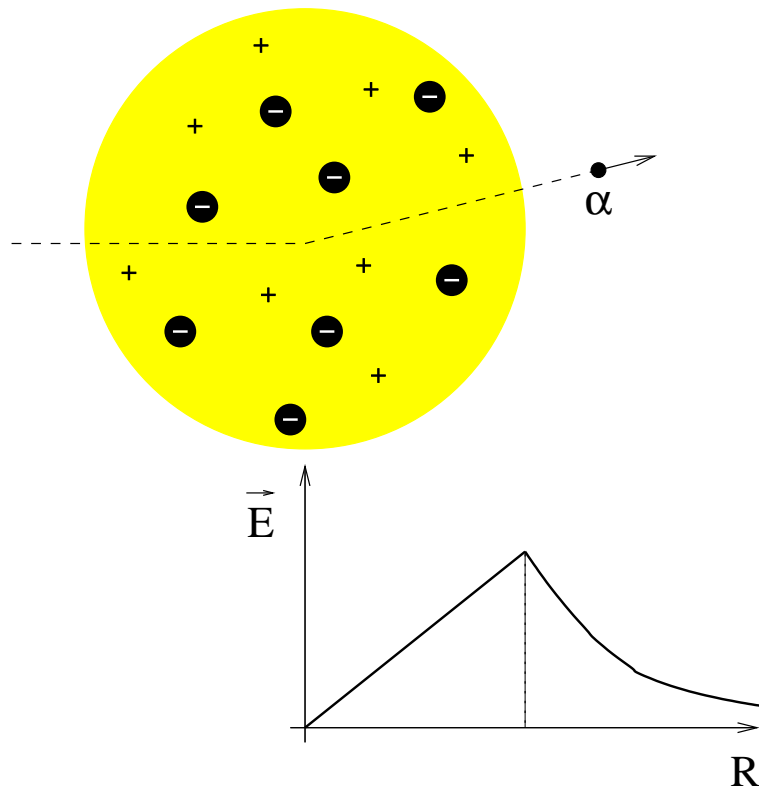
Teraz jednak zawsze  $E > 0$

Im większe  $\varepsilon$ , tym większy kąt rozwarcia hiperboli

# Doświadczenie Rutherforda

## Model Thomson

Po odkryciu elektronu (1897), J.J.Thomson zaproponował model atomu w postaci “ciastka z rodzynkami”.



Cała objętość atomu była jednorodnie naładowana dodatnio (“ciastko”), a wewnątrz “pływały” elektrony (“rodzynki”).

Ponieważ ładunek był rozłożony równomiernie w dużej objętości, nie powinien silnie zakłócać ruchu przechodzący cząstek  $\alpha$ .

Oczekujemy jedynie niewielkich odchyień toru...

Wpływ elektronów można zaniedbać ze względu na małą masę.

# Doświadczenie Rutherforda

W modelu Thomsona można było oszacować maksymalny kąt rozproszenia cząstki  $\alpha$  i był on mały  $\theta^{max} \ll \pi$ .

Odpowiada to sytuacji rozproszenia “pocisku” na dużo lżejszej “tarczy”.

Masa przypadająca na jednostkę “rozmytego” ładunku atomu wynosiła ok.  $\frac{1}{8}$  masy cząstki  $\alpha$ .

## Doświadczenie Rutherforda

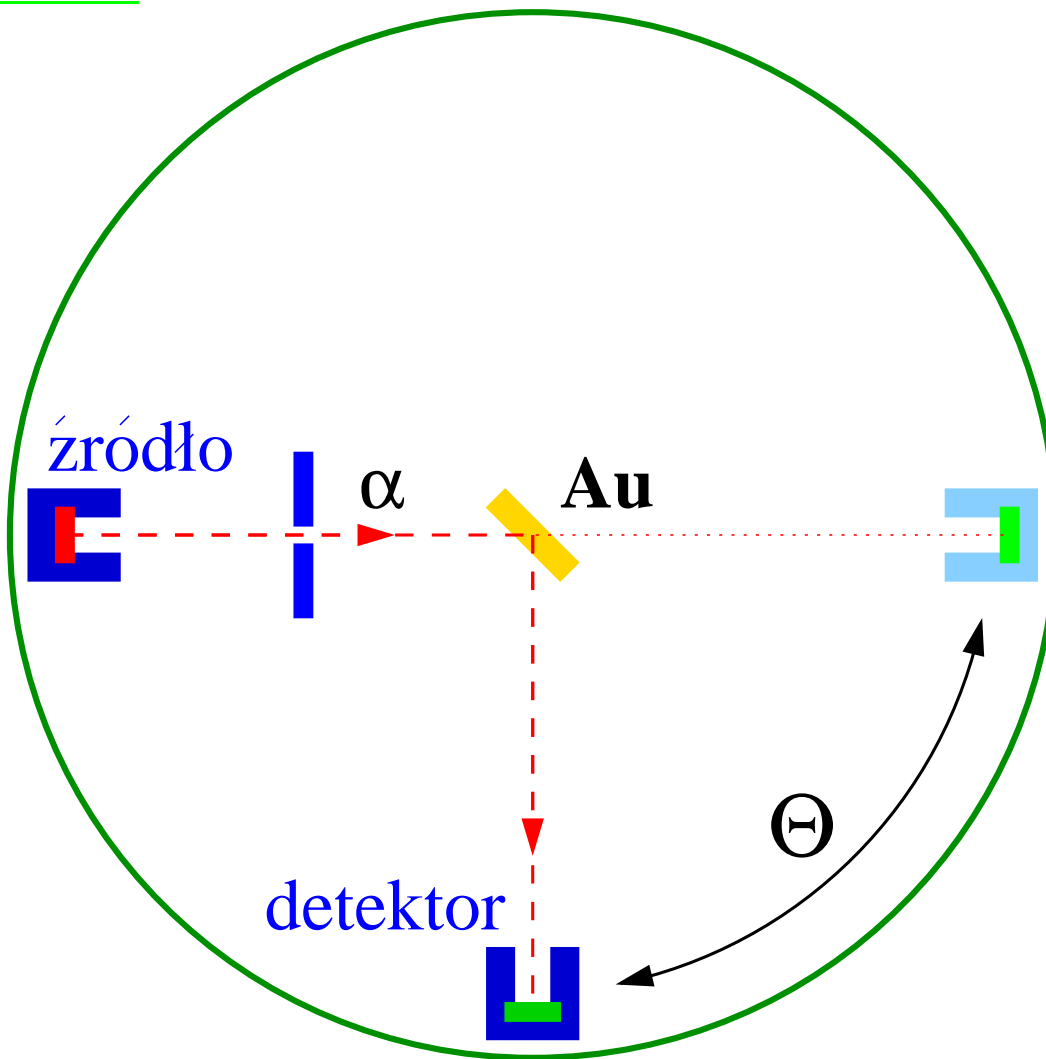
Rozpraszanie cząstek  $\alpha$  na cienkiej złotej folii



Obserwowano błyski wywoływane przez padające cząstki na ekranie scyntylacyjnym

# Doświadczenie Rutherforda

## Pokaz



Przed wsunięciem tarczy cząstki  $\alpha$  obserwujemy tylko dla  $\Theta \approx 0$ .

Wiązka cząstek ze źródła jest dobrze skolimowana.

Oddziaływanie z tarczą zmniejsza strumień cząstek lecących “do przodu” ( $\Theta \approx 0$ )

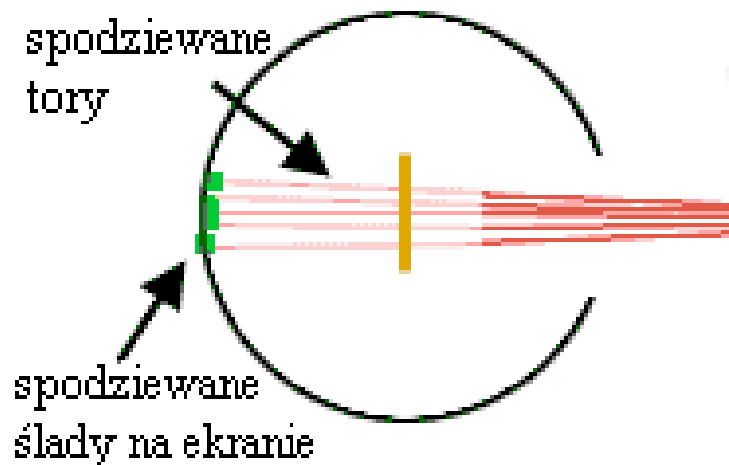
Rozproszone cząstki  $\alpha$  obserwujemy w szerokim zakresie kątów rozproszenia, także dla  $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

# Doświadczenie Rutherforda

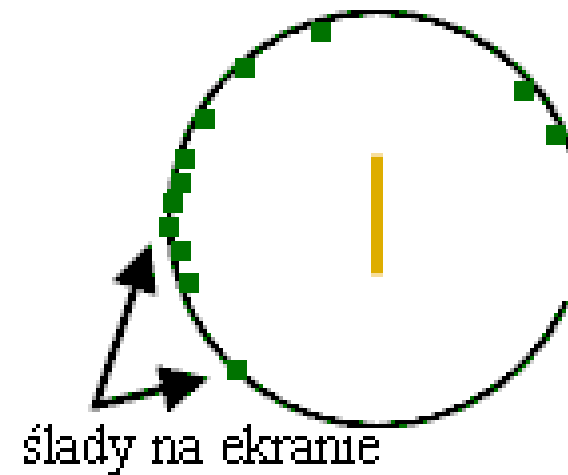
## Wyniki pomiarów

Przeprowadzonych przez H.Geigera i E.Marsdena (1911):

**Oczekiwane**



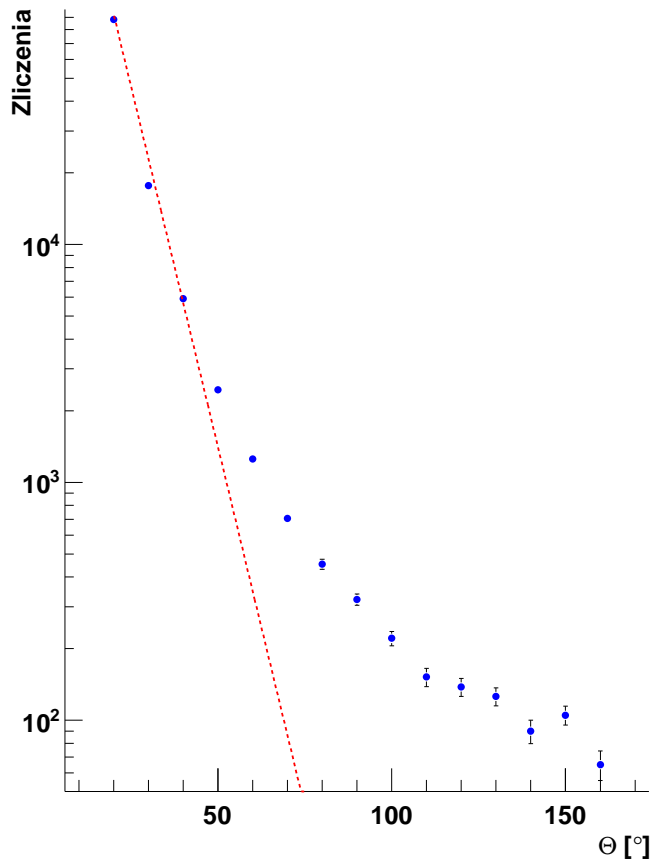
**Uzyskane**



# Doświadczenie Rutherforda

## Wyniki pomiarów

Przeprowadzonych przez  
H.Geigera i E.Marsdena:



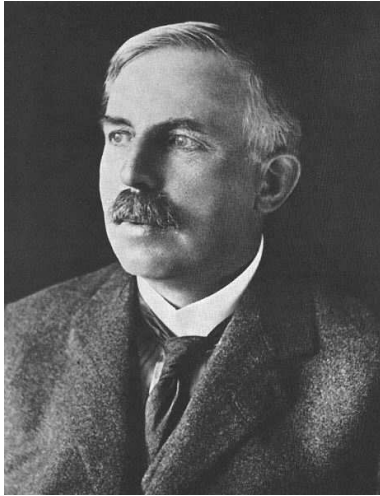
Zaobserwowano rozproszenia cząstek  $\alpha$  pod bardzo dużymi kątami,  $\theta \gg \theta_{Th}^{max}$ , czego nie można było wyjaśnić w modelu Thomsona

*“To było tak jakbyście wystrzelili piętnastocalowy pocisk w kierunku kawałka bibułki, a on odbił się i was uderzył.”*

E. Rutherford

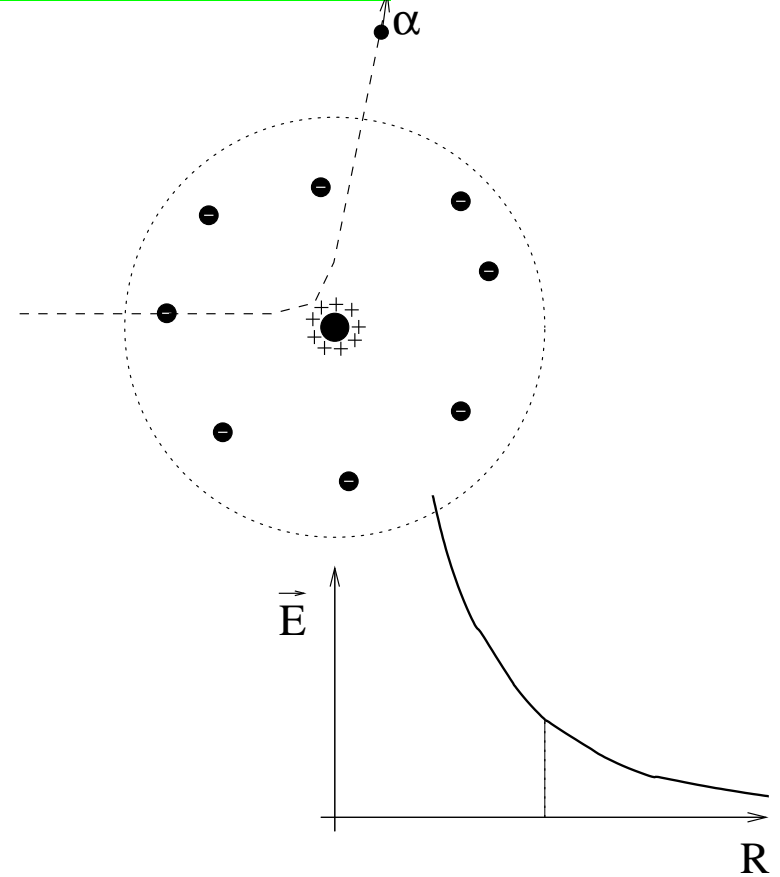
# Doświadczenie Rutherforda

## Model Rutherforda



Rutherford zaproponował  
jądrowy model atomu.

Cały dodatni ładunek atomu ( $10^{-10}$  m)  
skupiony jest w praktycznie **punktowym**  
( $10^{-14}$  m) **jądrze**



Przechodząca cząstka zawsze czuje cały  
ładunek dodatni  $\Rightarrow$  kąty rozproszenia są  
dużo większe.

# Doświadczenie Rutherforda

## Model Rutherforda

Ponieważ cząstka  $\alpha$  rozprasza się na jądrze jako całości, a masa jądra  $M_{Au} \gg M_{\alpha}$

⇒ brak ograniczeń na kąt rozproszenia cząstki  $\alpha$

możliwe nawet (choć mało prawdopodobne) rozproszenie o  $\theta > \pi/2$ .

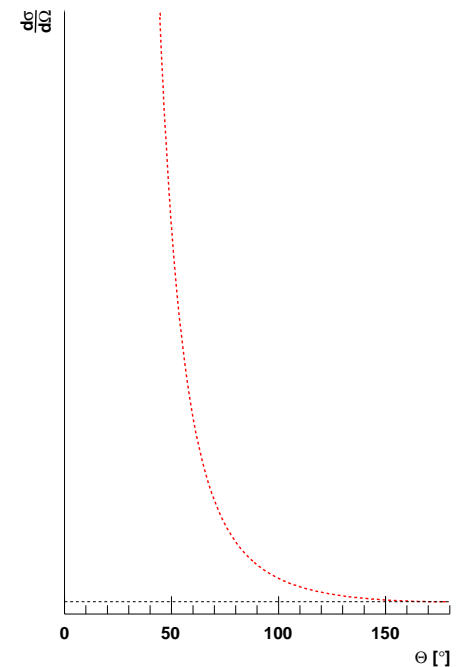
## Rozkład kątowy

Obserwowany rozkład kątowy rozproszonych cząstek  $\alpha$   
proporcjonalna do tzw. różniczkowego przekroju czynnego

$$N(\theta) \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Wzór Rutherforda

Skończone prawdopodobieństwo rozproszenia  $\theta = \pi$  !





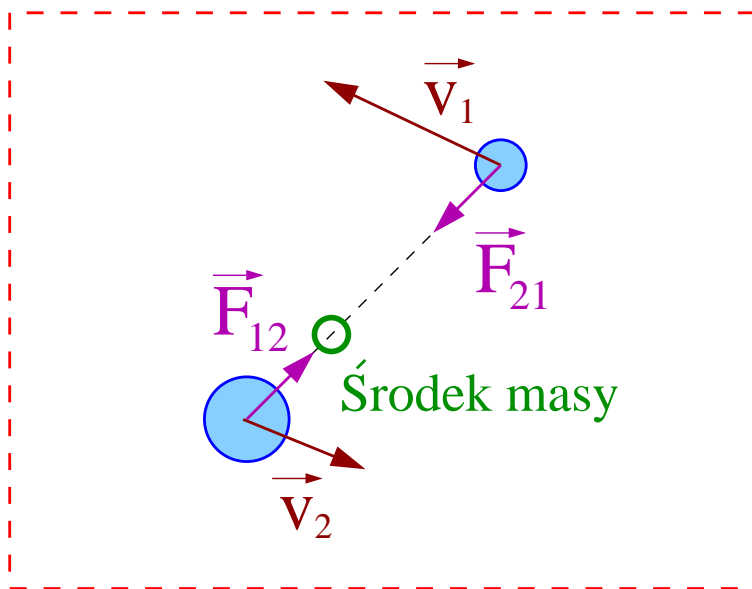
# Oddziaływanie dwóch ciał

## Ruch względny

Dotychczasowe rozważania prowadziliśmy przyjmując, że centrum siły jest nieruchome. Odpowiada to założeniu, że

$$M_{S\text{lonca}} \gg M_{Ziemi} \quad \text{lub} \quad M_{Ziemi} \gg M_{S\text{atelity}}$$

Układ izolowany + III zasada dynamiki  $\Rightarrow m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$



Względne położenie (np. ciała 2 względem 1):

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Względna prędkość:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt}$$

Przyspieszenie względne:

$$\vec{a}_{12} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \frac{m_2}{m_1} \vec{a}_2$$

# Oddziaływanie dwóch ciał

## Masa zredukowana

Przyspieszenie w ruchu względnym:

$$\vec{a}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{a}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{\vec{F}_{12}}{m_2}$$

Możemy sprowadzić równania ruchu do postaci:

$$\mu \vec{a}_{12} = \mu \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$$

gdzie  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  - masa zredukowana  $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

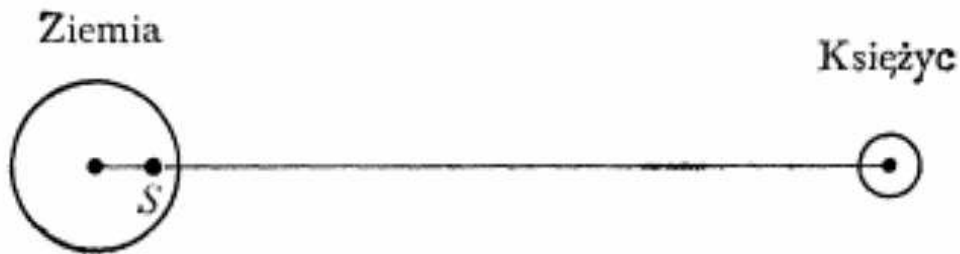
Problem względnego ruchu dwóch oddziałujących ciał możemy sprowadzić do problemu ruchu jednego ciała o masie  $\mu$  w polu siły  $\vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$

Ściśle w przypadku klasycznym (nierelatywistycznym) dla układu izolowanego.

Prawa Keplera pozostają słuszne także gdy nie zaniedbujemy masy planety/satelity!

# Oddziaływanie dwóch ciał

## Przykład



Układ Ziemia-Księżyc

$$m_K : m_Z \approx 1 : 81$$

$$\mu \approx 0.988 m_K$$

Ziemia i Księżyc krążą wokół wspólnego środka masy, który znajduje się ok. 4700 km od środka Ziemi.

Częstość obiegu jest  $\sqrt{\frac{m_K}{\mu}}$  raza większa niż gdyby Ziemia była “nieruchoma” (0.6%)

przy danych masach i odległości Ziemia-Księżyc :  $\mu \omega^2 r_{12} = F(r_{12})$

Ruch Ziemi dookoła Słońca:  $m_Z : m_S \approx 1 : 335\,000$



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego