

Bryła sztywna

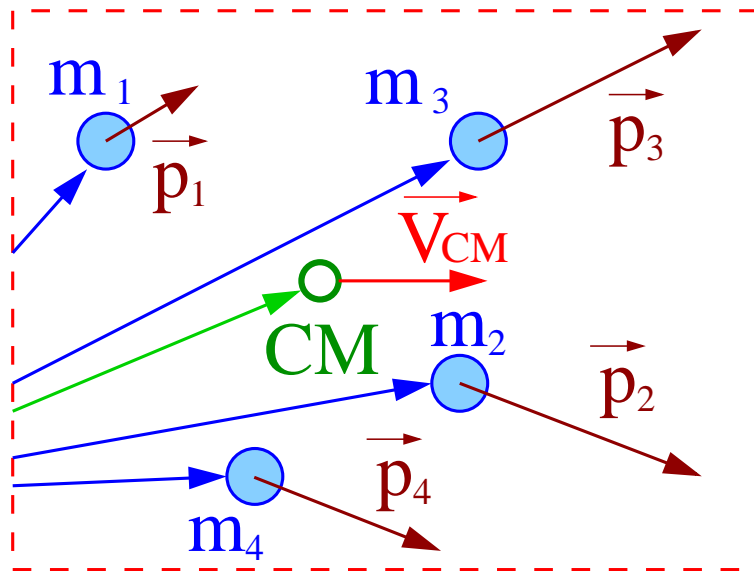
Fizyka I (Mechanika)

Wykład XII:

- Bryła sztywna
- Statyka
- Prawa ruchu
- Moment bezwładności
- Energia ruchu obrotowego
- Błąd i żyroskop

Bryła sztywna

Układ wielu ciał



Masa układu

$$M = \sum_i m_i$$

Położenie środka masy:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Ruch układu jako całości

Pęd:

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{M V_{CM}^2}{2} + E_k^*$$

Moment pędu:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^*$$

E_k^* - energia "wewnętrzna"

\vec{L}_{CM}^* - "wewnętrzny" moment pędu

Bryła sztywna

Układ wielu ciał

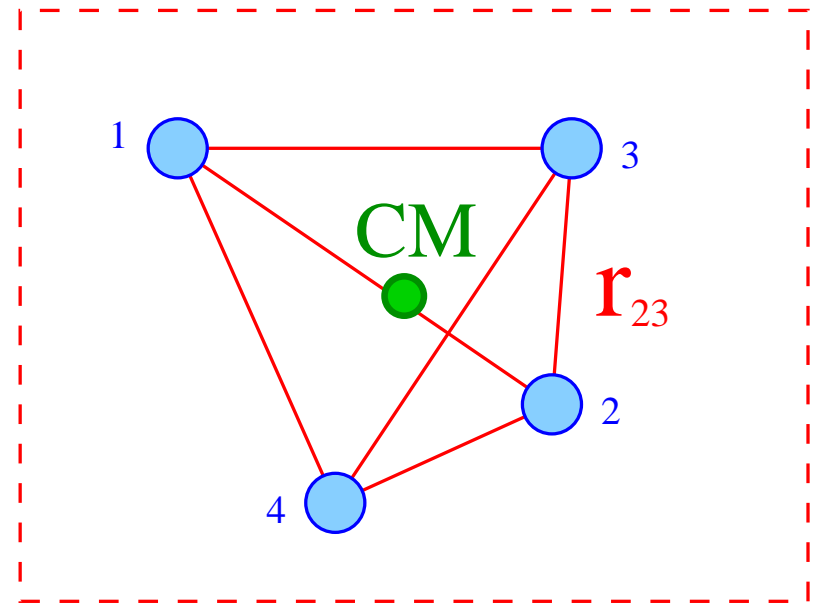
W oparciu o pojęcie **środku masy** możemy opisać **ruch układu** jako całości stosując równania ruchu **punktu materialnego**.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{zw}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{zw}$$

Natomiast **ruch względny** ciał układu może być (w ogólnym przypadku) bardzo skomplikowany...

Przypadek szczególny



$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const}$$

Układ ciał w którym względne odległości są stałe \Rightarrow **bryła sztywna** (uogólniona)

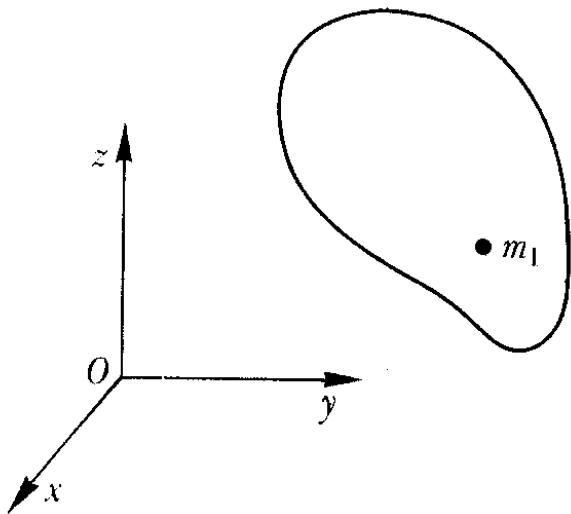
Bryła sztywna

Naogół **ciałem sztywnym** nazywamy ciało makroskopowe, które nie podlega deformacjom - **wszystkie punkty mają względem siebie stałe odległości.**

Położenie

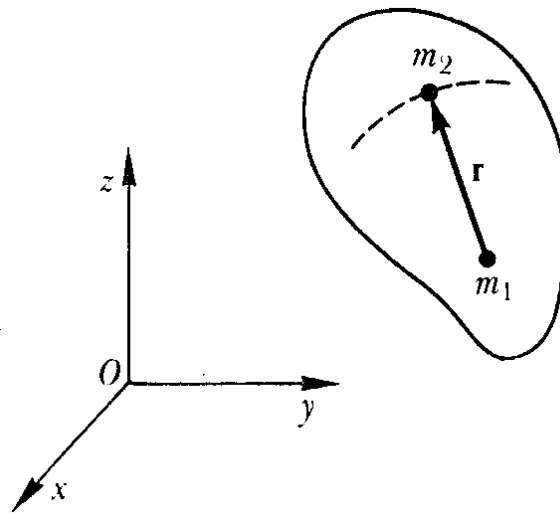
Aby jednoznacznie określić położenie bryły sztywnej w przestrzeni, trzeba określić:

położenie wybranego punktu
np. środka masy



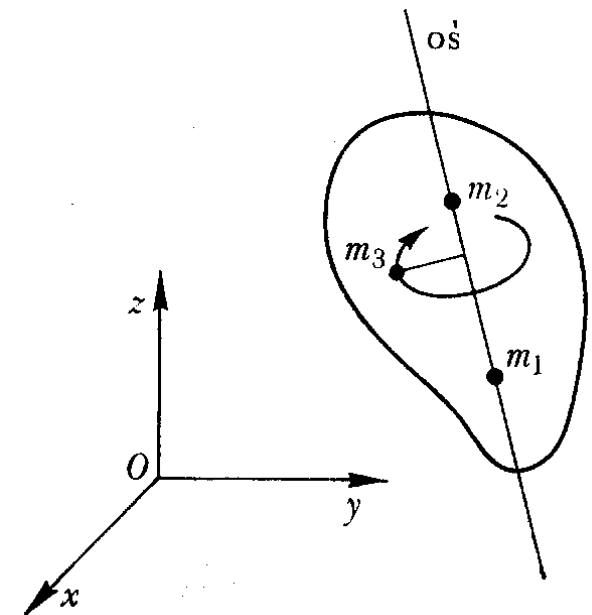
3 parametry
(stopnie swobody)

położenie drugiego punktu



2 parametry
(położenie na sferze)

położenie trzeciego punktu



1 parametr (położenie na okręgu)

⇒ łącznie mamy **6 stopni swobody**

Opis ruchu

Położenie bryły sztywnej opisują 3 współrzędne i 3 kąty

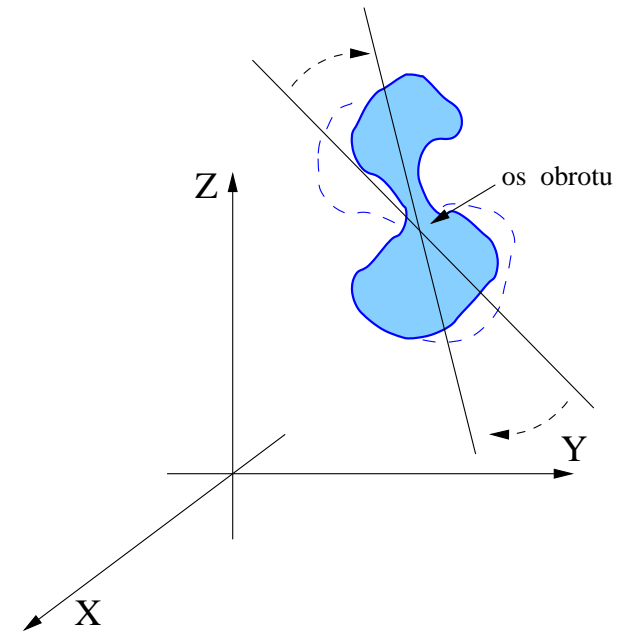
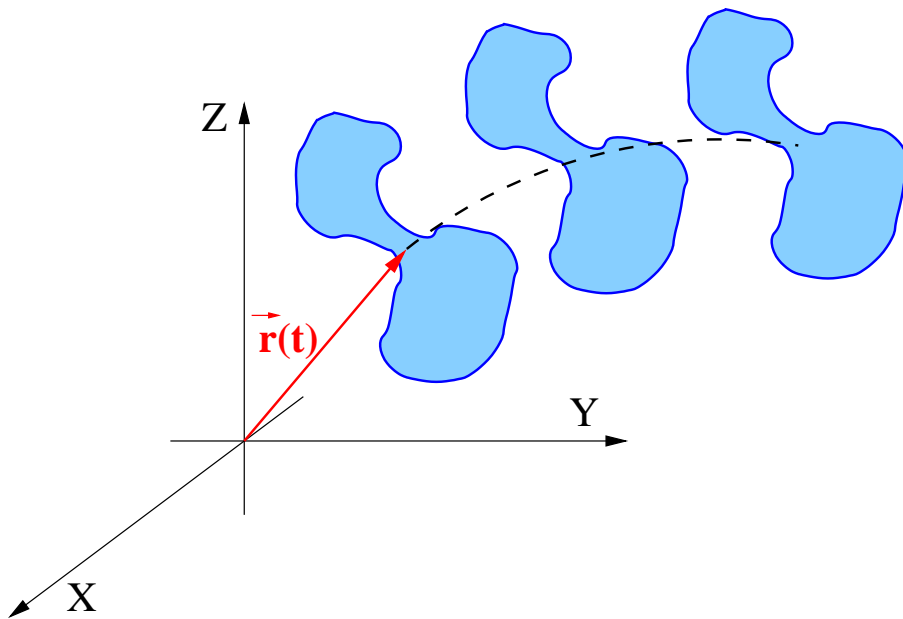
Złożenie ruchów

Ogólny ruch (zmianę położenia) można przedstawić jako złożenie

ruchu postępowego

oraz

ruchu obrotowego



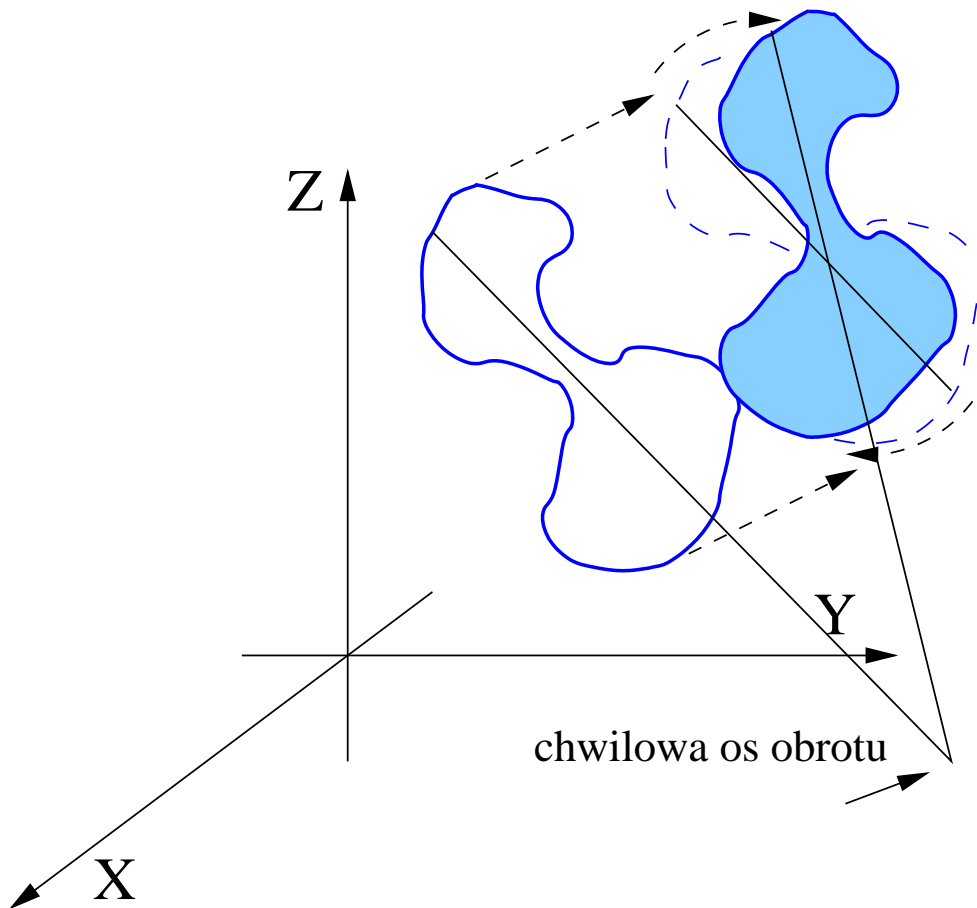
wektory prędkości są takie same dla wszystkich punktów

wszystkie punkty poruszają się po okręgach

Opis ruchu

Chwilowa oś obrotu

Czasami złożenie ruchu **postepowego** i **obrotowego** (względem np. środka masy) można przedstawić jako ruch obrotowy względem **chwilowej osi obrotu**



$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

Jeśli $\vec{V}_{CM} \perp \vec{\omega}$ wtedy:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}')$$

\vec{R}' - położenie chwilowej osi obrotu
(zmiennie w czasie)

Opis ruchu

Więzy

Ruch bryły sztywnej w ogólnym przypadku opisuje kolejnych 6 parametrów (np. **prędkość** środka masy i **prędkość kątowna** w układzie środka masy)

W wielu zagadnieniach ruch bryły sztywnej jest jednak ograniczony przez **więzy**:

- koło obracające się na nieruchomej osi \Rightarrow jeden stopień swobody (kątowny obrotu)
- walec toczący się bez poślizgu \Rightarrow jeden st. swobody (kątowny obrotu **lub** przesunięcie)
- walec toczący się z poślizgiem \Rightarrow dwa stopnie swobody (kątowny obrotu **i** przesunięcie)
- kulka toczące się bez poślizgu \Rightarrow trzy stopnie swobody (trzy składowe $\vec{\omega}$)

W rozwiązywaniu zagadnień kluczowe jest zrozumienie jakie są stopnie swobody

Obecność więzów oznacza też obecność **sił reakcji** więzów...

Statyka

Warunek równowagi

Bryła sztywna pozostaje nieruchoma, wtedy i tylko wtedy, gdy działające na nią **siły** i **momenty sił** równoważą się:

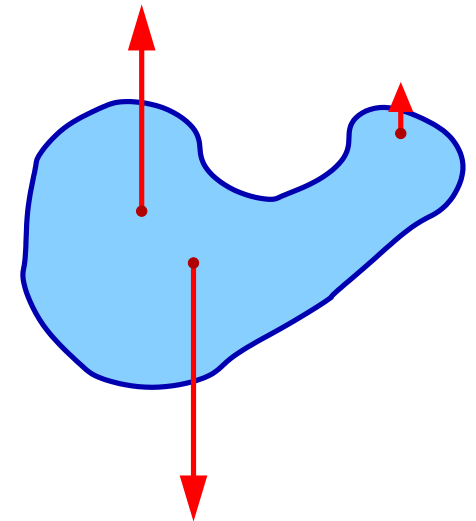
$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{M}^{zw} = \sum_i \vec{M}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Jeśli $\vec{F}^{zw} = 0$ to **wypadkowy moment sił** względem każdej osi jest taki sam! (wystarczy sprawdzić raz)

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{R}$$

$$\vec{M}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{M}$$



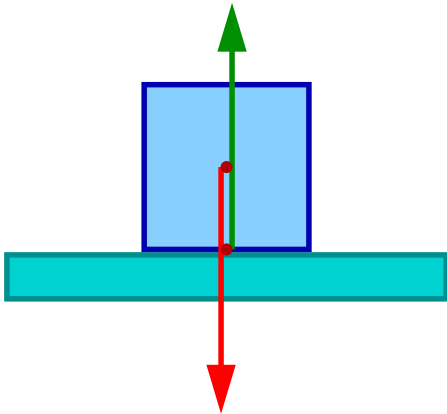
Siłami z którymi naogół będziemy mieli do czynienia są siła ciężkości i siły reakcji więzów

Statyka

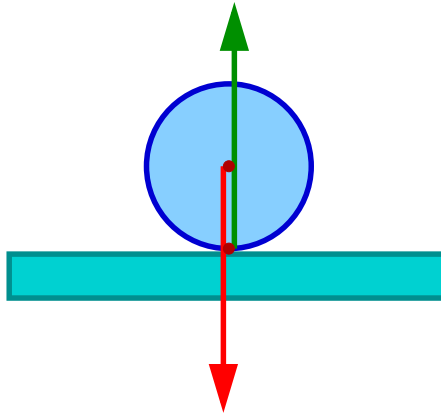
Równowaga

Nawet jeśli warunek $\vec{F}^{zw} = \vec{M}^{zw} = 0$ jest spełniony, równowaga może być:

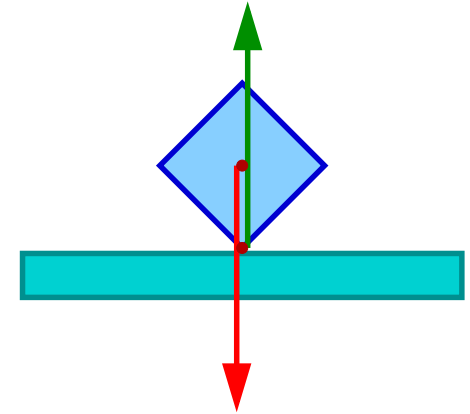
trwała



obojętna



chwiejna



Nieznaczne (infinitesimalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

pojawienie się siły wypadkowej (momentu siły) przywracającej równowagę

zmianę położenia równowagi

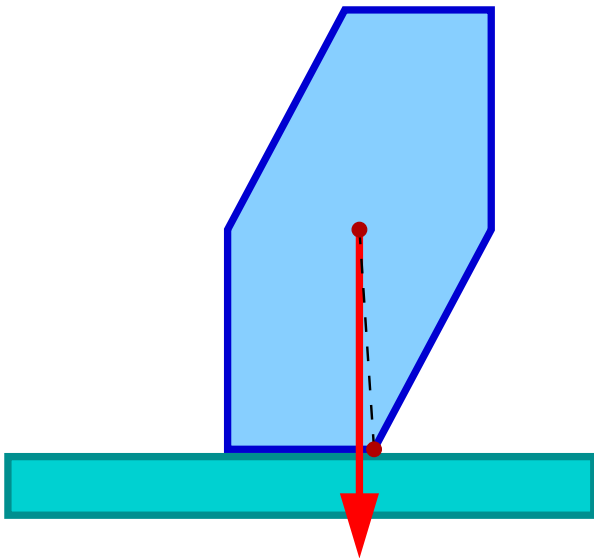
pojawienie się siły wypadkowej zwiększającej wychylenie

Statyka

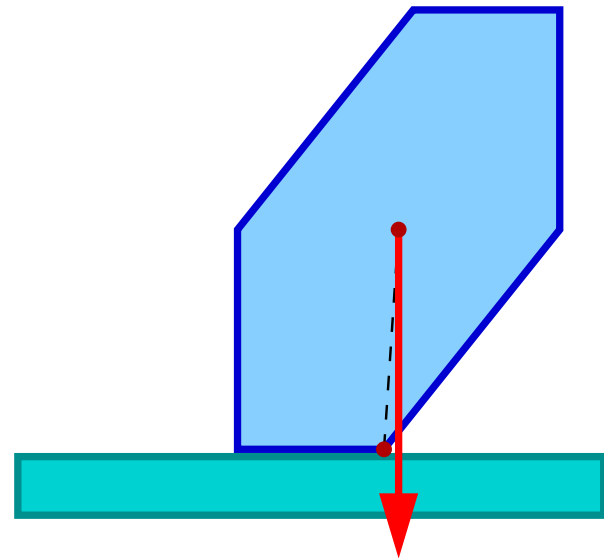
Przykład I

Warunkiem **równowagi trwałej** dla wielościanu (ustawionego na poziomej powierzchni, pod działaniem siły ciężkości) jest aby **pion** wypuszczony ze **środka ciężkości** przechodził przez **podstawę**.

Równowaga trwała



Brak równowagi



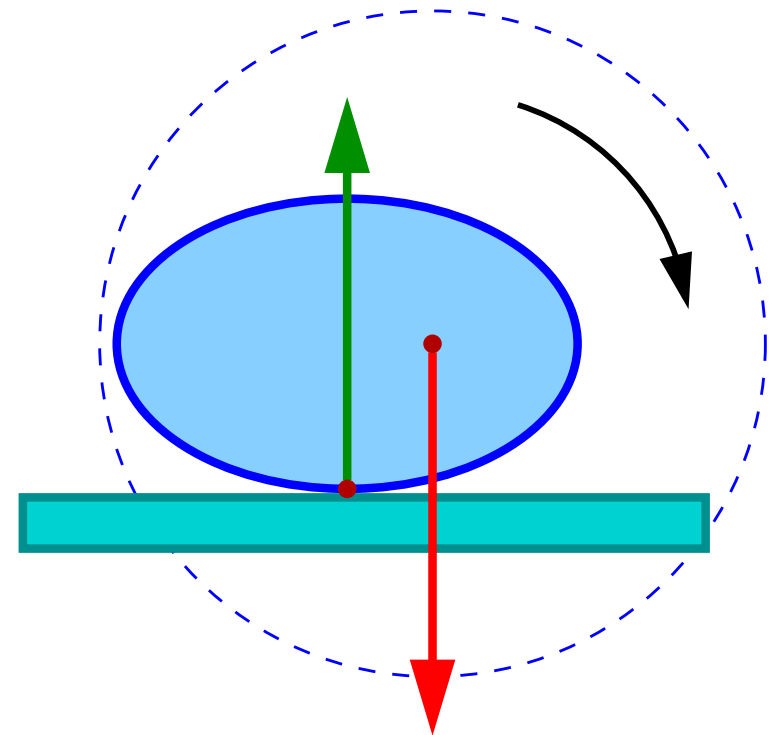
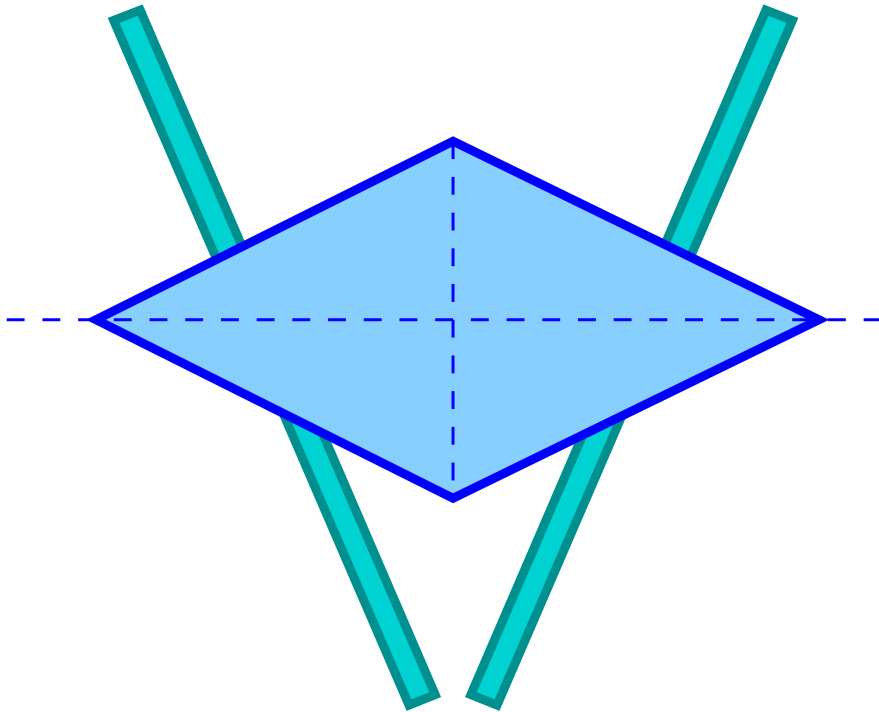
Moment siły ciężkości “dociska” bryłę do powierzchni

Moment siły ciężkości wywraca bryłę

Statyka

Przykład II

Dwu-stożek położony na nierównoległych szynach:



Gdy szyny są poziome, stożek będzie się poruszał w kierunku szerszego końca.

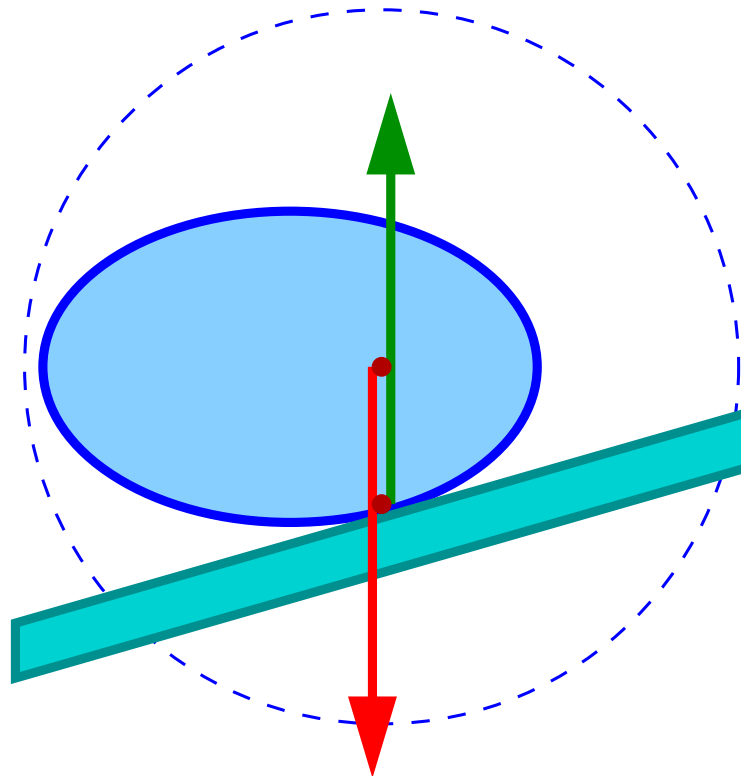
Siła ciężkości i reakcji szyn się równoważą, ale wypadkowy moment sił nie będzie zerowy.

Szyny stykają się ze stożkiem wzdłuż łuku elipsy z osią stożka (środkiem masy) w jednym z ognisk...

Statyka

Przykład II

Równowagę osiągniemy gdy szyny będą pochylone pod odpowiednim kątem (szerszy koniec wyżej)



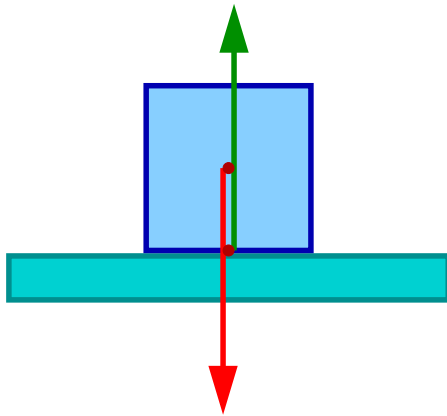
Oś stożka pozostaje cały czas na tej samej wysokości ($E_p = const$)

Statyka

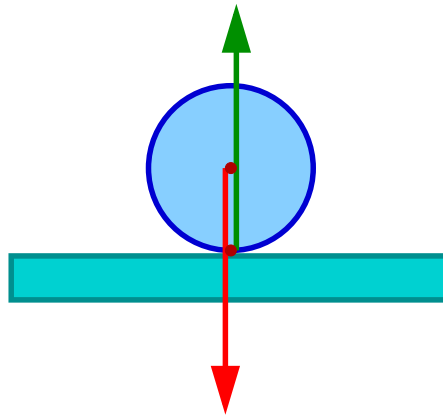
Równowaga

Równowaga bryły na którą działa siła ciężkości i siły reakcji można sklasyfikować patrząc na położenie środka masy (energię potencjalną): $(\vec{F} = -\text{grad}E_p)$

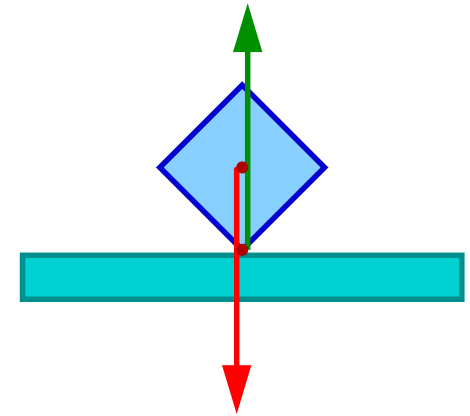
równowaga trwała



obojętna



chwiejna



Nieznaczne (infinitesimalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

podniesienie środka masy
wzrost energii potencjalnej

brak zmian położenia
środka masy

obniżenie środka masy
zmniejszenie energii potencjalnej

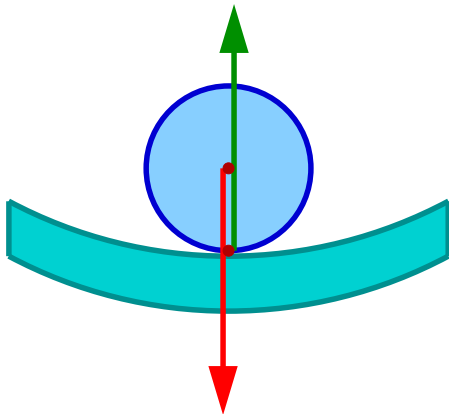
Statyka

Równowaga

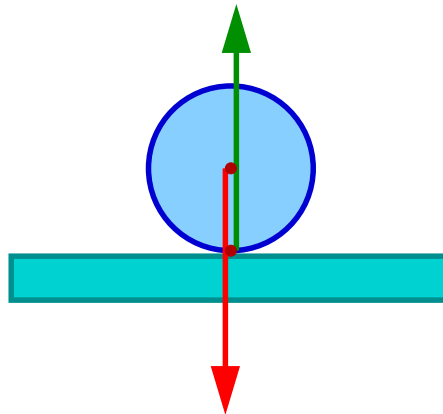
Zmiana **położenia środka masy**, przy wychyleniu z położenia równowagi, zależy od **kształtu bryły**, ale także od charakteru **więzów**.

Np: równowaga kuli zależy od kształtu powierzchni na której leży

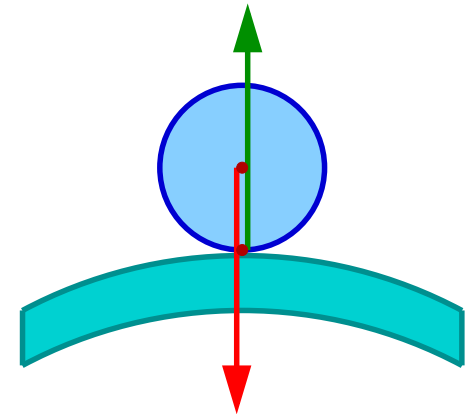
równowaga trwała



obojętna



chwiejna



Typ równowagi zależy od zmiany położenia środka masy

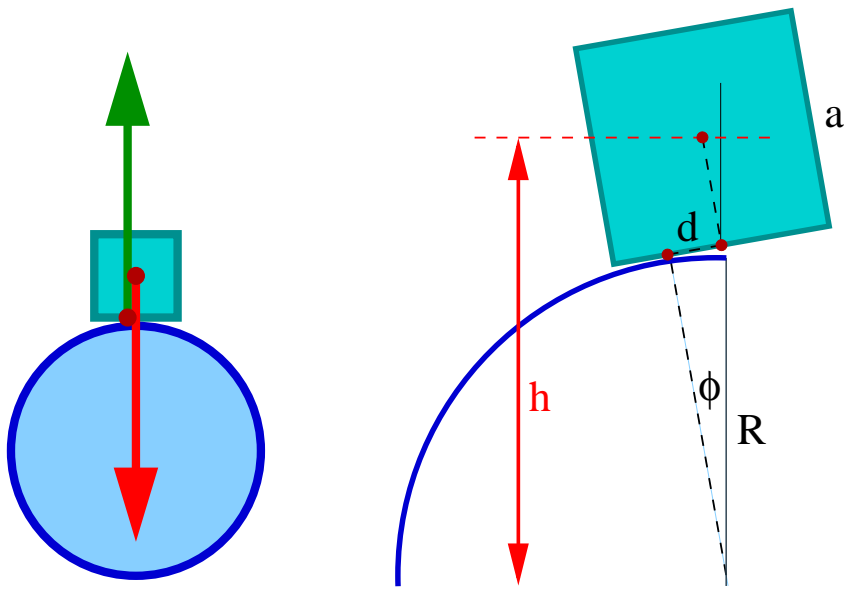
$$(\vec{F} = -\text{grad} E_p)$$

Statyka

Równowaga

Kryterium zmiany położenia środka masy \Rightarrow energii potencjalnej
ma zastosowanie także w bardziej ogólnych przypadkach

Np: sześcian ustawiony na kuli



Położenie środka masy sześcianu
(nad środkiem kuli):

$$h = R \cos \phi + d \sin \phi + \frac{1}{2}a \cos \phi$$

$$d = R \phi$$

$$h = \left(R + \frac{a}{2}\right) \cos \phi + R \phi \sin \phi$$

w przybliżeniu małych kątów:

$$\sin \phi \approx \phi, \cos \phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$$

$$h = \left(R + \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(R - \frac{a}{2}\right) \cdot \phi^2$$

Równowaga trwała jeśli $R > \frac{a}{2}$

Prawa ruchu

Obrót wokół ustalonej osi

Dla bryły sztywnej obracającej się wokół ustalonej osi moment pędu (skalarnie):

$$L = \omega \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \omega I \quad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$r_{\perp i}$ - odległość masy i od osi obrotu,
 I - moment bezwładności **względem wybranej osi**.

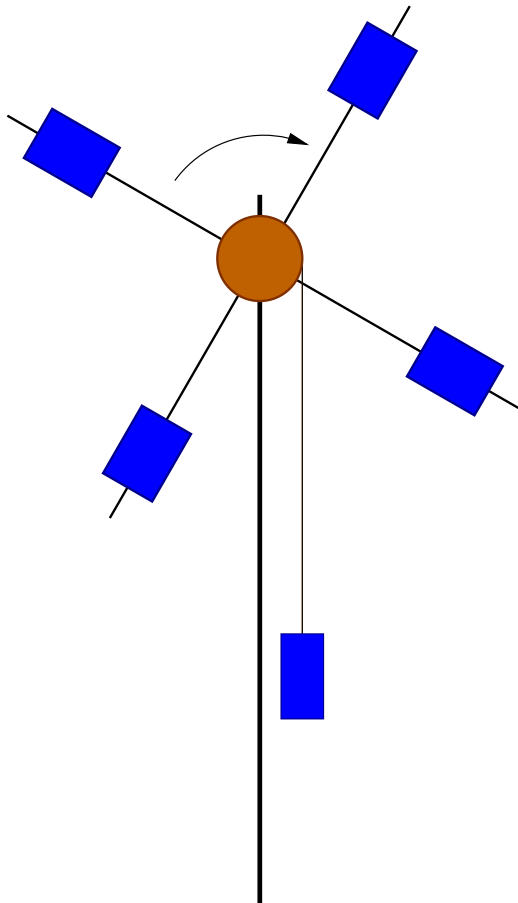
Pod wpływem stałego momentu siły M :

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \varepsilon I$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad - \quad \text{przyspieszenie kątowe}$$

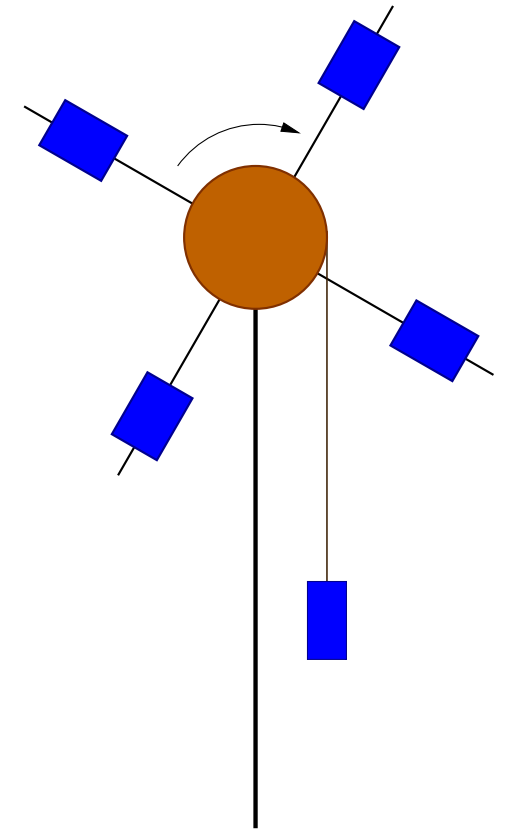
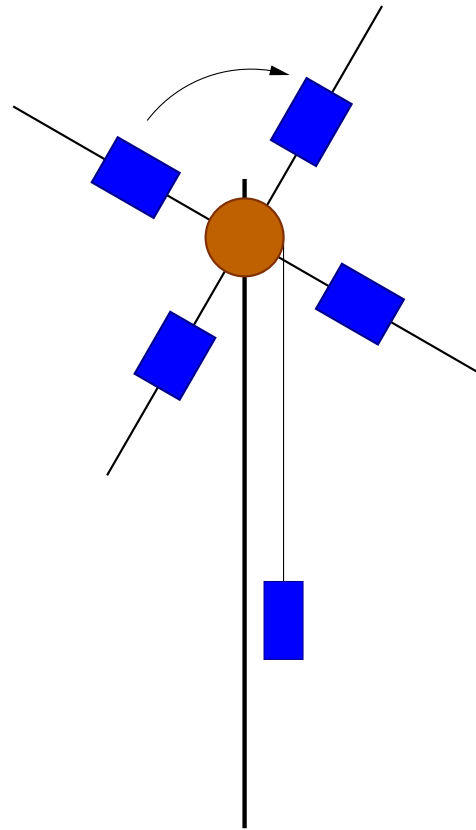
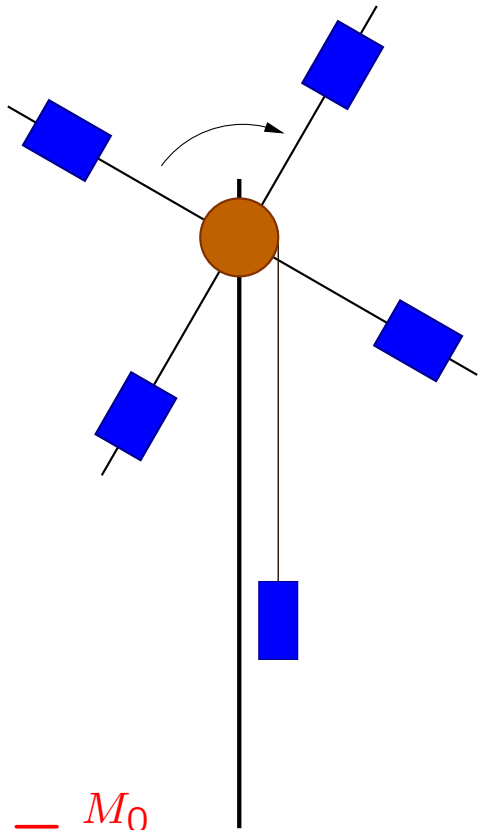
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{M}{I} = \text{const}$$

ruch jednostajnie przyspieszony (dla $I = \text{const}$)



Prawa ruchu

Ruch jednostajnie przyspieszony



$$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{I_0}$$

$$I_0 \approx 4mr_0^2$$

położenie ciężarka: $h = \phi \cdot R$

$$I \approx 4mr^2 < 4mr_0^2$$

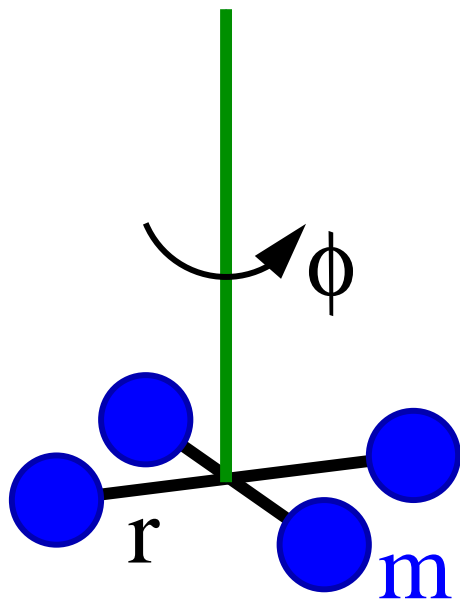
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{M_0}{I} > \varepsilon_0$$

$$M = F R > M_0 = F R_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{M}{I_0} > \varepsilon_0$$

Prawa ruchu

Ruch harmoniczny



Moment siły zależy od kąta skręcenia pręta ϕ :

$$M = -\xi \phi$$

ξ - współczynnik "sprężystości"

moment siły ma znak przeciwny do skręcenia

$$\begin{aligned} M &= \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt} I = \frac{d^2\phi}{dt^2} I \\ \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} &= -\frac{\xi}{I} \phi \end{aligned}$$

równanie oscylatora harmonicznego.

Częstość drgań:

$$\nu = \sqrt{\frac{\xi}{I}} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sum_i m_i r_{\perp i}^2}} \approx \frac{\sqrt{\xi}}{2r\sqrt{m}}$$

Moment bezwładności

Przyspieszenie kątowe w ruchu bryły sztywnej zależy nie tylko od masy całkowitej, ale także od jej **rozłożenia względem osi obrotu**.

Rozkład masy względem wybranej osi obrotu (najczęściej przechodzącej przez środek masy, ale nie koniecznie) opisuje **moment bezwładności**

$$I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$$

w przypadku ciągłego rozkładu masy - całka po objętości:

$$I = \int dV \rho r_{\perp}^2$$

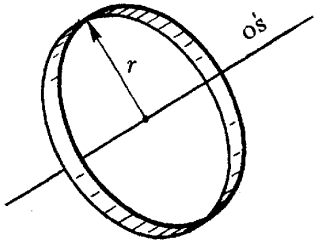
Dla ciała jednorodnego ($\rho = \text{const} = \frac{M}{V}$):

$$I = \frac{M}{V} \int dV r_{\perp}^2 = M \frac{\int dV r_{\perp}^2}{\int dV} = M \langle r_{\perp}^2 \rangle$$

gdzie $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ - średni kwadrat odległości od osi obrotu

Moment bezwładności

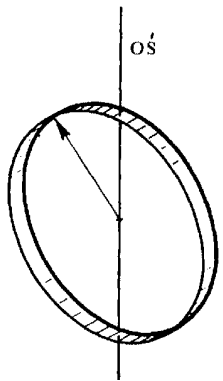
Stosunek m. bezwładności do masy zależy od kształtu i rozmiarów ciała: $\frac{I}{M} = \langle r_{\perp}^2 \rangle$



Obręcz (pusta w środku) obrót **wokół osi symetrii**

Wszystkie punkty równoodległe od osi:

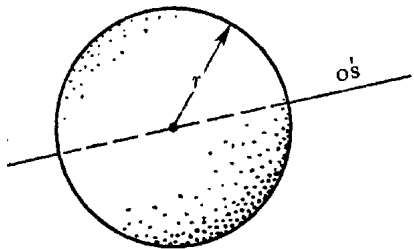
$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = r^2 \Rightarrow I_{\perp} = M r^2$$



Obrót **wokół średnicy**

oś obrotu - oś X, średnica prostopadła do osi obrotu - oś Y

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 \quad \& \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \\ \Rightarrow \langle r_{\perp}^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{1}{2} r^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\parallel} = \frac{1}{2} M r^2 \end{aligned}$$



Sfera (powierzchnia kuli) obrót **wokół osi symetrii**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \& \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle \\ \Rightarrow \langle r_{\perp}^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2}{3} r^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} M r^2 \end{aligned}$$

Moment bezwładności

Koło (krążek) obrót **wokół osi symetrii**

Koło = suma wielu obręczy \Rightarrow śrenia po powierzchni:

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = \frac{\int r'^2 \cdot dS}{S} = \frac{1}{\pi r^2} \int r'^2 \cdot 2\pi r' dr' = \frac{2\pi}{\pi r^2} \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2} r^2$$
$$\Rightarrow I_{\perp} = \frac{1}{2} M r^2$$

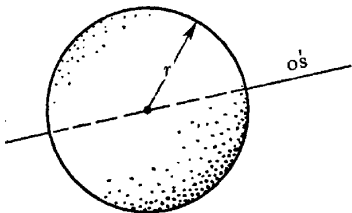
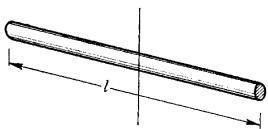
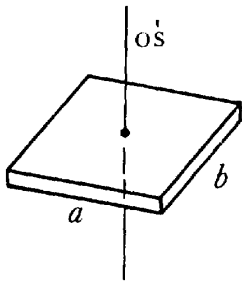
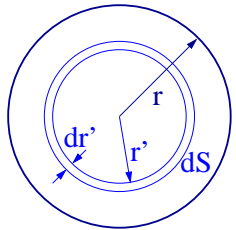
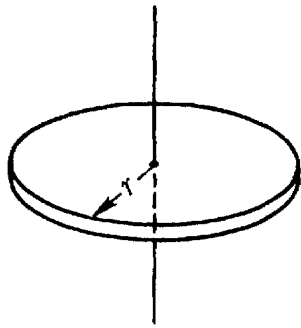
Podobnie można wyznaczyć I dla innych brył:

Prostokąt $\Rightarrow I_{\perp} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$

Pręt $\Rightarrow I = \frac{1}{12} M l^2$

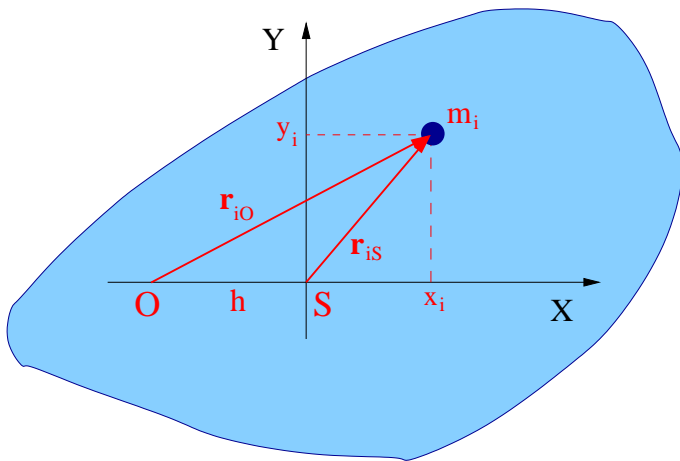
Obrót **wokół osi prostopadłej**, przechodzącej przez środek.

Kula (jednorodna) $\Rightarrow I = \frac{2}{5} M r^2$



Moment bezwładności

Twierdzenie o osiach równoległych



Zazwyczaj liczymy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości **S**
(wszystkie podane przykłady)

Bryła może jednak wirować wokół dowolnej osi...

Moment bezwładności względem osi równoległej **O**, odległej o h od osi **S**: (XY: układ środka masy)

$$r_{iO}^2 = (x_i + h)^2 + y_i^2 = h^2 + 2hx_i + r_{iS}^2$$

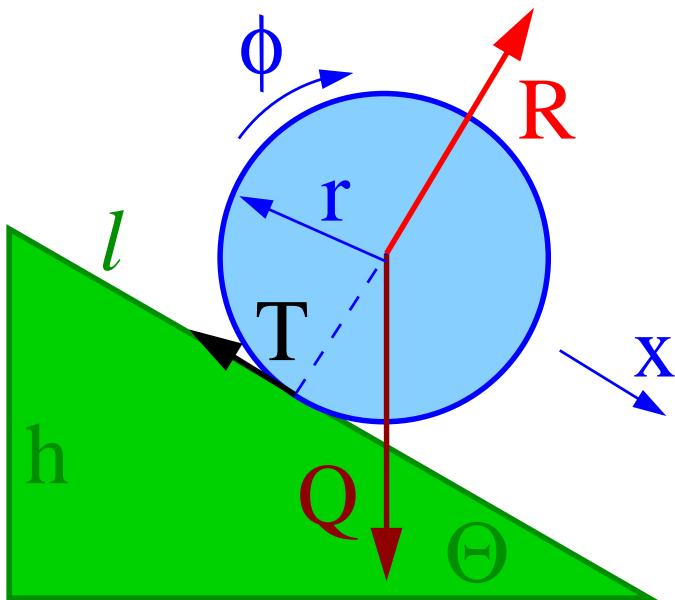
$$I_O = \sum_i m_i r_{iO}^2 = h^2 \sum_i m_i + 2h \sum_i m_i x_i + \sum_i m_i r_{iS}^2$$

$$\Rightarrow I_O = I_S + M h^2$$

Twierdzenie Steinera

Prawa ruchu

Równia pochyła



Staczanie po równi pochyłej symetrycznej bryły (obręcz, walec, kula...) bez poślizgu:

$$x = r \phi \Rightarrow a = r \varepsilon$$

Ruch postępowy (wzdłuż równi):

$$ma = Q \sin \theta - T$$

Ruch obrotowy (względem środka masy):

$$I \varepsilon = T r$$

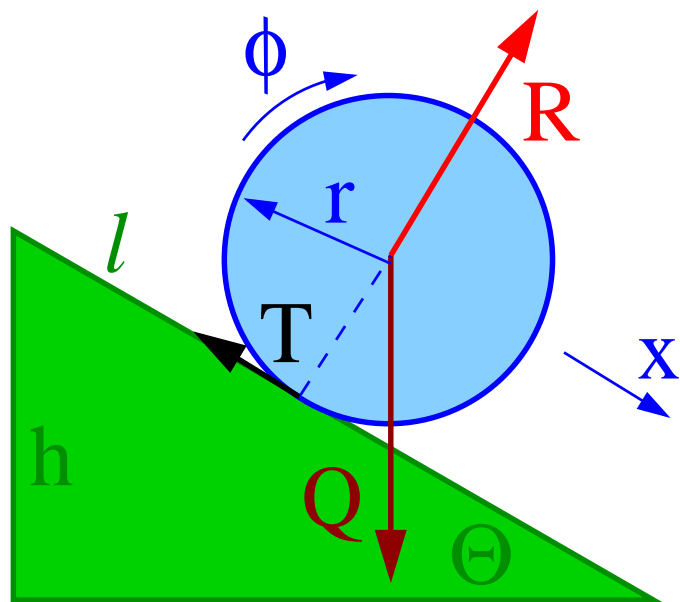
Eliminując siłę tarcia:

$$\begin{aligned} ma + \frac{I \varepsilon}{r} &= mg \sin \theta \\ \Rightarrow a &= \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{mr^2}} \end{aligned}$$

Im większy moment bezwładności, tym wolniej stacza się ciało...

Prawa ruchu

Równia pochyła



Zagadnienie można rozwiązać w sposób równoważny korzystając z chwilowej osi obrotu i twierdzenia Steinera

Równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu (linia styku bryły z równią):

$$I_o \varepsilon = Q \sin \theta \cdot r$$

Z twierdzenia Steinera:

$$I_o = I + m r^2$$

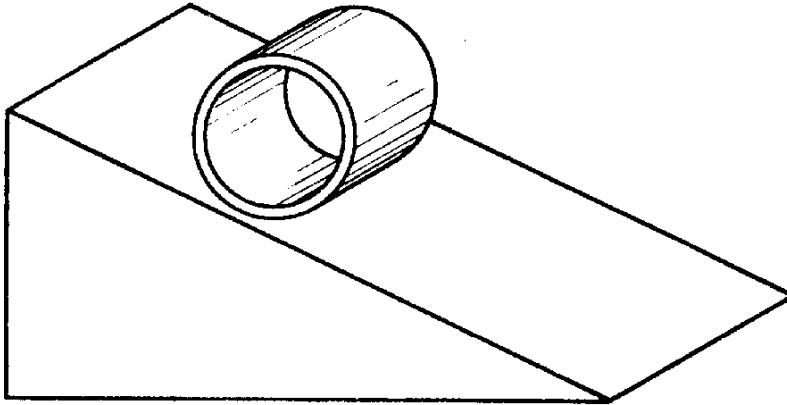
Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a = r \varepsilon &= \frac{m g \sin \theta r^2}{I_o} \\ &= \frac{m r^2 g \sin \theta}{m r^2 + I} \end{aligned}$$

Prawa ruchu

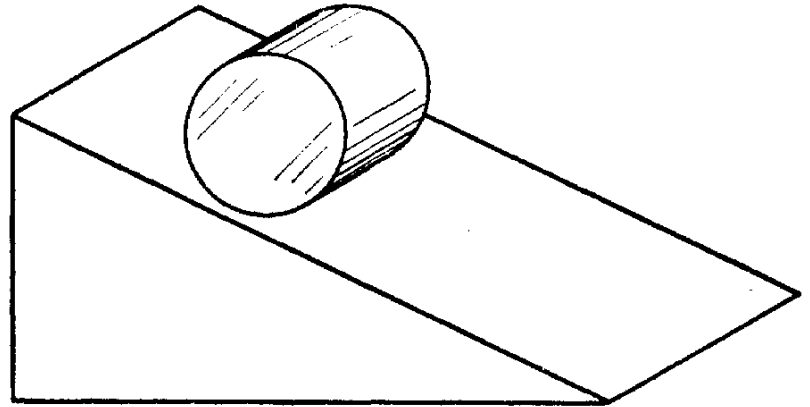
Równia pochyła

Rura



$$a = \frac{1}{2} g \sin \theta$$

Walec

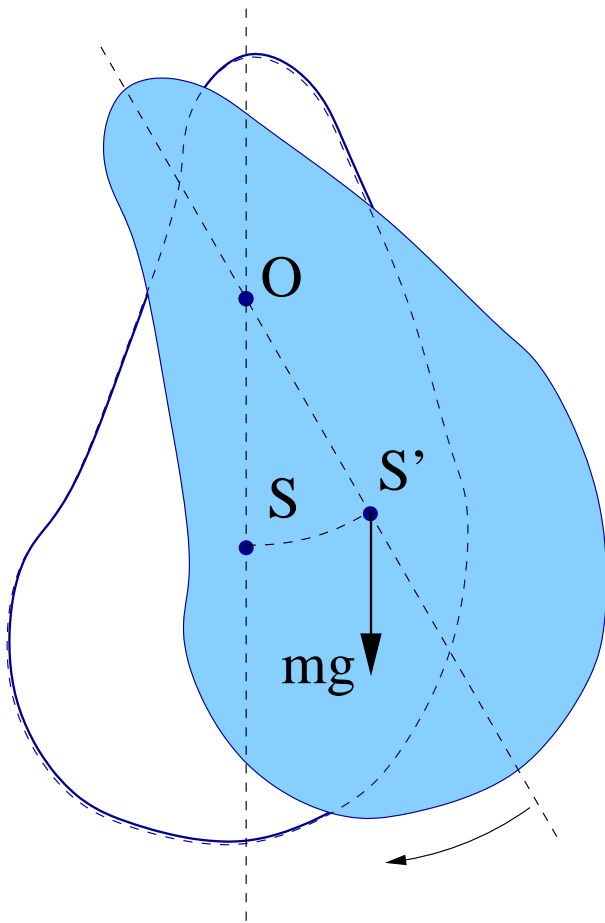


$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

$\frac{1}{3}$ szybciej

Prawa ruchu

Wahadło fizyczne



Równanie małych drgań bryły sztywnej, wokół osi obrotu O przechodzącej w odległości l od środka ciężkości S :

$$I_o \varepsilon = -m g \sin \phi \cdot l$$
$$(I + m l^2) \frac{d^2 \phi}{dt^2} \approx -m g l \phi$$

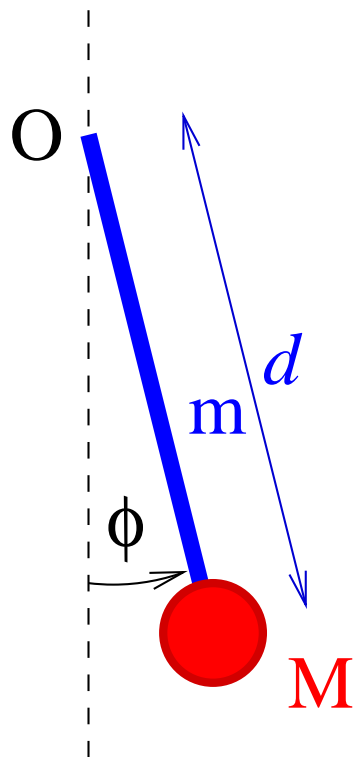
Częstość drgań (równanie oscylatora harmonicznego):

$$\nu = \sqrt{\frac{m g l}{I + m l^2}} = \sqrt{\frac{g}{l \left(1 + \frac{I}{m l^2}\right)}}$$

$l_z = l \left(1 + \frac{I}{m l^2}\right)$ - długość zredukowana wahadła
długość wahadła matematycznego o tej samej częstości

Prawa ruchu

Wahadło fizyczne



Równanie małych drgań wokół osi obrotu O:

$$I_o \varepsilon = -Mdg \sin \phi - m \frac{d}{2} g \sin \phi$$

$$\left(Md^2 + \frac{1}{3}md^2 \right) \frac{d^2 \phi}{dt^2} \approx -(M + \frac{m}{2})dg \phi$$

Częstość drgań:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\frac{M + \frac{1}{2}m}{M + \frac{1}{3}m}} \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{M} \right)$$

$$l_z = d \frac{M + \frac{1}{3}m}{M + \frac{1}{2}m} \approx d \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{M} \right)$$

- długość zredukowana wahadła $(m \ll M)$

Energia

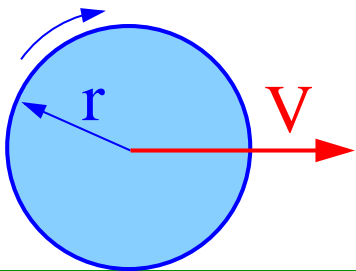
Energia ruchu obrotowego

Energia kinetyczna układu ciał:

$$E_k = E_k^* + \frac{M V_{CM}^2}{2}$$

Bryła sztywna: energia “wewnętrzna” \Rightarrow energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_k^* = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{1}{2} \omega L$$



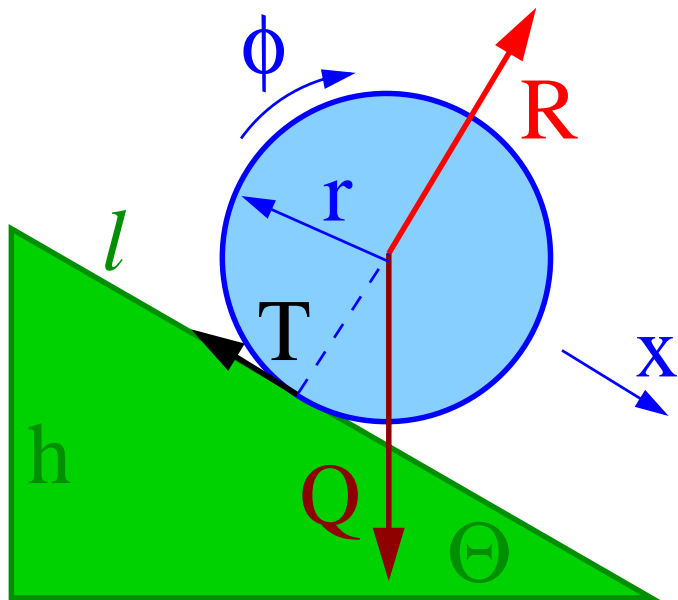
Ciało toczące się bez poślizgu: $v = \omega r$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)$$

$m \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)$ - efektywna masa bezwładna
przy niezmięnionej masie grawitacyjnej

Energia

Równia pochyła



Prędkość jaką uzyska ciało staczające się bez poślizgu z równi o wysokości h . Z zasady zachowania energii:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}}$$

Przyspieszenie prędkość średnia $\langle v \rangle = \frac{1}{2}v$

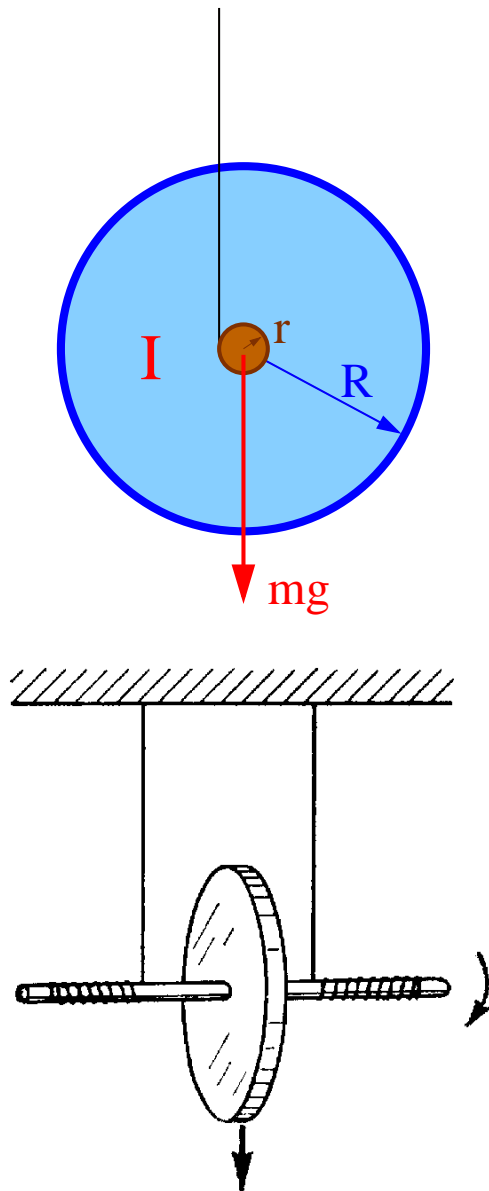
$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2l} = \frac{2gh}{2l \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Energia

Koło Maxwella

Koło o promieniu R "toczy się" po osi o promieniu r .

Jak w przypadku równi pochyłej $\theta = \frac{\pi}{2}$



$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

obręcz:

$$I = mR^2$$

$$\Rightarrow a = g \frac{r^2}{R^2 + r^2} \ll g$$

Przyspieszenie liniowe wielokrotnie mniejsze od przyspieszenia w spadku swobodnym...

Energia potencjalna zamienia się głównie na energię ruchu obrotowego.

Prawa ruchu

Uściślenie

Rozważając zagadnienie jednostajnie przyspieszonego ruchu obrotowego zakładaliśmy że moment siły jest stały i nie zależy od I . Jednak ciężarek też porusza się ruchem przyspieszonym:

$$\text{ciężarek: } ma = Q - N$$

$$\text{rotor: } I\varepsilon = rN$$

Q - ciężar ciężarka, N - siła naprężenia nici.

Eliminując $N = m(g - a)$:

$$I\varepsilon = r m(g - r\varepsilon)$$

$$(I + mr^2)\varepsilon = mgr$$

$$\varepsilon = \frac{mgr}{I + mr^2} = \frac{mgr}{I'}$$

Bezwładność ciężarka efektywnie zwiększa moment bezwładności rotora: $I' = I + mr^2$

Nigdy nie uzyskamy przyspieszenia większego niż $\varepsilon_{max} = \frac{g}{r}$

Porównanie

Punkt materialny

ruch postępowy

• przesunięcie

$$\vec{x}$$

• prędkość

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

• przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

• masa

$$m$$

• pęd

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

• układ izolowany $\vec{p} = \text{const}$

Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

⇒ kąt obrotu

$$\vec{\phi}$$

⇒ prędkość kątowna

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

⇒ przyspieszenie kątowe

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

⇒ moment bezwładności

$$I$$

⇒ moment pędu

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

⇒ układ izolowany

$$\vec{L} = \text{const}$$

Porównanie

Punkt materialny

ruch postępowy

• siła

$$\vec{F}$$

• równania ruchu

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

• praca

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

• energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

⇒ moment siły

$$\vec{M}$$

⇒ równania ruchu

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$$

⇒

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

⇒ praca

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

⇒ energia kinetyczna

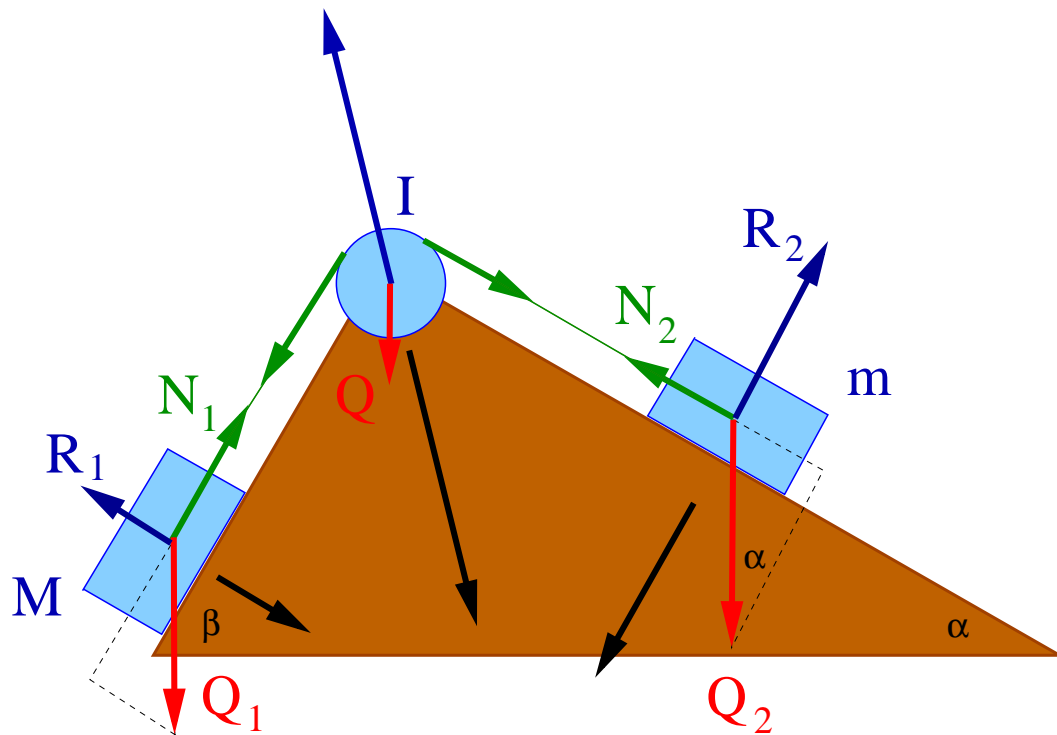
$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Dla ruchu obrotowego względem ustalonej osi, pokrywającej się z osią **symetrii** bryły !!!

Prawa ruchu

Przykład

Dwa klocki na równi poruszające się bez tarcia, połączone nieważką nicią przerzuconą przez **ważki** bloczek o momencie bezwładności I .



Powierzchnia równi jest więzem, który ogranicza ruch klocków do kierunku równoległego do powierzchni równi.

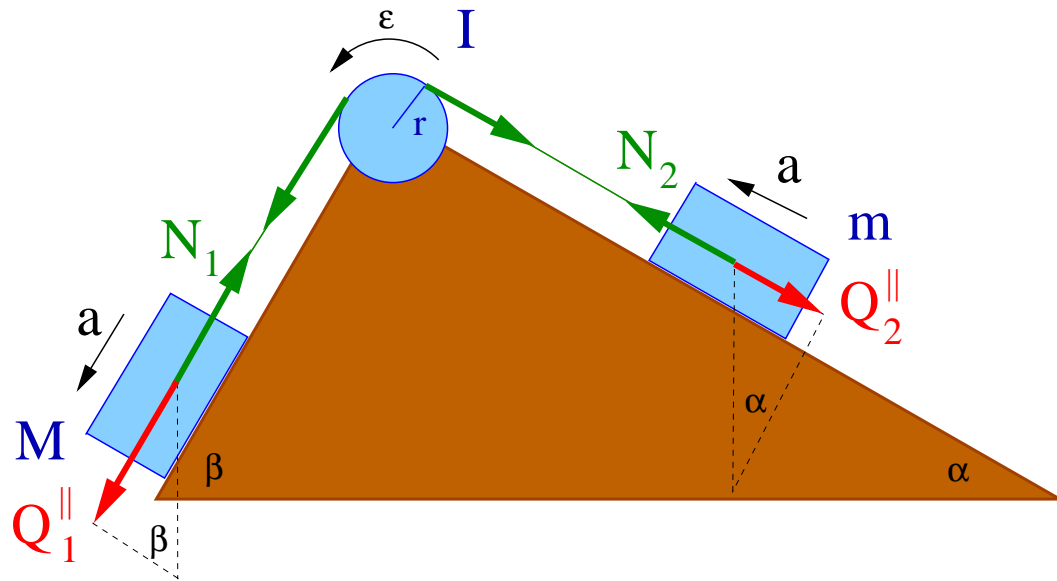
Możemy zredukować problem do ruchu jednowymiarowego.

W przypadku ważkiego boczka, jeśli układ nie jest w równowadze, siły naprężenia mogą być różne!

$$N_1 \neq N_2$$

Prawa ruchu

Przykład



Wybieramy dodatni kierunek przyspieszenia jak na rysunku. Przyspieszenia ciał:

$$a_1 = a_2 = a \quad \epsilon r = a$$

nierozciągliwa nić nie ślizga się po bloczku

Równania ruchu:

$$Ma = Q_1^{\parallel} - N_1 = Mg \sin \beta - N_1$$

$$ma = N_2 - Q_2^{\parallel} = N_2 - mg \sin \alpha$$

$$I\epsilon = I \frac{a}{r} = N_1 r - N_2 r$$

Układ trzech równań z trzema niewiadomymi (a , N_1 i N_2).

Dodajemy stronami dwa pierwsze i podstawiamy $N_1 - N_2$ z trzeciego.

Otrzymujemy:

$$a = g \frac{M \sin \beta - m \sin \alpha}{M + m + \frac{I}{r^2}}$$

Bąk

Równowaga

Zasada zachowania momentu pędu

Jeśli zapewnimy **znikanie momentów sił** to **kierunek** momentu pędu pozostanie **stały** niezależnie od działających sił i ruchu postępowego

⇒ efekt żyroskopowy

Bąk wirujący wokół **pionowej osi** jest w **równowadze**.

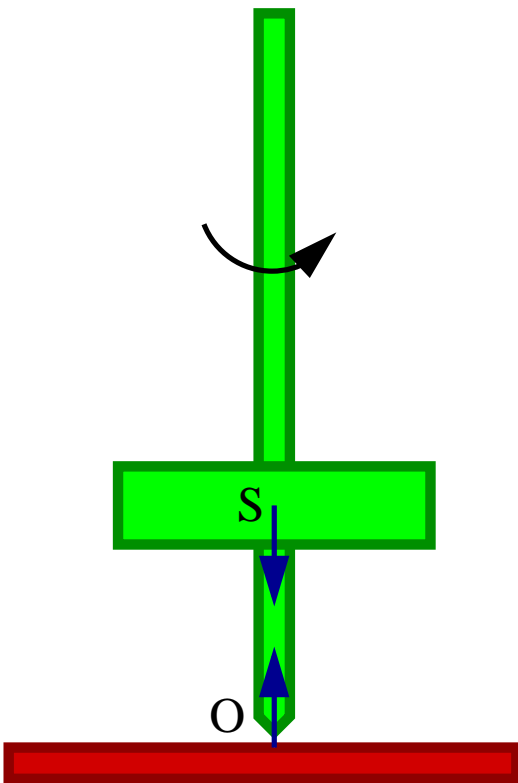
Momenty działających sił są równe zero (względem **S** i **O**)

⇒ moment pędu jest stały

⇒ orientacja osi obrotu jest stała (**bąk symetryczny**)

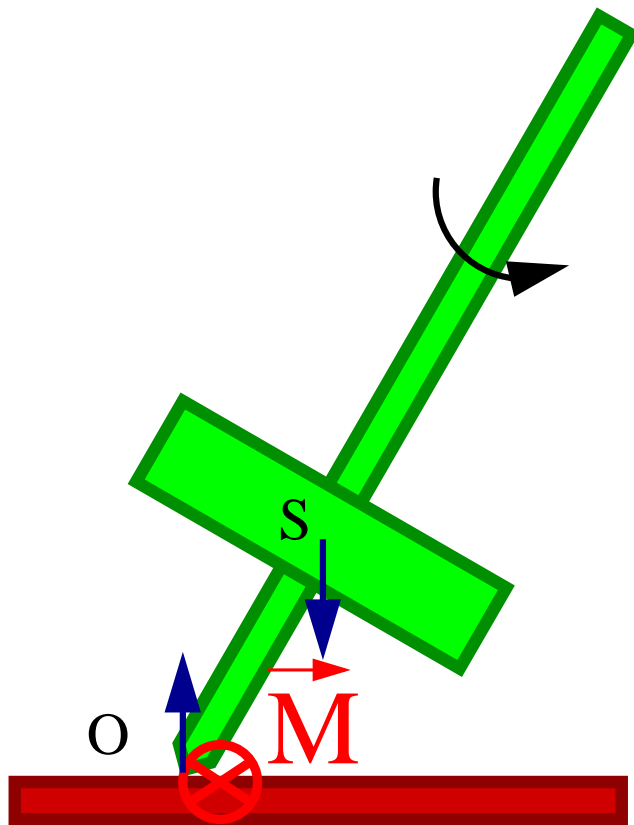
$$\vec{L} = \vec{\omega} I = \text{const}$$

Czy jest to równowaga trwała?



Bąk

Moment sił



Gdyby bąk nie wirował ($L = 0$) to ustawienie pionowe byłoby stanem **równowagi nietrwałej**.

Wychylenie z tego położenia powodowałoby powstanie wypadkowego momentu sił oraz niezerowej siły wypadkowej, które powodowałyby wywrócenie bąka.

Moment siły ciężkości względem punktu podparcia O:

$$\vec{M} = \vec{R} \times m\vec{g}$$

$$M = mgR \sin \theta$$

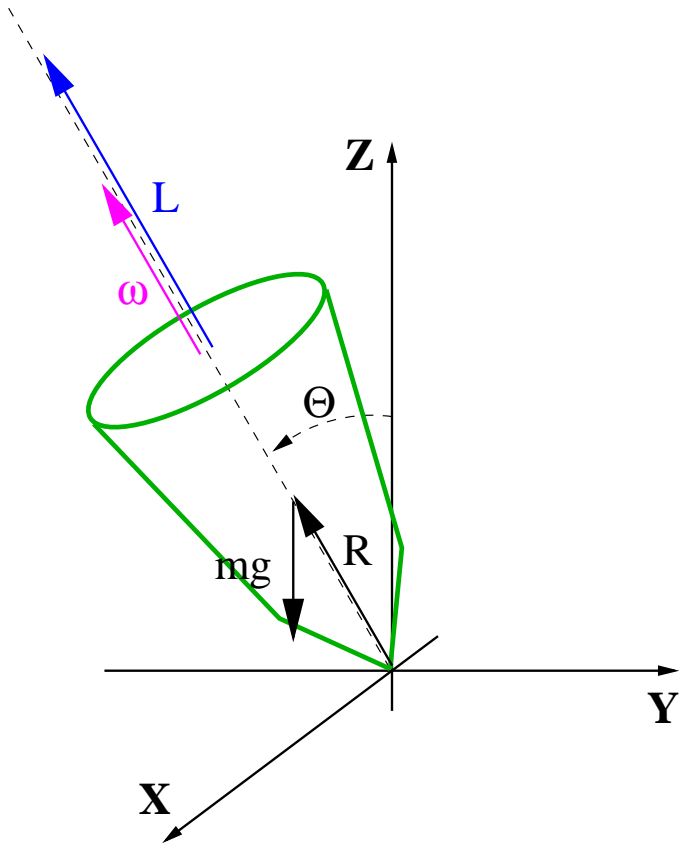
R - odległość środka ciężkości od punktu podparcia

θ - kąt odchylenia osi od pionu

Moment siły \vec{M} skierowany jest prostopadle do osi bąka...

Bąk

Precesja



W przypadku gdy bąk wiruje, przyłożony moment siły powoduje zmianę całkowitego momentu pędu:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Wektor momentu pędu pokrywa się z osią obrotu

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{R}$$

natomiast wektor momentu siły jest do niej prostopadły

$$\vec{M} = m\vec{R} \times \vec{g} \perp \vec{R}$$

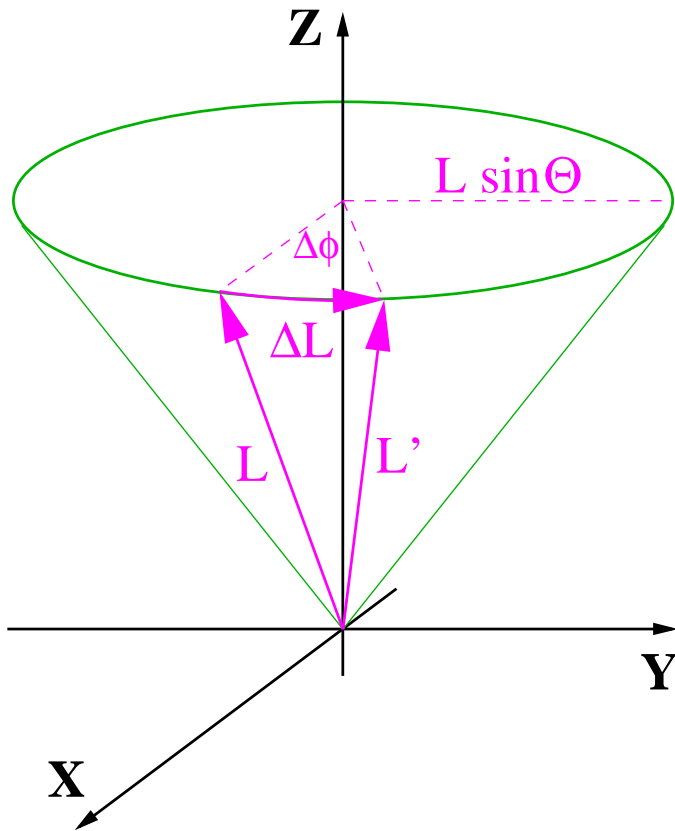
⇒ wartość momentu pędu nie ulega zmianie

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

⇒ kierunek momentu pędu zmienia się ⇒ **precesja**

Precesja

Częstość



W przedziale czasu Δt moment pędu zmieni się o:

$$\Delta L = M \Delta t = mRg \sin \theta \Delta t$$

Spowoduje to obrót **poziomej składowej** \vec{L} o kąt

$$\Delta \phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{mRg \sin \theta}{L \sin \theta} \Delta t$$

⇒ częstość z jaką wektor \vec{L} będzie zakreślał stożek:

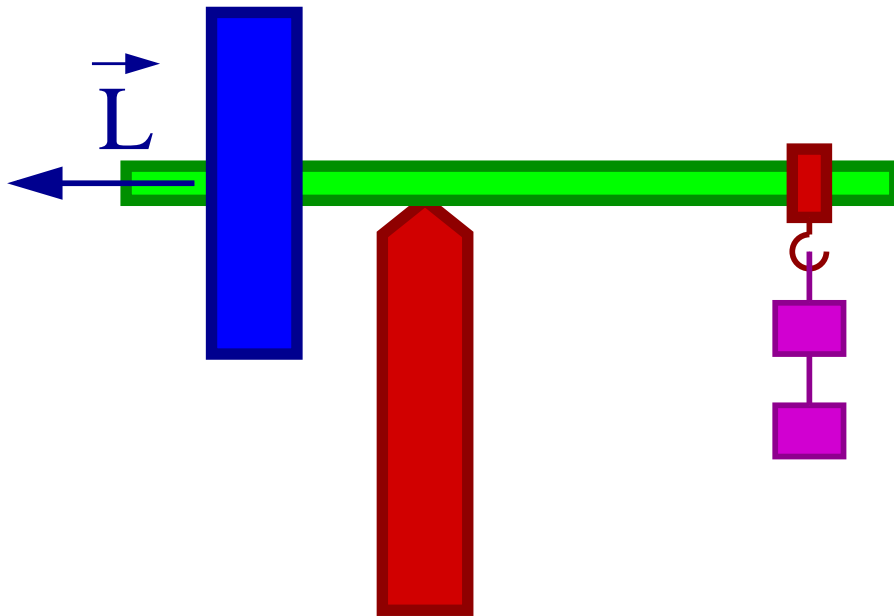
$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{mRg}{L}$$

⇒ **częstość precesji**

Częstość precesji maleje ze wzrostem momentu pędu (częstości ruchu wirowego bąka)

Żyroskop

Równowaga



“Waga”: ciężar żyroskopu jest zrównoważona przez odpowiednio dobrane ciężarki.

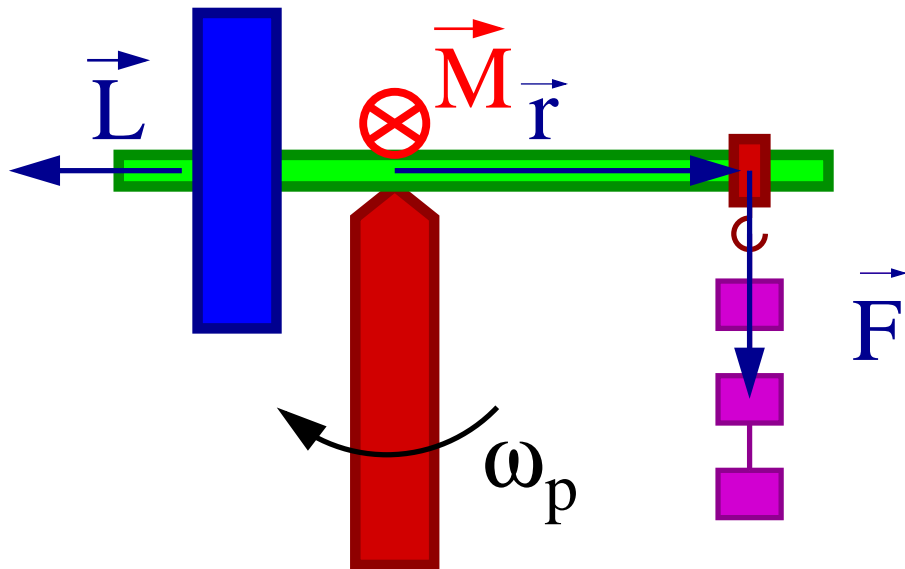
Jeśli żyroskop jest w równowadze przy $\vec{L} = 0$ to będzie także w równowadze dla $\vec{L} \neq 0$

Jak zachowa się żyroskop gdy zwiększymy lub zmniejszymy “przeciwwagę” ?

Żyroskop

Precesja

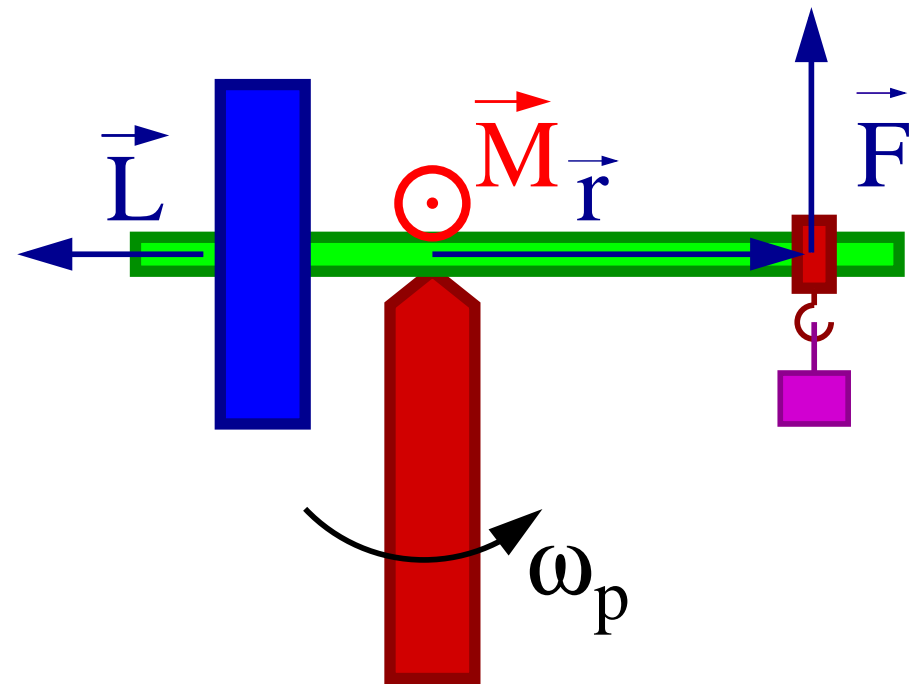
zwiększone obciążenie



zgodnie z ruchem wskazówek zegara
(patrząc os góry)

$$\text{Częstość precesji } \omega_p = \frac{mrg}{L}$$

zmniejszone obciążenie
(przypadek bąka)



przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

⇒ proporcjonalna do dodanej/brakującej masy

Żyroskop

Paradoks ?

Nie wirujący bąk wychylony z położenia równowagi $\vec{L} = 0$
lub nie zrównoważony żyroskop $\vec{L} = 0 \Rightarrow$ wywracają się

Natomiast jeśli $\vec{L} \neq 0$ to bąk i żyroskop podlegają precesji
 \Rightarrow nigdy się nie wywróca (zaniedbując siły tarcia).

Czy jest to słuszne dla dowolnie małych wartości \vec{L} ?

Z doświadczenia wiemy, że nie !

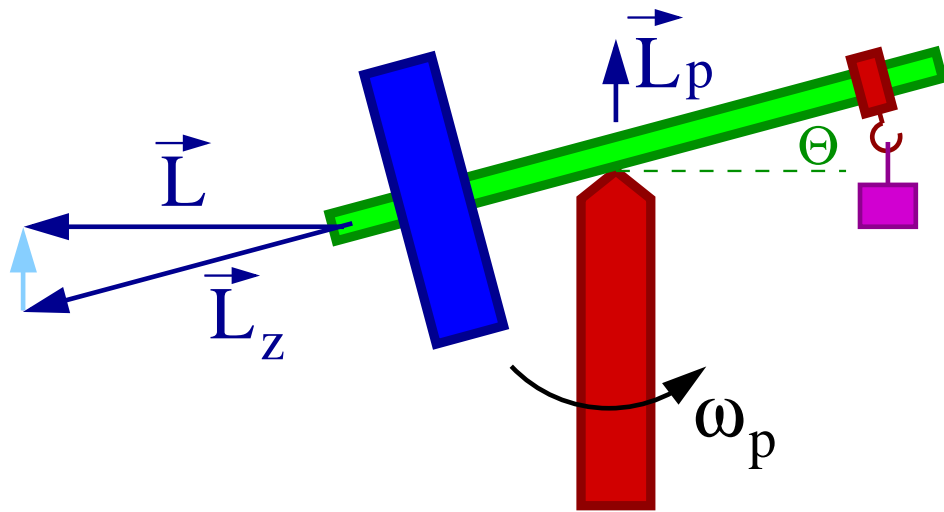
Wirujący bąk wywraca się zanim prędkość kąтова jego ruchu wirowego spadnie do zera.

Nasze rozważania precesji nie były ścisłe

\Rightarrow dla małych momentów pędu musimy uwzględnić dodatkowe efekty...

Żyroskop

Precesja



Niech moment pędu zrównoważonego żyroskopu wynosi \vec{L} .

Co się dzieje gdy zdejmujemy jeden ciężarek ?

Wartość całkowitego moment pędu nie ulega zmianie, gdyż moment siły ciężkości jest prostopadły do \vec{L} .

Obrót żyroskopu z częstością ω_p względem pionowej osi \Rightarrow moment pędu $\vec{L}_p = \omega_p I_p$.

Aby całkowity moment pędu nie uległ zmianie, oś żyroskopu musi się nachylić o kąt:

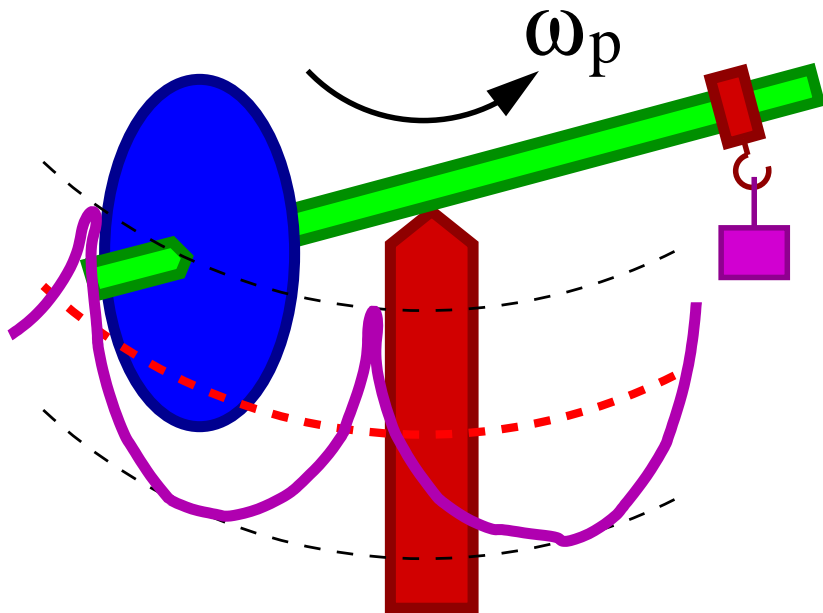
$$\theta \sim \frac{L_p}{L} = \frac{mrgI_p}{L^2}$$

Duże $L \Rightarrow \theta \rightarrow 0$ (L_p można pominąć)

Małe $L \Rightarrow$ żyroskop/bąk wywraca się...

Żyroskop

Nutacja



Idealna precesja, gdy koniec ramienia żyroskopu porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, zachodzi tylko przy **szczególnym** wyborze warunków początkowych.

W ogólnym przypadku na precesję nakładają się oscylacje ramienia żyroskopu wokół położenia “**stacjonarnej precesji**” \Rightarrow **nutacje**.

Charakter tych dodatkowych oscylacji zależy od warunków początkowych.

Zazwyczaj są mało widoczne i zanikają w czasie (**tłumienie**).

Ich amplituda rośnie dla małych wartości L



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego