



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Mechanika ośrodków ciągłych

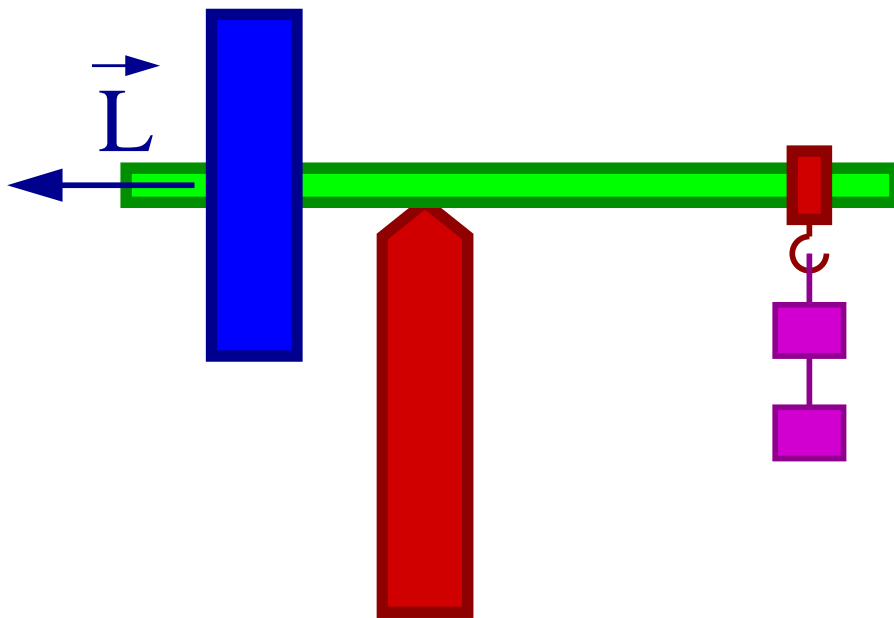
## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład XIII:

- Bryła sztywna: tensor momentu bezwładności
- Statyka cieczy
- Prawo Bernoulliego
- Lepkość

# Żyroskop

## Równowaga



“Waga”: ciężar żyroskopu jest zrównoważona przez odpowiednio dobrane ciężarki.

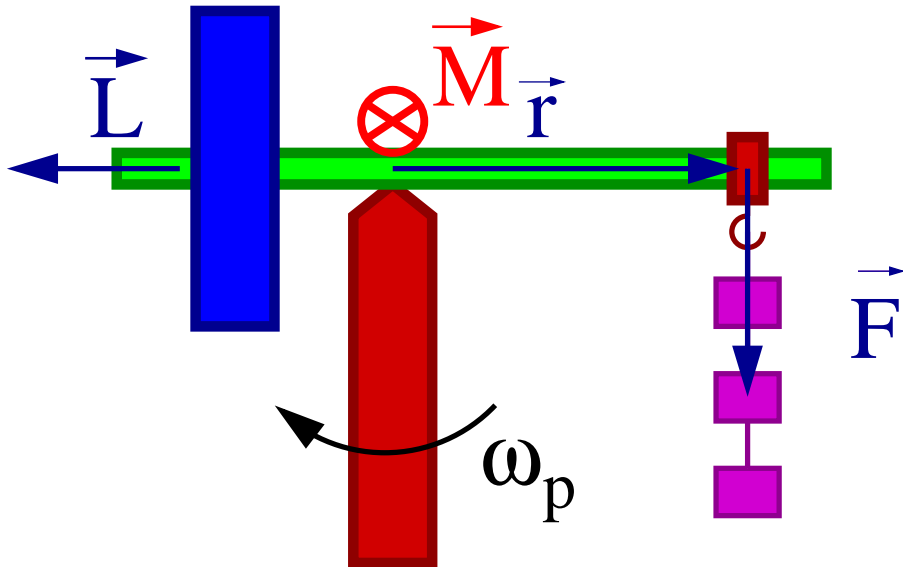
Jeśli żyroskop jest w równowadze przy  $\vec{L} = 0$  to będzie także w równowadze dla  $\vec{L} \neq 0$

Jak zachowa się żyroskop gdy zwiększymy lub zmniejszymy “przeciwwagę” ?

# Żyroskop

## Precesja

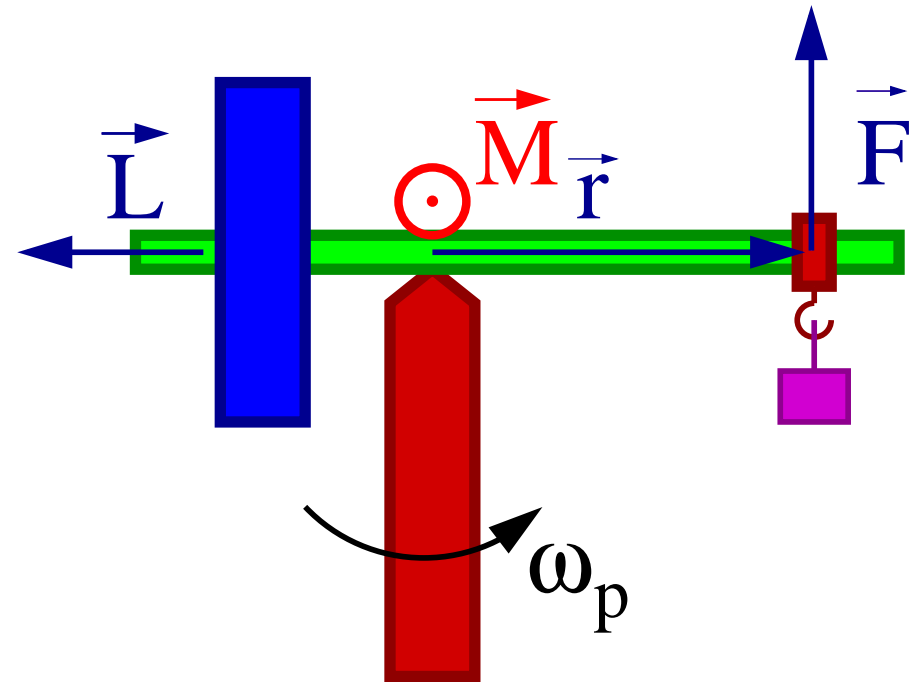
zwiększone obciążenie



zgodnie z ruchem wskazówek zegara  
(patrząc os góry)

$$\text{Częstość precesji } \omega_p = \frac{mrg}{L}$$

zmniejszone obciążenie  
(przypadek bąka)

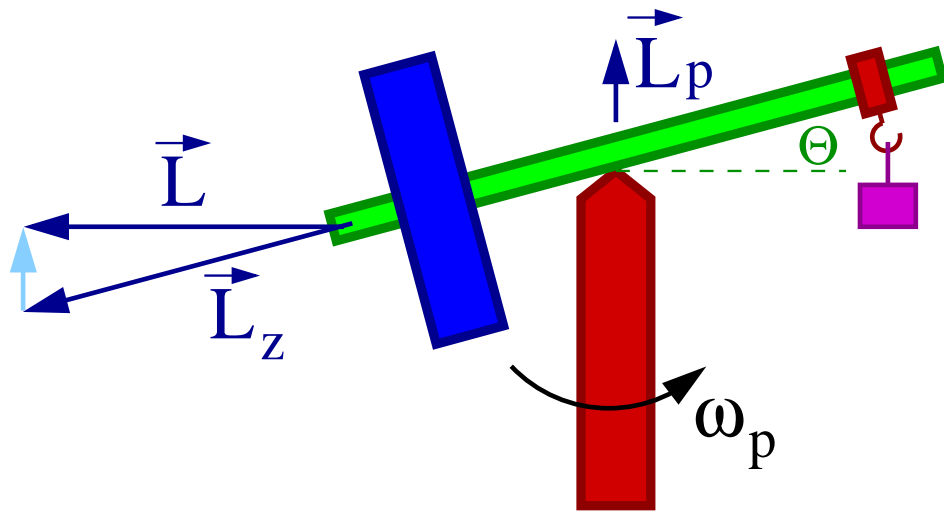


przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

⇒ proporcjonalna do dodanej/brakującej masy

# Żyroskop

## Precesja



Niech moment pędu zrównoważonego żyroskopu wynosi  $\vec{L}$ .

Co się dzieje gdy zdejmujemy jeden ciężarek ?

Wartość całkowitego moment pędu nie ulega zmianie, gdyż moment siły ciężkości jest prostopadły do  $\vec{L}$ .

Obrót żyroskopu z częstością  $\omega_p$  względem pionowej osi  $\Rightarrow$  moment pędu  $\vec{L}_p = \omega_p I_p$ .

Aby całkowity moment pędu nie uległ zmianie, oś żyroskopu musi się nachylić o kąt:

$$\theta \sim \frac{L_p}{L} = \frac{mrgI_p}{L^2}$$

Duże  $L \Rightarrow \theta \rightarrow 0$  ( $L_p$  można pominąć)

Małe  $L \Rightarrow$  żyroskop/bąk wywraca się...

# Moment pędu

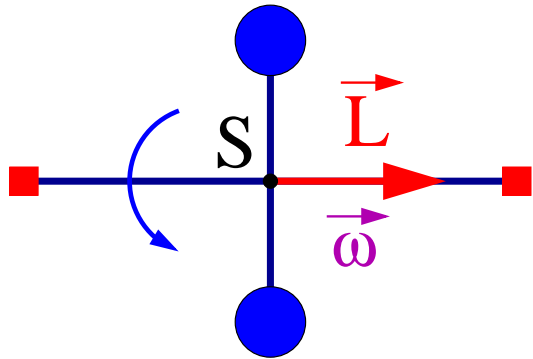
Do tej pory rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy względem ustalonej osi.

Naogół była to oś symetrii bryły, lub oś do niej równoległa.

W ogólnym przypadku problem jest bardziej skomplikowany

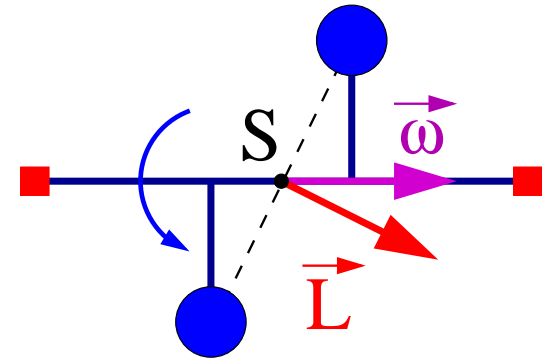
Przykład - dwa wirujące ciężarki

Ciężarki w jednej płaszczyźnie  $\perp$  osi



Oś obrotu jest osią symetrii  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Ciężarki rozsunięte wzdłuż osi obrotu



Oś obrotu nie jest osią symetrii  $\Rightarrow \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

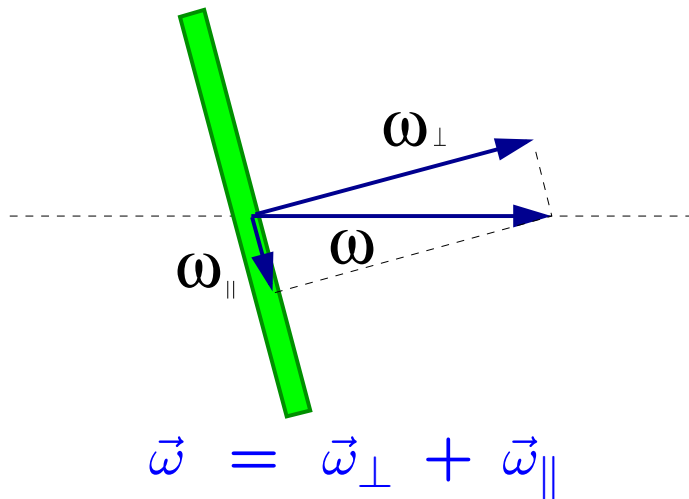
$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \perp \vec{r}_i$$

# Moment pędu

## Przykład II

Dysk wirujący wokół osi nachylonej do osi symetrii

Prędkość kątową możemy rozłożyć na składową równoległą i prostopadłą do osi symetrii

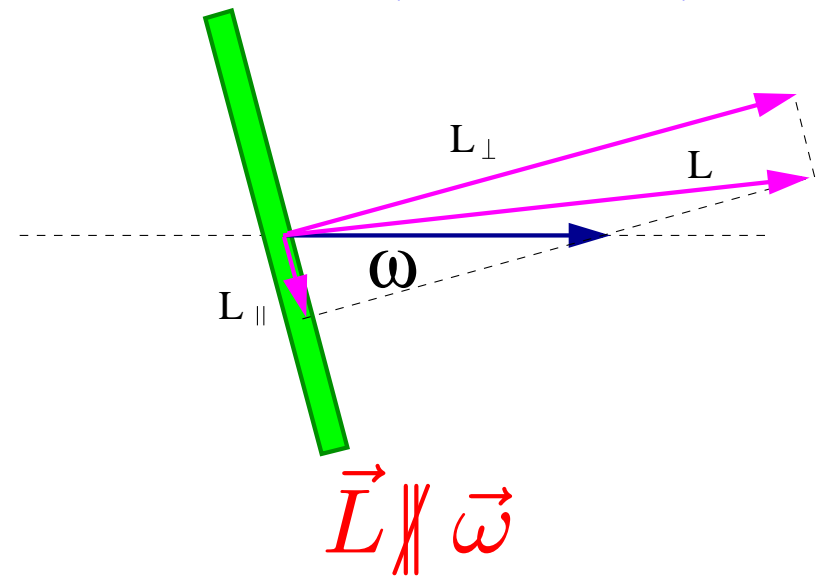


Moment bezwładności dysku: (wykład 12)

$$I_{\perp} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{\parallel} = \frac{1}{4}mr^2 = \frac{1}{2} I_{\perp}$$

Moment pędu dysku

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_{\parallel} \\ &= I_{\perp} \vec{\omega}_{\perp} + I_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel} \\ &= I_{\perp} \left( \vec{\omega}_{\perp} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{\parallel} \right) \end{aligned}$$



# Moment pędu

W ogólnym przypadku bryła sztywna może nie mieć żadnej osi symetrii.

Jak wtedy wyznaczyć moment pędu, znając prędkość kątową  $\vec{\omega}$  ?

Zdefinicji momentu pędu:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Z definicji bryły sztywnej:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Otrzymujemy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

korzystamy z tożsamości wektorowej:  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

Kierunek  $\vec{L}$  zależy od kierunku  $\vec{\omega}$  jak i położeń poszczególnych elementów bryły  $\vec{r}_i$ .

# Moment pędu

Rozpisując na składowe:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_i \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

Otrzymujemy (na przykładzie  $L_x$ ):

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[ \omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] \\ &= \omega_x \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \cdot \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \cdot \sum_i m_i x_i z_i \end{aligned}$$

$L_x$  zależy w ogólności od wszystkich składowych prędkości kątowej !

Podobnie:

$$\begin{aligned} L_y &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i y_i + \omega_y \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \cdot \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y \cdot \sum_i m_i y_i z_i + \omega_z \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{aligned}$$



# Tensor momentu bezwładności

Wyrażenie na składowe  $\vec{L}$  możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

tensor momentu bezwładności

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

ogólna postać ( $u, v = x, y, z$ )

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{uv} = \sum m_i (\delta_{uv} r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

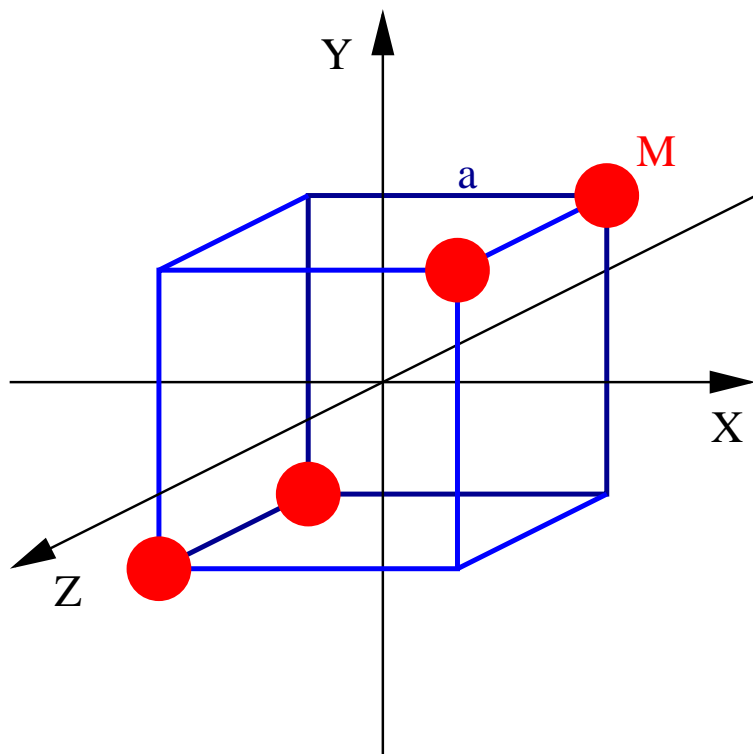
$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r}) (\delta_{uv} r^2 - u v)$$

delta Kroneckera:  $\delta_{uv} = 1$  dla  $u = v$  i  $0$  dla  $u \neq v$

# Tensor momentu bezwładności

## Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M a^2$$

# Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera (tensor symetryczny  $\Rightarrow$  6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak **obrócić osie układu** odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne zniknęły: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

$\Rightarrow$  pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  (wartości własne)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xx} \omega_x, I_{yy} \omega_y, I_{zz} \omega_z)$$

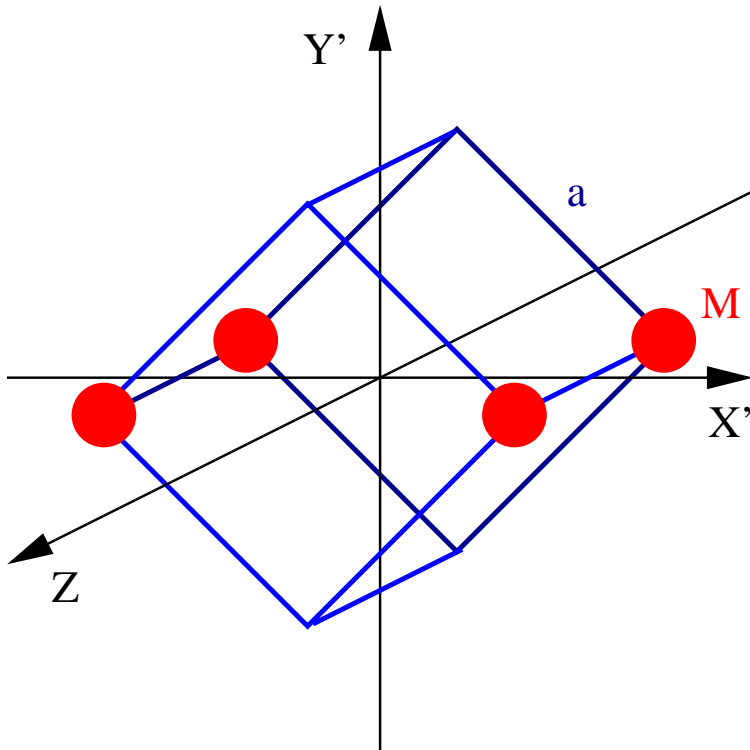
Dla obrotu wokół osi głównej  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$$\text{np. } \vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$$

# Osie główne

## Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześciangu:



Tensor bezwładności

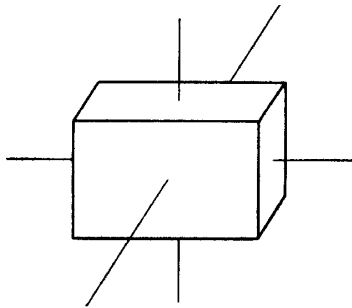
$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M a^2$$

Osie X', Y' i Z są osiami głównymi  $\hat{I}$ :

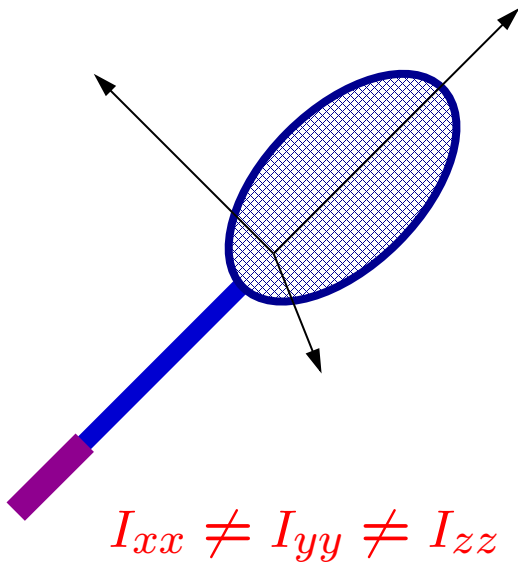
- oś X' - najmniejszy moment bezwładności
- oś Y' - największy moment bezwładności
- oś Z - pośredni moment bezwładności

# Osie główne

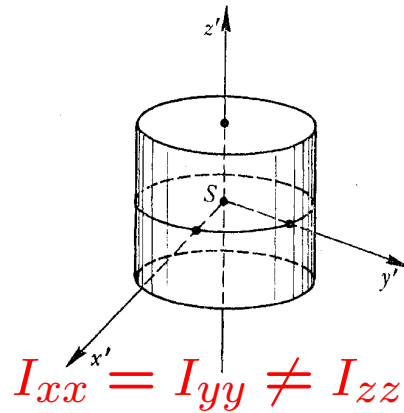
## Prostopadłościan



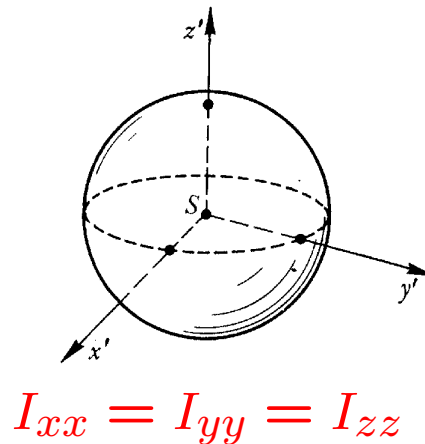
## Rakieta tenisowa



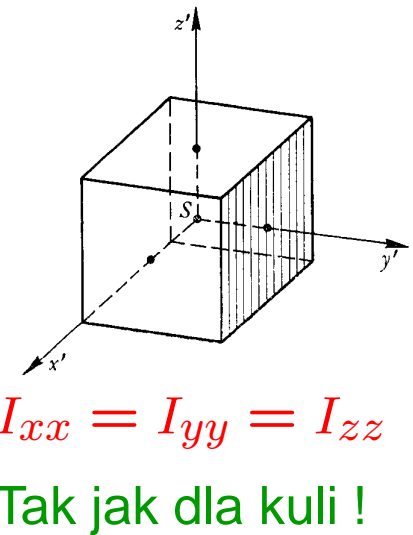
## Walec



## Kula



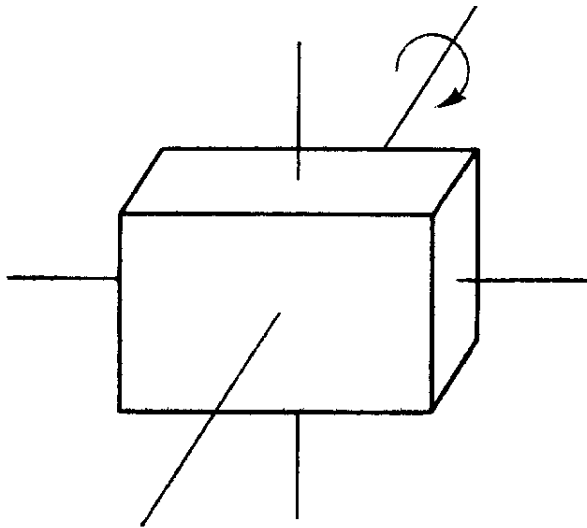
## Sześcian



# Osie główne

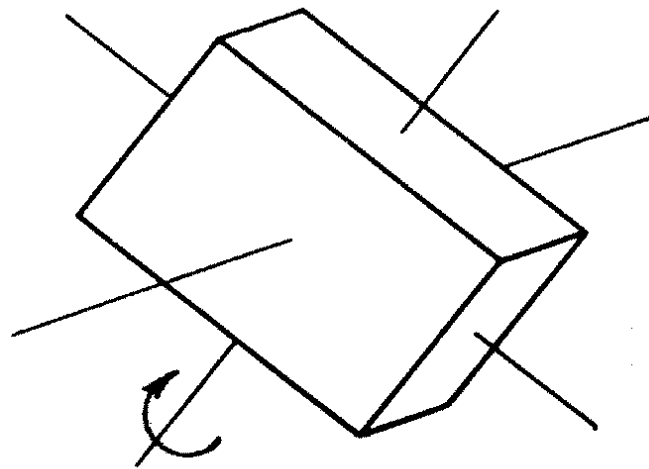
W przypadku bryły wirującej **swobodnie** (stała wartość  $\vec{L}$ ) stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora  $\vec{\omega}$ ) możliwy jest **tylko** wokół osi głównych o **największym** i **najmniejszym** momencie bezwładności

Oś o największym  $I$



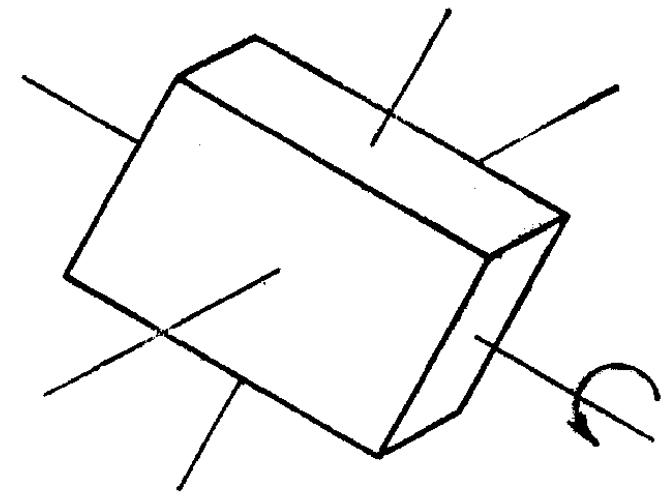
obrót stabilny

Oś o pośrednim  $I$



obrót niestabilny

Oś o najmniejszym  $I$



obrót stabilny

# Osie główne

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

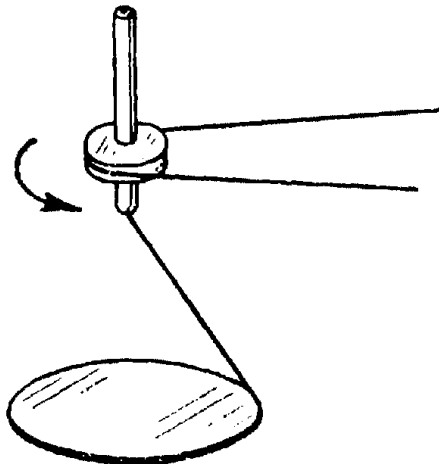
$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

Jeśli nałożymy **więzy** narzucające obrót ciała ze **stałą prędkością kątową**  $\vec{\omega}$  to przyjmie ono ułożenie odpowiadające **maksymalnej energii kinetycznej**

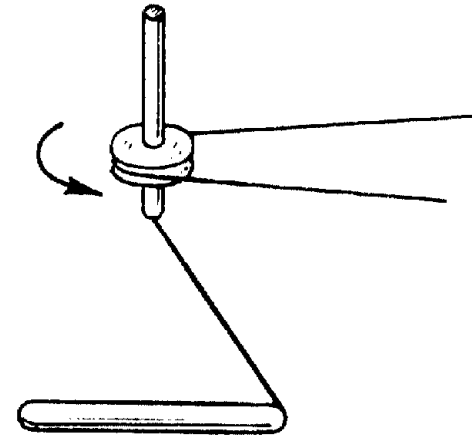
⇒ obrót wokół osi o **największym momencie bezwładności**

⇒ maksymalna wartość **momentu pędu**

Wirujący dysk



Wirujący pręt



## Osie główne

### Wirujący łańcuszek

- Przybiera kształt obręczy  
odpowiadający **maksymalnemu momentowi bezwładności**  
⇒ maksymalnej wartości momentu pędu  
⇒ **maksymalnej energii kinetycznej**

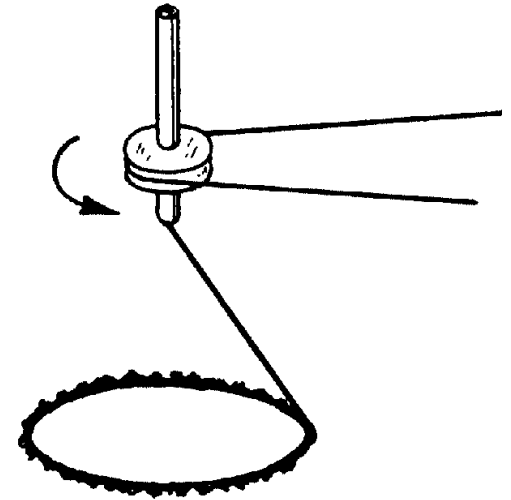
### W układzie obracającym się

- Siła odśrodkowa dąży do rozmieszczenia masy jak najdalej od osi obrotu.  
Stabilny jest stan odpowiadający minimum energii potencjalnej (siły odśrodkowej)

$$\vec{F}_i = m_i \omega^2 \vec{r}_{i\perp} \Rightarrow E_{p,i} = -\frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{\perp}^2$$
$$E_p = \sum_i E_{p,i} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_{\perp}^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 I = -E_k$$

Minimum energii potencjalnej odpowiada maksimu energii kinetycznej.

W układzie laboratoryjnym ⇒ masa “oddala się” od osi zgodnie z zasadą bezwładności





# Mechanika płynów

## Płyn

Substancja, która może **dowolnie zmieniać swój kształt** w zależności od naczynia, w którym się znajduje, a także **swobodnie się przemieszczać** (przepływać) pod wpływem przyłożonych sił (ciśnień).

**W tej ogólnej definicji do płynów zaliczamy zarówno ciecze jak i gazy!**

Mikroskopowo płynem nazwiemy substancje, której molekuly mogą swobodnie przemieszczać się względem siebie (w odróżnieniu od molekuł w kryształach).

Przy czym w cieczech molekuly pozostają związane wzajemnymi oddziaływaniami, a w gazie nie są ze sobą związane.

## Płyn doskonały (idealny)

Płynem doskonałym nazwiemy ciecz nieściśliwą, w której nie występują opory ruchu (poza bezwładnością cieczy).

# Pojęcia podstawowe

## Gęstość

Definiujemy jako stosunek masy do objętości (tak jak dla ciał stałych):

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

W przypadku płynu doskonałego  $\rho = \text{const.}$  W ogólnym przypadku  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

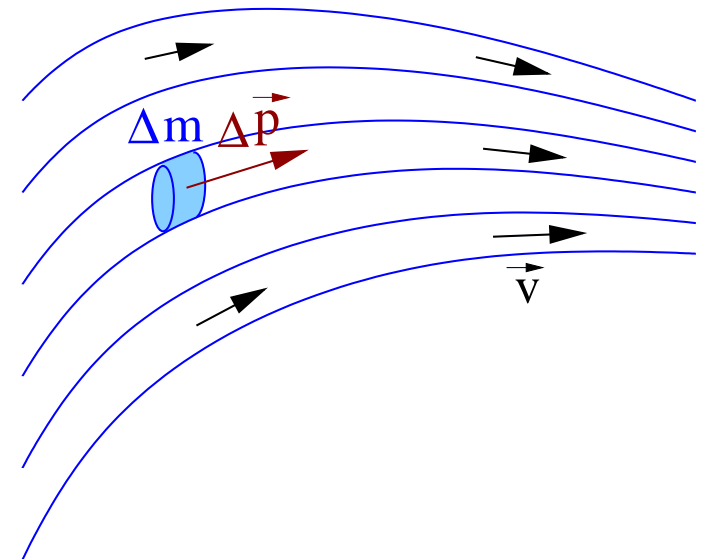
## Prędkość przepływu

Definiujemy jako granicę średniej prędkości niewielkiej objętości płynu.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta m}$$

W ogólnym przypadku, także dla płynu doskonałego, zależy od położenia i czasu:  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ .

Przepływ stacjonarny: niezależny od czasu,  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$



# Pojęcia podstawowe

## Równanie ciągłości

W przypadku przepływu stacjonarnego, zmiana prędkości przepływu wzdłuż linii prądu wiąże się ze zmianą przekroju poprzecznego: przepływ masy przez kolejne powierzchnie musi być taki sam

$$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2$$

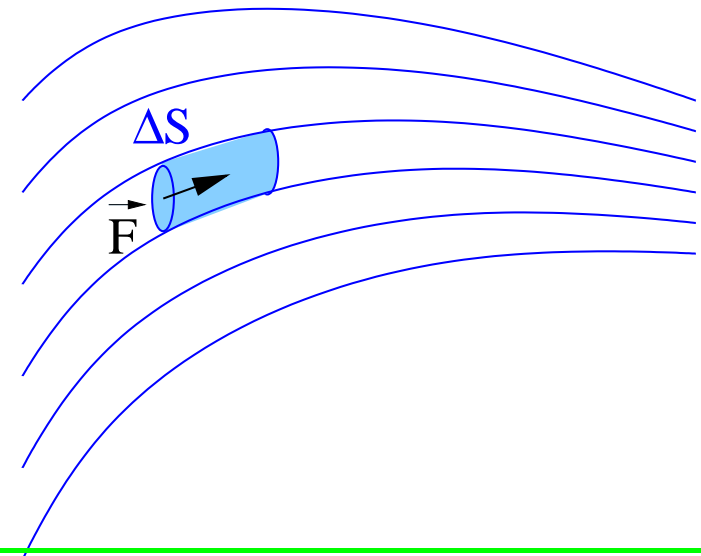
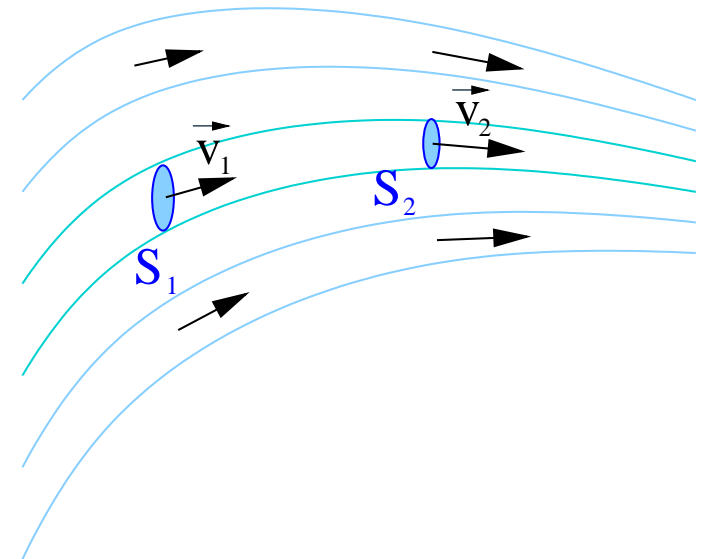
Dla płynu idealnego:

$$S v = \text{const}$$

## Ciśnienie

Siła działająca na jednostkę powierzchni elementu płynu ze strony płynu lub ścianek naczynia

$$p = \frac{|\vec{F}|}{\Delta S}$$



# Statyka

## Prawo Pascala

Sformułowane w połowie XVIIw. przez Blaise'a Pascala

Jeżeli na ciecz lub gaz w zbiorniku zamkniętym wywierane jest **ciśnienie zewnętrzne**, to ciśnienie wewnątrz zbiornika jest **wszędzie jednakowe** i równe ciśnieniu zewnętrznemu.

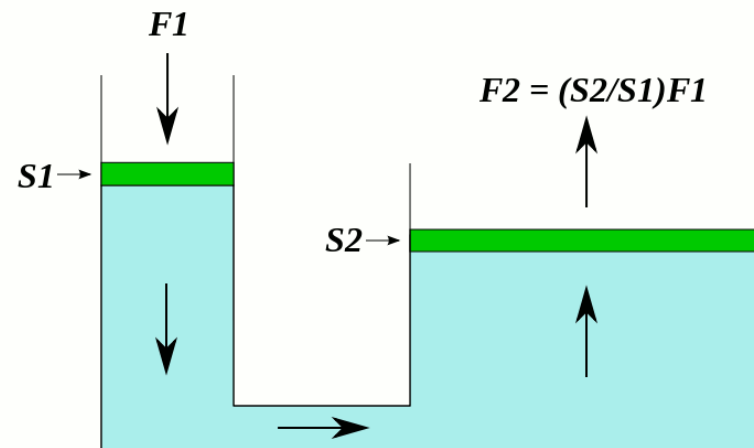
Prawo to obowiązuje w przypadku **statycznym** (płyn nie porusza się). Nie uwzględnia też wpływu oddziaływania grawitacyjnego (ciśnienia hydrostatycznego).



## Prasa hydrauliczna

Przykład wykorzystania prawa Pascala

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$



# Statyka

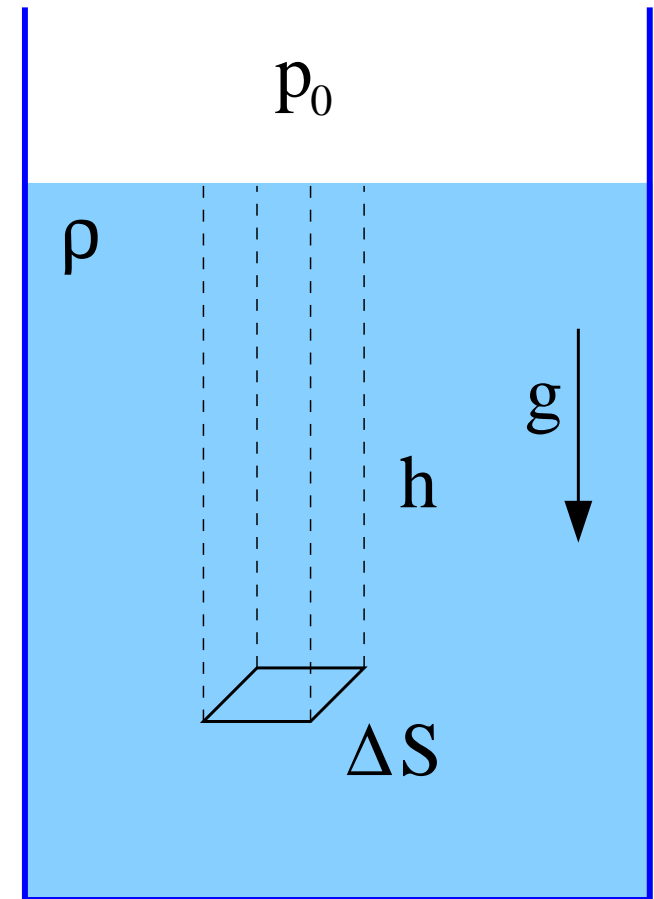
## Ciśnienie hydrostatyczne

Szczególnym przypadkiem oddziaływania na ciecz jest pole grawitacyjne Ziemi. Na element o powierzchni  $\Delta S$  znajdujący się na głębokości  $h$  wywierane jest zewnętrzne ciśnienie  $p_0$  oraz dodatkowy nacisk słupa cieczy

$$N = \Delta Q = \rho g h \Delta S$$

Całkowite ciśnienie na głębokości  $h$  wyniesie więc:

$$p = \rho g h + p_0$$



# Statyka

## Siła wyporu

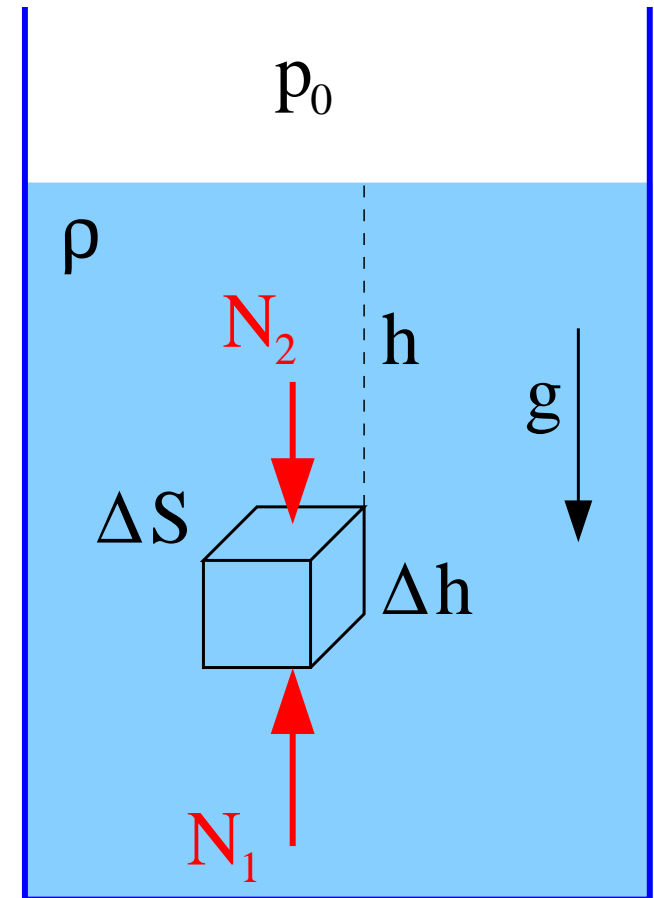
Prawo Archimedesesa wynika wprost ze wzoru na ciśnienie hydrostatyczne. Dla prostopadłościanu zanurzonego całkowicie w cieczy o gęstości  $\rho$ :

$$\begin{aligned} W &= N_1 - N_2 = \rho g (h + \Delta h) \Delta S - \rho g h \Delta S \\ &= \rho g \Delta h \Delta S \\ &= \rho g V \end{aligned}$$

gdzie  $V$  jest objętością ciała, czyli objętością wypartej cieczy.

Siła wyporu jest równa co do wartości ciężarowi cieczy wypartej przez ciało (ale przeciwnie skierowana)

$$\vec{W} = -\rho V \vec{g}$$



# Statyka

## Siła wyporu

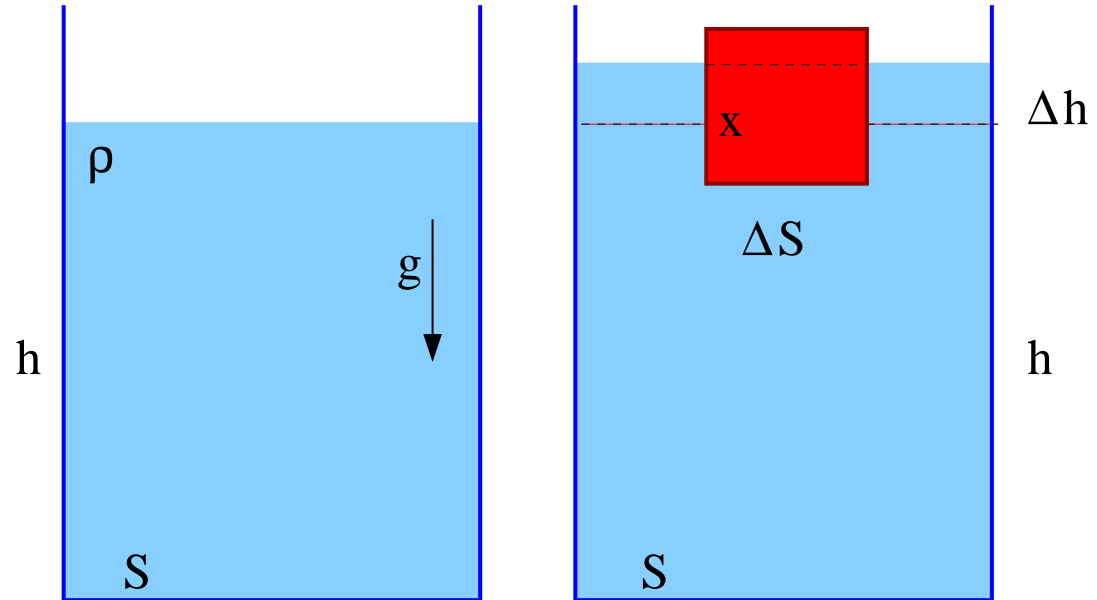
Rozważmy naczynie z cieczą, do którego wkładamy ciało o gęstości mniejszej od gęstości cieczy.

Nowa wysokość cieczy w naczyniu

$$(h + \Delta h)S = hS + x\Delta S$$

Zanurzenie  $x$  wynika z siły wyporu

$$g \rho x \Delta S = Q$$



Nacisk cieczy na dno naczynia po włożeniu ciała wyniesie

$$N = g \rho (h + \Delta h)S = g \rho h S + g \rho x \Delta S = g \rho h S + Q$$

Nacisk zwiększa się dokładnie o ciężar pływającego ciała.

# Przepływ płynu

## Płyn idealny

Dla płynu idealnego nie występują opory ruchu - przepływ odbywa się bez strat energii.

Płyn idealny jest też nieściśliwy - nie zmienia się jego energia wewnętrzna (pomijamy zmiany temperatury). Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii do opisu przepływu!

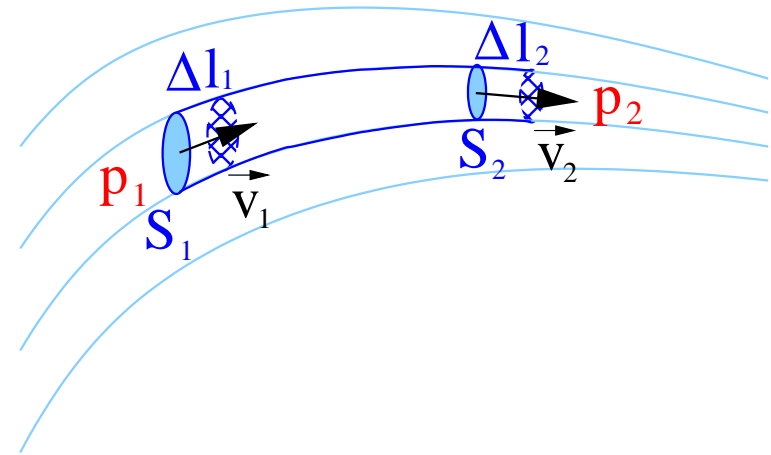
Rozważmy objętość płynu ograniczoną powierzchniami  $S_1$  i  $S_2$ . W czasie  $\Delta t$  przesunie się ona odpowiednio o

$$\Delta l_1 = v_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = v_2 \Delta t$$

Praca sił ciśnienia działającego na rozważaną objętość płynu wyniesie

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 \\ &= p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \end{aligned}$$

gdzie z równania ciągłości:  $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 = \Delta V$





# Przepływ płynu

Jeśli przepływ jest stacjonarny to zmianę energii kinetycznej wybranej objętości cieczy możemy policzyć zważając, że po czasie  $\Delta t$  objętość  $\Delta V$  poruszająca się z prędkością  $\vec{v}_1$  zastępuje objętość  $\Delta V$  poruszająca się z prędkością  $\vec{v}_2$

$$\Delta E_k = \frac{\Delta V \rho v_2^2}{2} - \frac{\Delta V \rho v_1^2}{2}$$

Zmiana energii kinetycznej wynika z pracy wykonanej przez siły ciśnienia

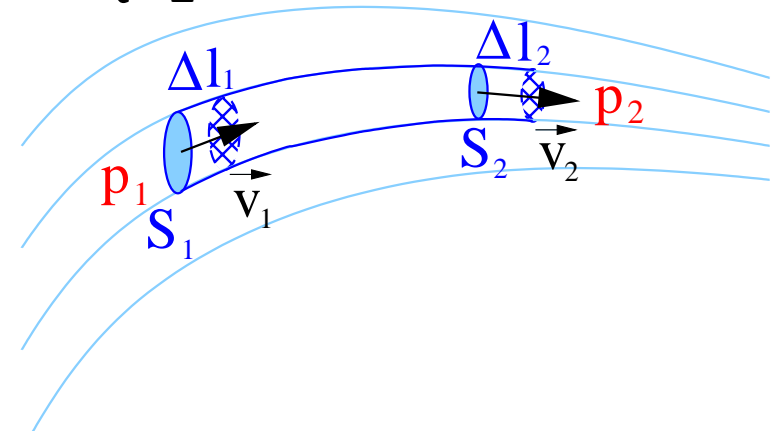
$$\Delta W_p = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{\Delta V \rho v_2^2}{2} - \frac{\Delta V \rho v_1^2}{2} = \Delta E_k$$

dzieląc przez  $\Delta V$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}$$

Ale powierzchnie  $S_1$  i  $S_2$  mogliśmy wybrać dowolnie. Musi więc być spełnione

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$



# Prawo Bernouliego

Jeśli przepływ odbywa się w polu grawitacyjnym  $g$  to dodatkowo trzeba uwzględnić zmianę energii potencjalnej:

$$\Delta E_p = \Delta V \rho g y_2 - \Delta V \rho g y_1$$

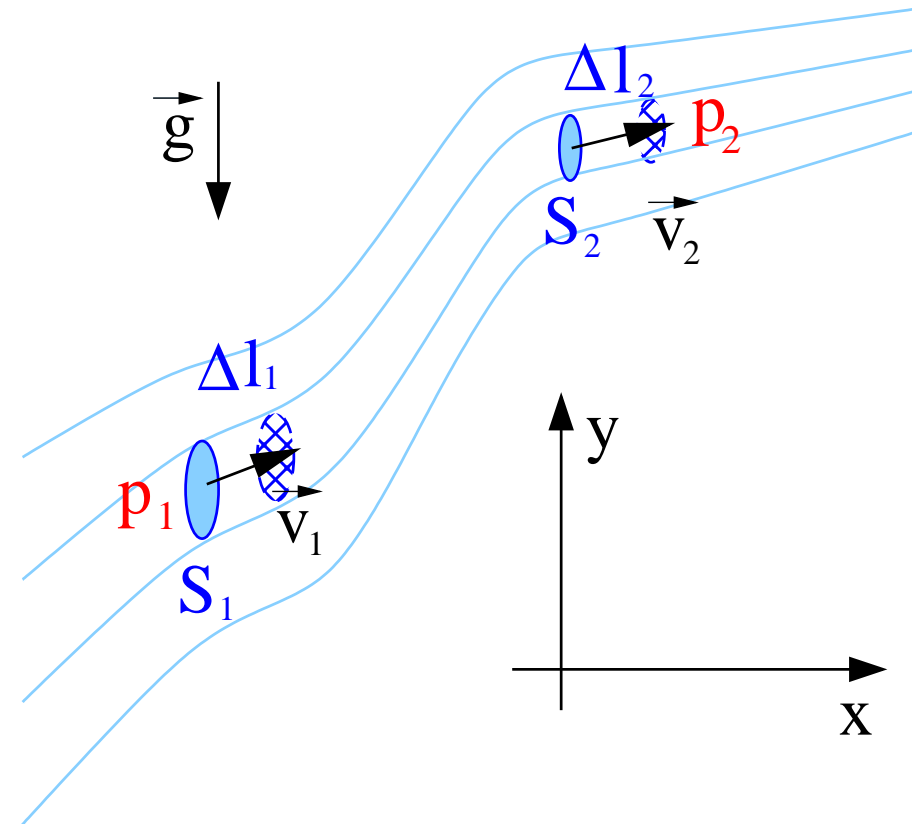
Z zachowania energii mamy wtedy:

$$\Delta W_p = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Co prowadzi do ostatecznego wzoru:

$$p + \rho g y + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

zwanym **prawem Bernouliego**



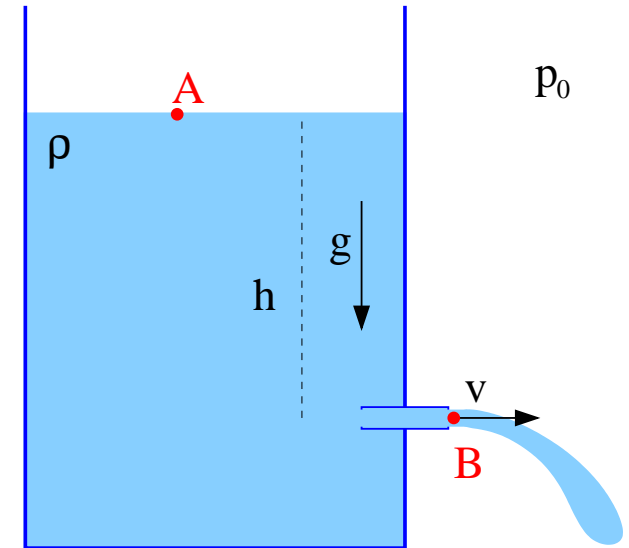
# Prawo Bernouliego

## Przykład

Z jaką prędkością wypływa ciecz z naczynia, jeśli otwór znajduje się  $h$  poniżej poziomu cieczy?

Stosując prawo Bernouliego do punktów A i B:

$$p_0 + \rho gh = p + \frac{\rho v^2}{2}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



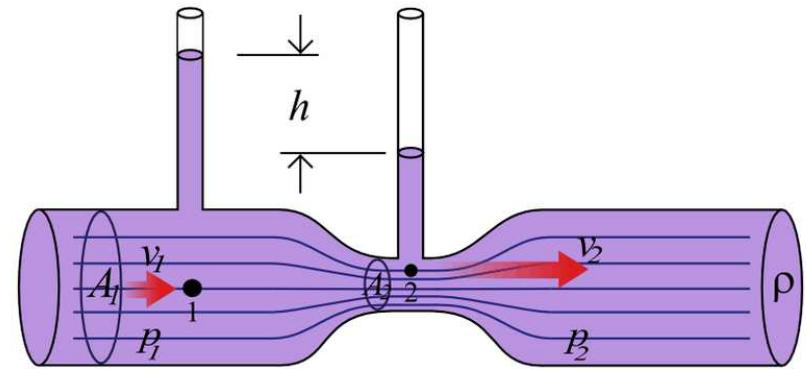
Tak jak przy spadku swobodnym lub wahadle!

Zaniedbujemy opory!

## Dysza Venturiego

Przyrząd służący do pomiaru prędkości cieczy lub gazu

$$\Delta p = \rho gh = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho v_1^2}{2} \left( \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)$$

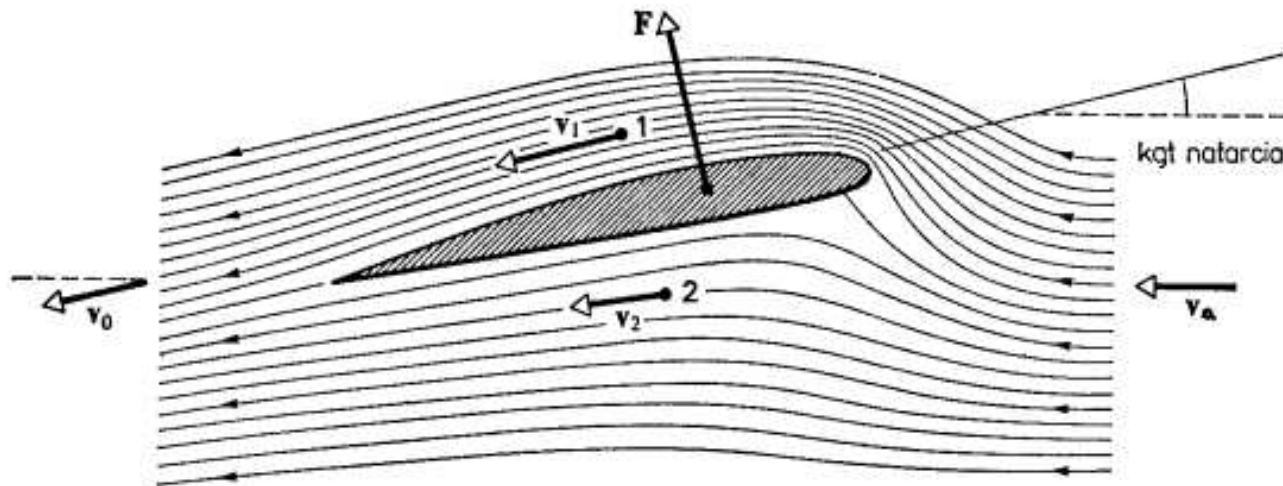


# Ruch w ośrodku

## Siła nośna

Prawo Bernouliego tłumaczy także powstawanie siły nośnej w przypadku ciał (na przykład skrzydła samolotu) poruszających się w ośrodku.

Ciśnienie jest mniejsze w obszarze większych prędkości opływania ( $p + \frac{\rho v^2}{2} = const$ )  
⇒ ciało jest “wciągane” w obszar większych prędkości

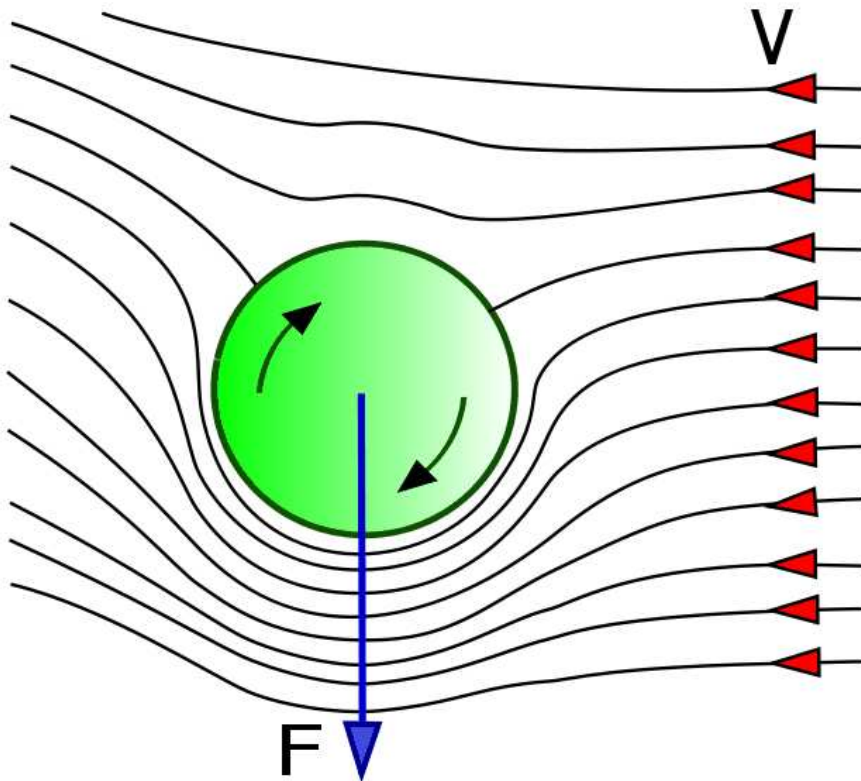


Ale można na to spojrzeć też z punktu widzenia **praw Newtona!** Siła nośna jest siłą reakcji! Ciało wymusza zmianę kierunku ruchu cząsteczek ośrodka, pcha go “w dół”...

# Ruch w ośrodku

## Zjawisko Magnusa

Walec wirujący w przepływającej poprzecznie do osi obrotu cieczy lub gązie.



zgodne kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu wzrasta
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe rośnie
- ⇒ ciśnienie maleje

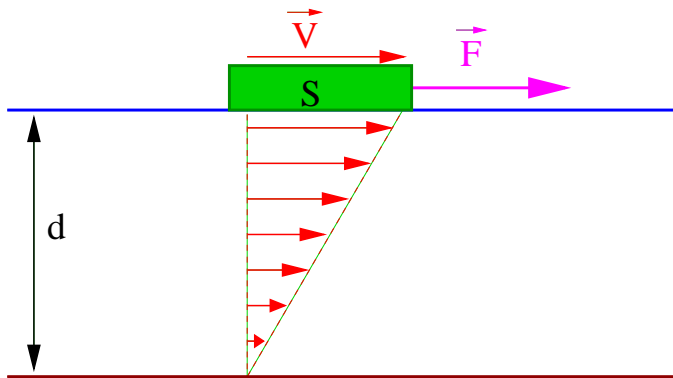
przeciwnie kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu maleje
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe maleje
- ⇒ ciśnienie wzrasta

⇒ wypadkowa siła nośna  $\vec{F}_N \perp \vec{v}$

# Lepkość

Ciało poruszające się po powierzchni cieczy:



Warstwa cieczy przylegająca do ciała porusza się wraz z nim.

Warstwa cieczy przylegająca do dna spoczywa.

“tarcie wewnętrzne” pomiędzy warstwami cieczy poruszającymi się z różnymi prędkościami.

Formuła empiryczna:

$$\vec{F}_L = -\vec{i}_V \eta \frac{v S}{d}$$

gdzie:  $v$  - prędkość ciała  
 $S$  - powierzchnia styku z cieczą  
 $d$  - głębokość naczynia  
 $\eta$  - współczynnik lepkości

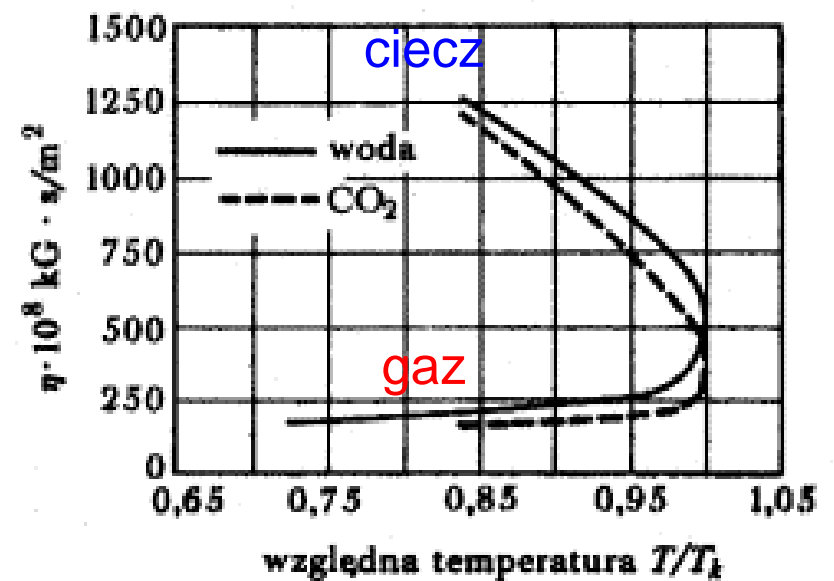
# Lepkość

Typowe wartości:

eter	0.0002	$Ns/m^2$
woda	0.001	$Ns/m^2$
gliceryna	1.5	$Ns/m^2$
miód	500.	$Ns/m^2$
wodór	0.000009	$Ns/m^2$
powietrze	0.000018	$Ns/m^2$
tlen	0.000021	$Ns/m^2$

Lepkość cieczy maleje z temperaturą

Lepkość gazów rośnie z temperaturą

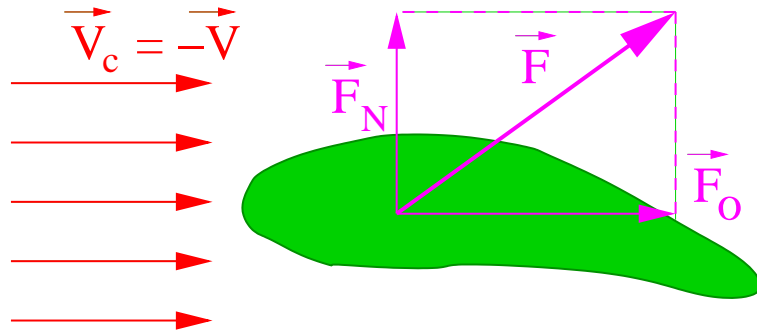


# Ruch w ośrodku

## Opór czołowy

Siły jakie działają na ciało poruszające się w ośrodku możemy podzielić na:

- siłę oporu czołowego  $\vec{F}_o \updownarrow \vec{v}$
- siłę nośną  $\vec{F}_N \perp \vec{v}$



Z analizy wymiarowej:

$$\vec{F}_o = -\vec{i}_v \frac{C}{2} \rho v^2 S \quad \text{wzór Newtona}$$

gdzie:  $v$  - prędkość ciała  
 $S$  - powierzchnia poprzeczna  
 $\rho$  - gęstość cieczy

$C$  - bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu ciała, jego orientacji względem  $\vec{v}$  oraz **bezwymiarowej** kombinacji parametrów:

$$Re = \frac{v l \rho}{\eta}$$

$Re$  - liczba Reynoldsa,  $l$  - wymiar poprzeczny

O.Reynolds (1883): skalowanie przepływów cieczy



# Ruch w ośrodku

## Opór czołowy

Dla ciała kulistego i  $Re \ll 1$   
istnieje ścisłe rozwiązanie problemu:  
(G.Stokes 1851)

$$C = \frac{24}{Re}$$

$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v}$$

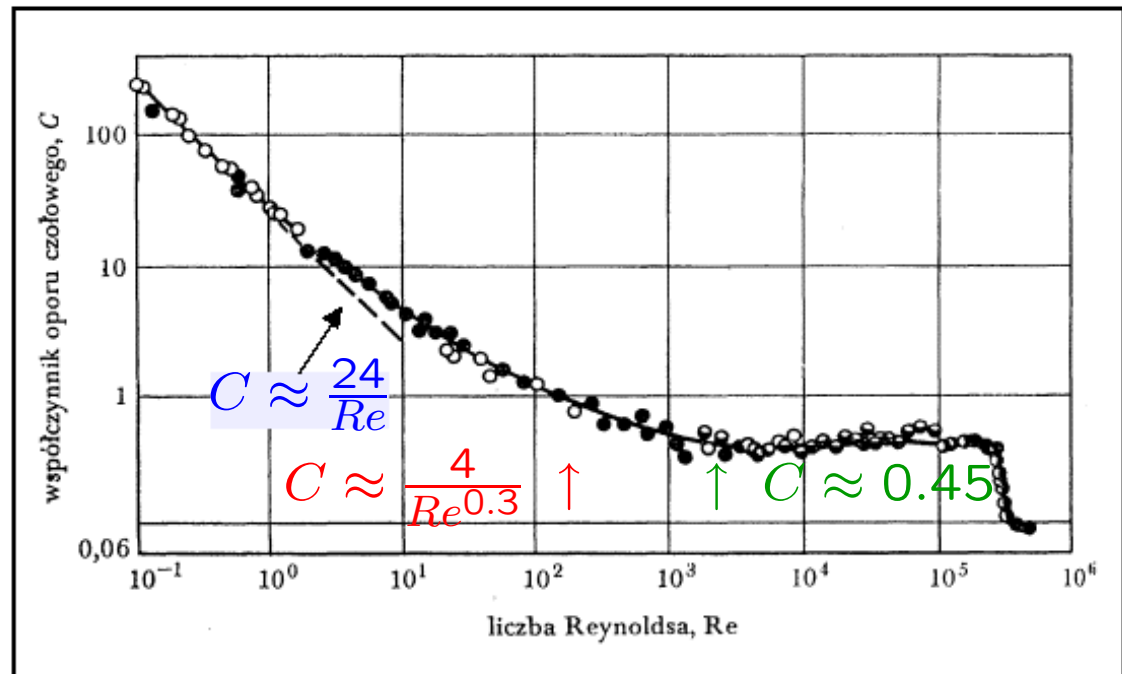
siła oporu proporcjonalna do  $v$

W obszarze dużych wartości  $Re$

$$C \approx \text{const}$$

$$F_o \sim v^2$$

Wyniki pomiarów współczynnika  $C$  dla kuli:

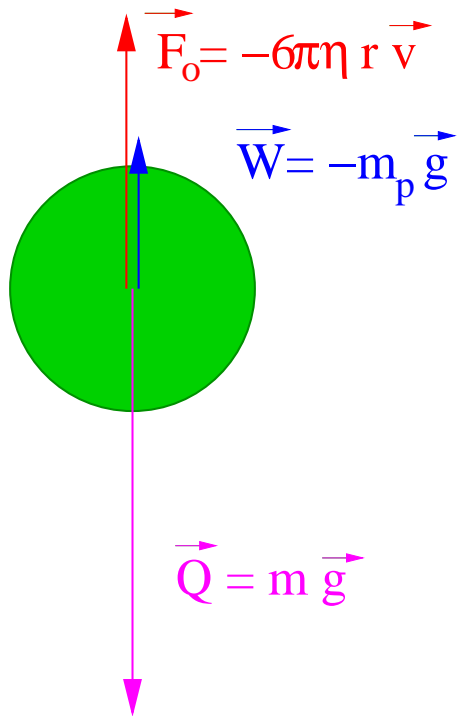


małe prędkości

duże prędkości

# Ruch w ośrodku

## Prędkość graniczna

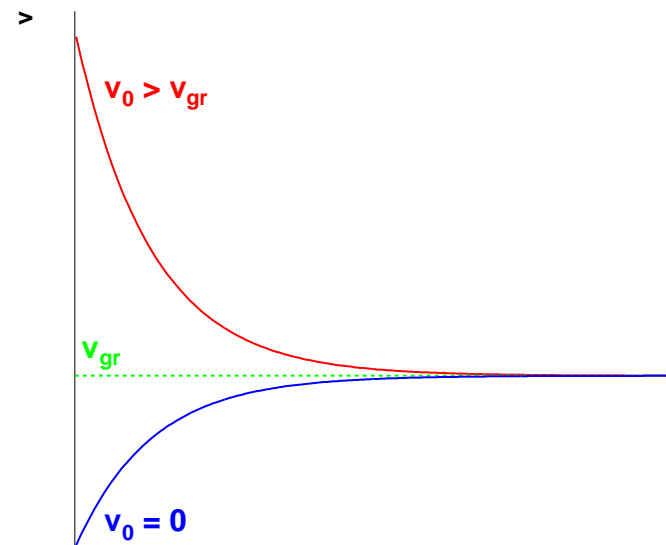


Równanie ruchu kuli spadającej w cieczy ( $Re \ll 1$ )

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_p\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

Rozwiązanie (ruch w pionie):

$$v(t) = v_{gr} + (v_0 - v_{gr}) \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m} t\right)$$



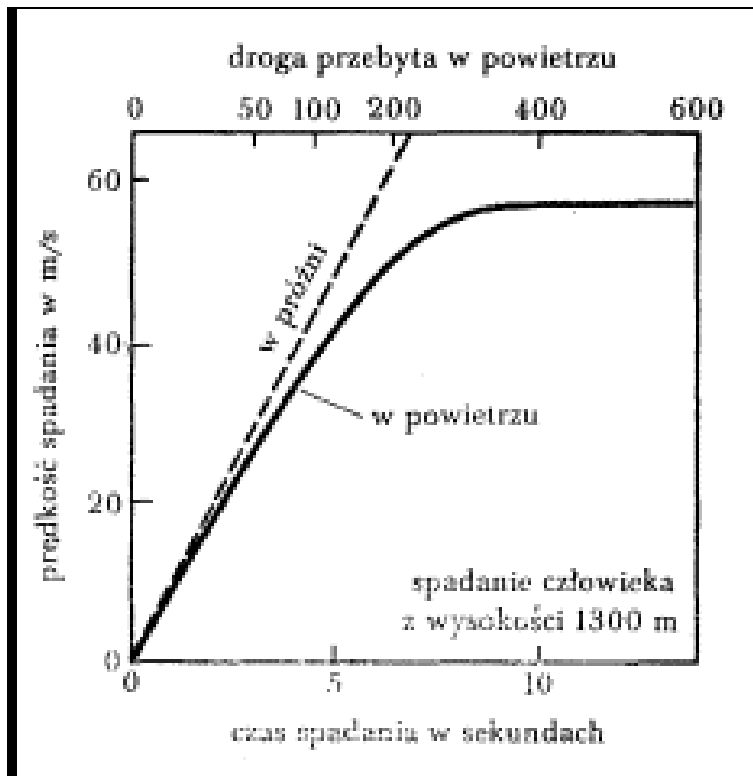
$v_{gr}$  - prędkość graniczna<sup>t</sup>

# Ruch w ośrodku

## Prędkość graniczna

Dla kuli spadającej w cieczy ( $Re \ll 1$ )

$$v_{gr} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho - \rho_p)}{\eta}$$



## Zależność od kształtu

Kula:

$$\begin{aligned}\vec{F}_o &= -6\pi \eta r \vec{v} \\ &\approx -18.8 \eta r \vec{v}\end{aligned}$$

Dysk ( $\perp \vec{v}$ ):

$$\vec{F}_o = -16 \eta r \vec{v}$$

Dysk ( $\parallel \vec{v}$ ):

$$\vec{F}_o = -\frac{32}{3} \eta r \vec{v}$$



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego