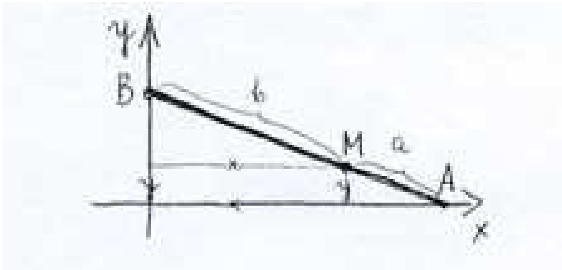
<u>Fizyka I (mechanika), ćwiczenia, seria 1</u>

Układ współrzędnych na płaszczyźnie.

Zadanie 1

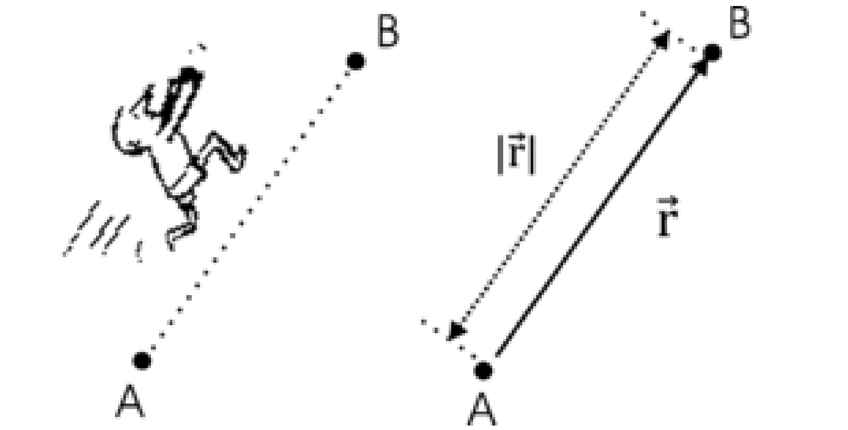
Odcinek o stałej długości porusza się tak, że jego punkty końcowe *A* i *B* ślizgają się po osiach odpowiednio *x* i *y* pewnego prostokątnego układu współrzędnych. Jaki tor zakreśla punkt *M* dzielący odcinek *AB* w stosunku *a*:*b*? jaki kształt ma tor dla *a*=*b*?



Wektory, współrzędne, operacje na wektorach

Wielkości występujące w przyrodzie możemy podzielić na:

- skalarne, to jest takie wielkości, które potrafimy opisać przy pomocy jednej liczby (skalara), np. masa, czy temperatura.
- wektorowe, czyli wielkości, które charakteryzujemy podając ich wartość oraz kierunek (np. prędkość, pęd, siła).



Ilustracja pojęcia przemieszczenia. Przemieszenie obiektu z punktu A do punktu B można opisać za pomocą wektora, który graficznie symbolizuje się strzałką.

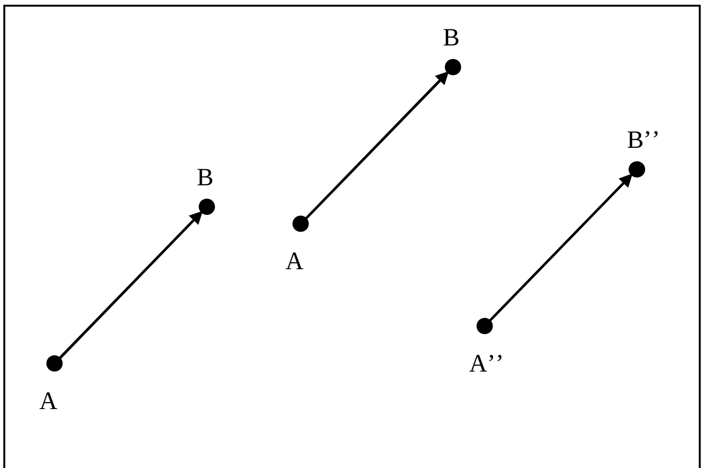
Historycznie pojęcie wektora wywodzi się z przemieszczenia. Opisując przemieszczenie jakiegoś obiektu, nie wystarczy podać wielkość tego przemieszczenia (np. 100 m) lecz również jego kierunek - np. obiekt przemieścił się o 100 m. w kierunku północno-zachodnim. Na rysunku 1 zaprezentowane są dwa punkty *A* i *B*. Przemieszczenie obiektu z punktu *A* do punktu *B* można wyrazić symbolicznie przy pomocy strzałki, której początek umieszczony jest w punkcie *A*, zaś grot w punkcie *B*. Kierunek wskazywany przez strzałkę określa kierunek przemieszczenia się obiektu, zaś długość strzałki wyraża wielkość przesunięcia. Wielkości, które zachowują się jak opisane powyżej przemieszczenie, nazywamy wektorami.

Graficznie wektory przedstawiane są za pomocą strzałki, pisząc je natomiast możemy użyć pogrubionej czcionki, np. **a** lub też rysować strzałkę nad litera symbolizującą wielkość wektorową, np: $\vec{A}$. Często interesuje nas tylko wartość (długość) wektora, którą oznacza się w następujący sposób: **a**, *a* lub $|\vec{a}|$.

Równość wektorów.

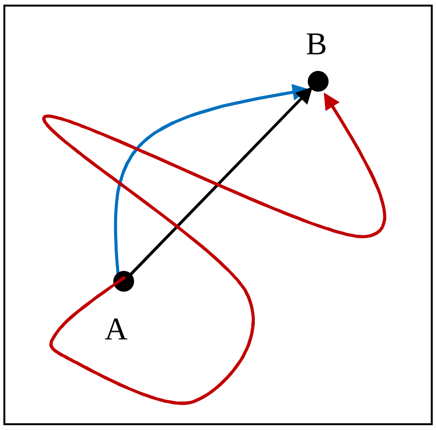
Na rysunku obok zaprezentowano trzy wektory. Wszystkie wektory mają tę samą długość, kierunek i zwrot, ilustrują zatem to samo przemieszczenie.

Z powyższego rysunku wynika również, że równoległe przesunięcie wektorów nie zmienia zawartej w nich informacji.

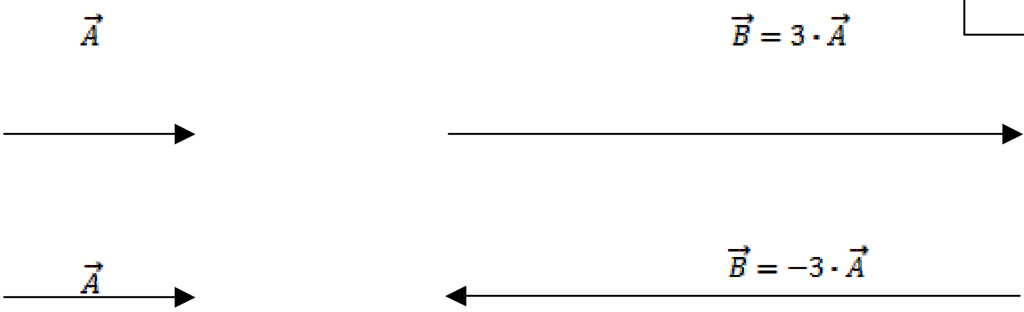


Pojęcie wektora i drogi.

Chociaż pojęcie wektora wywodzi się z opisu przemieszczenia obiektu, droga przebyta przez obiekt oraz jego przemieszczenie mogą być zupełnie inne co zilustrowano na rysunku obok. Ciało poruszając się z punkt A do punktu B może poruszać się pod drodze zaznaczonej kolorem czerwonym lub niebieskim. Obydwie drogi są różne, chociaż odpowiadają takiemu samemu przemieszeniu.

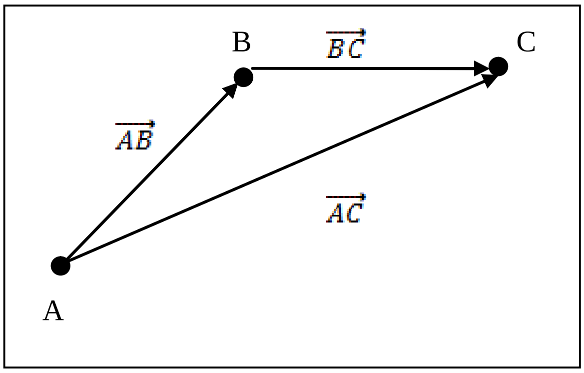


Mnożenie wektorów przez skalar.



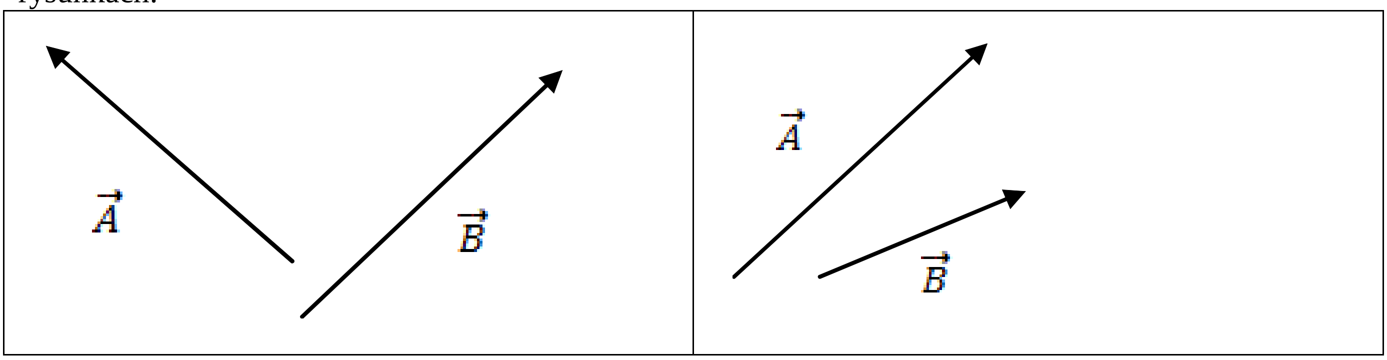
W wyniku mnożenia wektora $\vec{A}$ przez liczbę λ powstaje wektor o tym samym kierunku i λ razy większej długości: $\vec{B} = \lambda \cdot \vec{A}$. Zwrot wektora zależy od znaku skalara.

Dodawanie wektorów.
Wektorów nie można dodawać w sposób algebraiczny. Na rysunku poniżej zaprezentowano przemieszczenie obiektu z punktu *A* do punktu *B* (wyrażone przez wektor $\overrightarrow{AB}$) oraz dalsze przemieszczenie tego obiektu z punktu *B* do punktu *C* (opisane wektorem $\overrightarrow{BC}$. Wypadkowym przemieszczeniem jest przesunięcie się obiektu z punktu *A* do *C*. Możemy zauważyć, że:

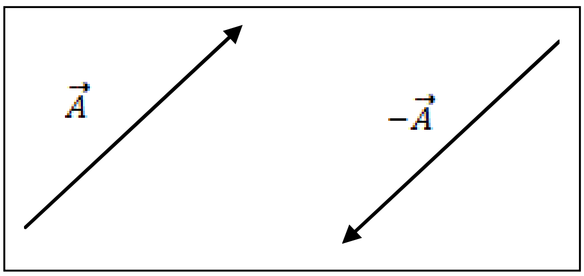


$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AC}|$$

Zadanie 2.
Metodą trójkąta oraz metodą równoległoboku dodaj do siebie wektory zaprezentowane na poniższych rysunkach:



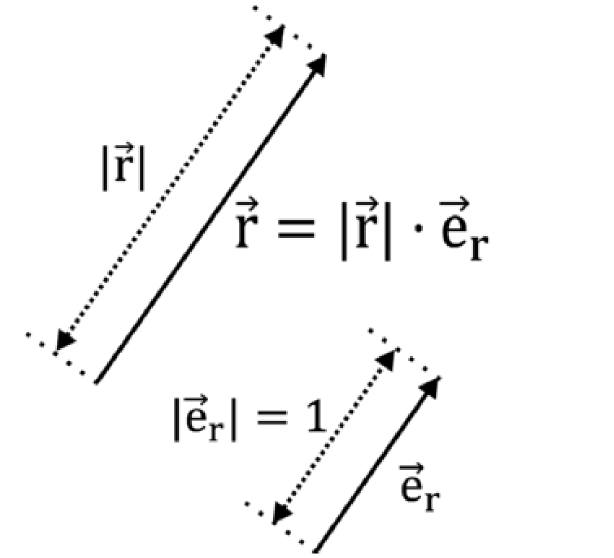
Odejmowanie wektorów.
Odejmowanie wektorów można zdefiniować wprowadzając pojecie wektora przeciwnego. Wektor przeciwny do wektora $\vec{A}$ to wektor o tym samym kierunku i długości, ale o przeciwny zwrocie.



Zadanie 3.
Metodą trójkąta oraz metodą równoległoboku odejmij od siebie wektory z zadania 2.

Wektor jednostkowy.

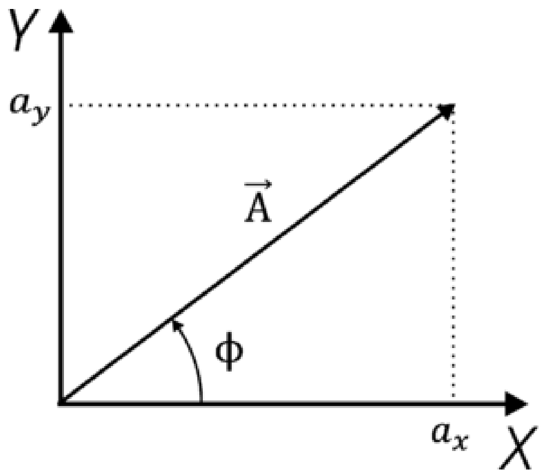
Przy opisie wektora wygodnie jest wprowadzić pojęcie wektora jednostkowego (wersora), to jest wektora o określonym kierunku i długości równej 1. Na rysunku obok zaprezentowano wektor $\vec{e}_r$ o długości równej 1 i kierunku równoległym do wektora $\vec{r}$.



Ilustracja do pojęcia wektora i wektora jednostkowego (wersora).

Układ współrzędnych kartezjańskich.

Wektory najczęściej wiążemy z pewnymi układami współrzędnych. Poniżej pokazano wektor $\vec{A}$ w kartezjańskim układzie współrzędnych, utworzonym przez dwie prostopadłe do siebie osie. W fizyce stosuje się również inne układu współrzędnych (np. biegunowe, walcowe, sferyczne). Zastosowanie odpowiedniego układu współrzędnych może uprościć opis rozpatrywanego zagadnienia.



Płaski układ współrzędnych kartezjańskich tworzą dwie prostopadłe osie. Współrzędne wektora $\vec{A}$ można obliczyć zgodnie ze wzorem:

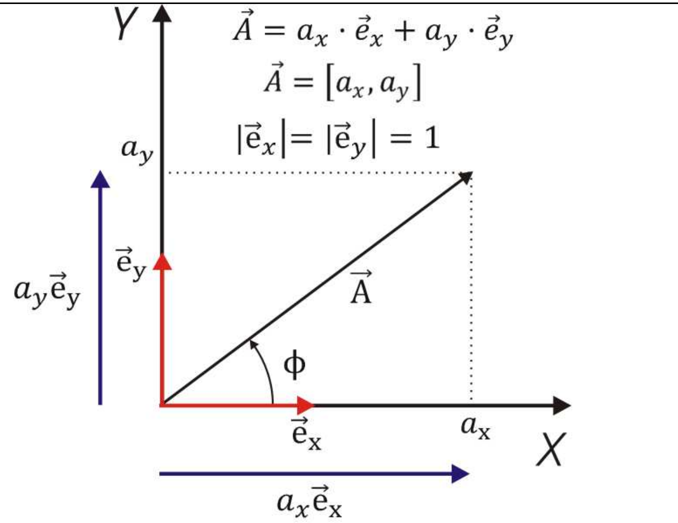
$$\begin{cases} a_x = |\vec{A}|\cos(\phi) \\ a_y = |\vec{A}|\cos(\phi) \end{cases}$$

Z kolei mając współrzędne wektora, można określić jego długość i kierunek (rozumiany tutaj jako kąt pomiędzy wektorem a osią *X*):

$$\begin{cases} |\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + b_x^2} \\ \phi = \arctan \frac{a_y}{a_x} \end{cases}$$

Rozkład wektora na wektory składowe.

W danym układzie współrzędnych wektor można rozłożyć na składowe, czyli rzuty wektora na osie układu współrzędnych, co bardzo często upraszcza dalsze rozwiązywanie danego problemu. Operacje na składowych wektora można bowiem wykonywać jak na skalarach. Na rysunku poniżej przedstawiono dwuwymiarowy układ kartezjański, w którym wprowadzono dwa wersory $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$ równoległe do osi układu oraz rozłożono wektor $\vec{A}$ na dwie składowe: $\vec{a}_x = a\vec{e}_x$ oraz $\vec{b}_y = b\vec{e}_y$.

	Rozkład wektora na składowe w płaskim układzie współrzędnych kartezjańskich. Zapis wektora w tym układzie współrzędnych jest następujący: $\vec{A} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$ lub $\vec{A} = [a_x, a_y, a_z]$

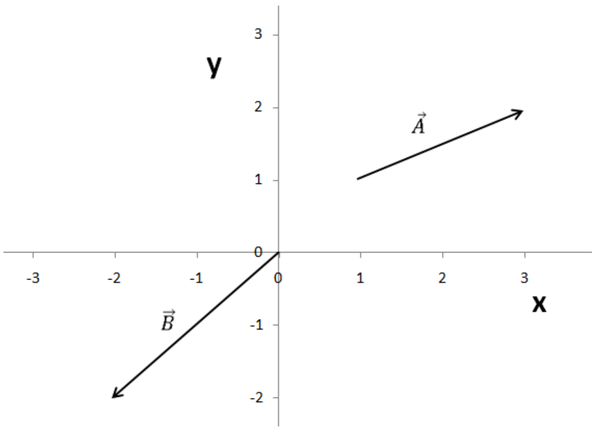
Mając wektory wyrażone za pomocą współrzędnych, dodawanie ich można zrealizować w następująco:

Jeśli: $\vec{A} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y$ i $\vec{B} = b\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y$

to: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + b\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y = (a_x + b_x)\,\vec{e}_x + (a_y + b_y)\,\vec{e}_y$

lub $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = [a_x, a_y] + [b_x, b_y] = [a_x + b_x, a_y + b_y]$

Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa w płaskim układzie współrzędnych kartezjańskich długość wektora wyraża się przez: $|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$



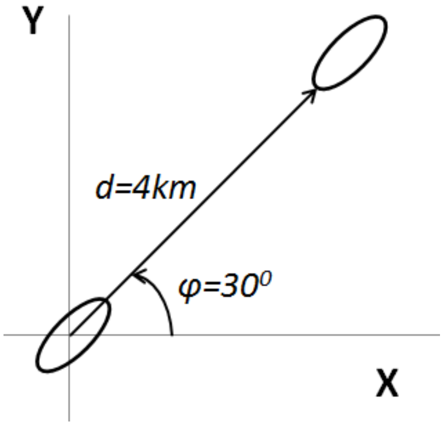
Zadanie 4.

Na rysunku obok zaprezentowano dwa wektory.

- Rozłóż te wektory na składowe.
- Znajdź kąty jakie tworzą z osią X.
- Wyznacz długość tych wektorów.
- Dodaj wektory do siebie metodą algebraiczną i graficzną.

Zadanie 5.

Z plaży wyrusza łódź wiosłowo pod katem φ=30^0 względem brzegu. Zaraz po odbiciu od brzegu łódź wpłynęła w gęstą mgłę i przestala być widoczna. Kiedy ponownie ukazała się obserwatorom, pomiary wykazały, iż znajduje się w odległości d = 4km od miejsca wypłynięcia i kontynuowała rejs zgodnie z obranym kursem. Policz w jakiej odległości od brzegu znajdowała się łódka, gdy wypłynęła z mgły oraz jak daleko znajdowała się w kierunku X od miejsca wypłynięcia. Oznaczenie osi wskazuje jej kierunek dodatni. Sporządź rysunki.



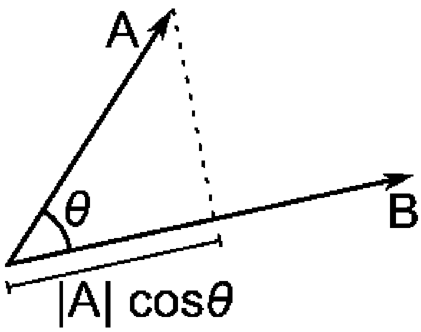
Zadanie 6.

Łódź z poprzedniego zadania, po przebyciu odległości 4 km, zmieniła kurs na φ=60^0 względem brzegu (osi X). Kursem tym płynęła przez kolejne 2 km, po czym zatrzymała się. Oblicz w jakiej odległości od miejsca rozpoczęcia rejsu zatrzymała się łódź. Sporządź rysunki.

Iloczyn skalarny wektorów.

Iloczyn skalarny wektorów oznaczamy jako $\vec{A} \cdot \vec{B}$ i jest zdefiniowany następująco:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\Theta$



gdzie: Θ to kąt pomiędzy wektorami.

Jeśli znamy współrzędne wektora w płaskim układzie kartezjańskim:

$$\vec{A} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y \quad \text{i} \quad \vec{B} = b\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y$$

iloczyn skalarny możemy policzyć w następujący: $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

- Iloczyn skalarny jest przemienny: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- Jeśli zapiszemy iloczyn skalarny w następującej postaci: $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot\cos\Theta\,|\vec{B}|$

to możemy zauważyć, iż $|\vec{A}|\cdot\cos\Theta$ jest długością rzutu wektora $\vec{A}$ na wektor $\vec{B}$.

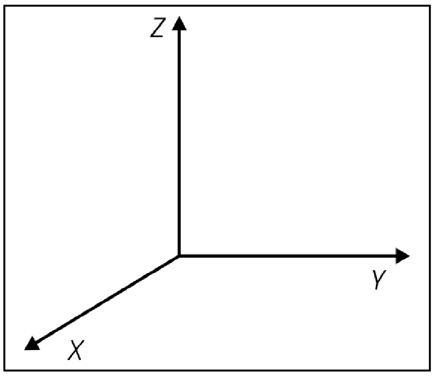
- Jeśli wektory są równoległe, iloczyn skalarny osiąga maksymalną wartość, $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos 0 = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|$
- Jeśli wektory są prostopadłe, iloczyn skalarny jest równy 0: $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos 90 = 0$
- W płaskim układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wynosi : $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y$

Zadanie 7.

Dane są dwa wektory: $\vec{A} = [3, 3\sqrt{3}]$, $\vec{B} = [3, \sqrt{3}]$. Oblicz ich iloczyn skarlany dwoma poznanymi przez ciebie sposobami.

Trójwymiarowy układ współrzędnych kartezjańskich.

W przestrzeni trójwymiarowej przyjęto konwencję stosowania różnych układów współrzędnych, między innymi kartezjańskiego, pokazanego na rysunku obok. Wektory są w nich wyrażone za pomocą trzech liczb, (współrzędnych) określających stosunek długości rzutów wektora na odpowiednie osie do długości wersorów osi:



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \quad \text{lub}$$

$$\vec{A} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \quad \text{i} \quad \vec{B} = b\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y + b_z\,\vec{e}_z$$

Analogicznie, suma:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z + b\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y + b_z\,\vec{e}_z = (a_x + b_x)\,\vec{e}_x + (a_y + b_y)\,\vec{e}_y + (a_z + b_z)\,\vec{e}_z$$

czy tez iloczyn skalarny: $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$

Iloczyn wektorowy.

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ oznaczamy w następujący sposób: $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$

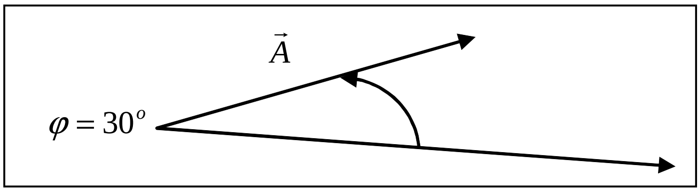
Wynikiem mnożenia wektorowego dwóch wektorów jest wektor $\vec{C}$, którego:

- długość jest równa: $|\vec{C}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin(\phi)$, gdzie ϕ jest mniejszym z kątów pomiędzy wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$,
- kierunek jest zawsze prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$,
- zwrot określony jest tak, aby układ tworzony przez wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$ był układem prawoskrętnym.

Innym sposobem znalezienia iloczynu wektorowego jest obliczenie wyznacznika:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z)\vec{e}_x + (b_x a_z - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{e}_z$$

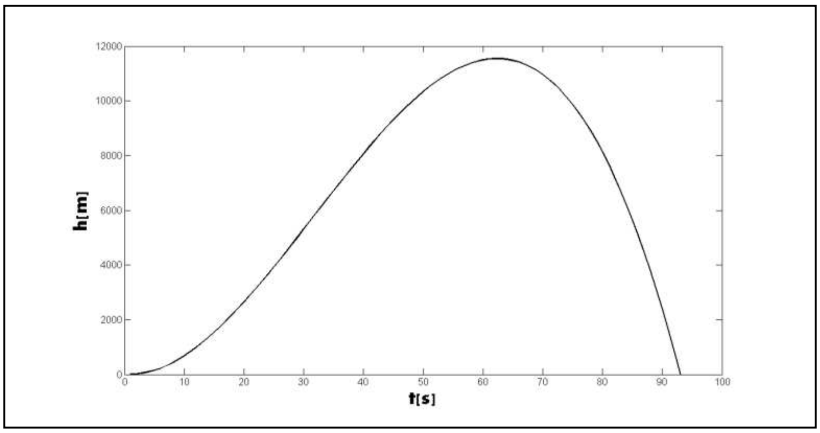
Zadanie 8.



Wektor $\vec{A}$ o długości 6 jednostek i wektor $\vec{B}$ o długości 10 jednostek tworzą kąt 30^0. Wyznacz iloczyn wektorowy: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Zaznacz kierunek i zwrot wektora $\vec{C}$ na rysunku.

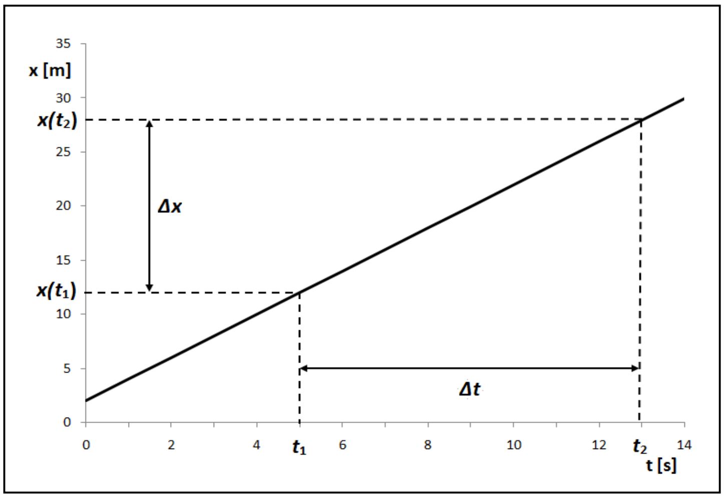
Zadanie 9.

Pokaż, że zachodzi równość: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$



Prędkość ciała w ruchu jednowymiarowym.

Dla opisu ruchu ciała musimy podać zbiór wielkości, które pozwalają na jednoznaczne określenie położenie tegoż ciała względem wybranego przez nas punktu – środka układu odniesienia, w dowolnej chwili czasu. Tym zbiorem wielkości jest wektor $\vec{r}$, który często podajemy we współrzędnych kartezjańskich: $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$.



Rozpatrzmy ruch postępowy wzdłuż pewnej linii prostej. Do opisu takiego ruchu wystarczy nam tylko jedna współrzędna wektora $\vec{r}(t)$. Niech tą współrzędną będzie $x(t)$. W takim prostym zagadnieniu układ współrzędnych redukuje się oczywiście do jednej osi liczbowej.

Załóżmy, że obiekt poruszał się ruchem jednostajnym: $x(t) = vt + x_0$, gdzie v_0 jest pewnym parametrem, a x_0 oznacza położenie ciała w chwili rozpoczęcia ruchu (w czasie $t = t_0 = 0$). Przebieg położenia względem czasu zaprezentowano na rysunku obok.

Wielkość v nazywana jest prędkością obiektu, czyli drogą jaką przebył on w jakimś czasie:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(v_0 \cdot t_2 + x_0) - (v_1 \cdot t_1 + x_0)}{t_2 - t_1} = v_0$$

W przypadku ruchu jednostajnego: prędkość ciała jest stała i równa współczynnikowi kierunkowemu funkcji liniowej obrazującej zależność między przebytą drogą a czasem.

W ogólnym przypadku prędkość nie jest stała. Dokładnej jej określenie wymaga, by odcinki czasu Δt były jak najmniejsze:

$$v_{clwil} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

Tak zdefiniowaną prędkość nazywamy chwilową. Jest to jest prędkość np. pokazywana w samochodzie przez prędkościomierz.

Prędkość określoną wzorem: $v_{średnia} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ nazywamy prędkością średnią (możemy wywołać taką funkcję np. w prędkościomierzu rowerowym). W przypadku ruchu jednostajnego obie definicje są tożsame.

Zadanie 10.

Samochód przebywa połowę drogi z prędkością chwilową $v_1 = 40$ m/s i drugą połowę drogi z prędkością chwilową $v_2 = 60$ m/s. Wyznacz średnią prędkość na całej drodze. Sporządź wykres droga - czas.

Zadanie 11.
Odległość między punktami *A* i *B* wynosi $x_0 = 80$ km. Z punktu *A* w kierunku *AB* wyjeżdża motocyklista z prędkością $v_1 = 50$ km.h. Równocześnie z punktu *B* wyjeżdża w tym samym kierunku samochód z prędkością $v_2 = 30$ km/h. Kiedy i w jakiej odległości od punktu *A* motocyklista dogoni samochód? Przedstaw ruch pojazdów na wykresie.

Zadanie 12.
Rowerzysta jadący z prędkością $v_1 = 15$ km/h spotyka na swojej drodze pieszego. Po $t_1 = 5$ min. Od spotkania rowerzysta dojeżdża do biblioteki, w której przebywa $t_2 = 1$ h i 10 min., po czym z prędkością 15 km/h jedzie spowrotem i po $t_3 = 30$ min. dogania pieszego. Pieszy idzie cały czas ze stałą prędkością v_2. Określić tę prędkość i przedstawić ruch rowerzysty i pieszego graficznie.

Różniczkowanie funkcji

W matematyce obliczanie następującego wyrażenia : $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ nazywane jest różniczkowaniem funkcji *x(t)*, a wielkośc *v(t)* nazywamy pochodną funkcji *x(t)* po zmiennej *t*. Prędkość chwilowa jest wiec pochodną drogi po czasie. Często stosuje się inne oznaczenia: $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. Wielkości $dx = \lim_{\Delta t \to 0} [x(t+\Delta t) - x(t)]$ oraz $dt = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t)$ nazywane są różniczkami, odpowiednio drogi i czasu.

Jak wynika z definicji pochodnej, jest ona granicą ciągu ilorazów różnicowych $\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$. Jej interpretacja geometryczna: wartość pochodnej jest współczynnikiem nachylenia stycznej do krzywej obrazującej funkcję *x(t)* w punkcie t_0: $\frac{dx}{dt}(t_0) = tg\alpha$.

Jeżeli ruch odbywa się w przestrzeni trójwymiarowej, prędkość chwilowa jest wektorem trójwymiarowym, a każdą z jej współrzędnych obliczamy jako pochodną odpowiedniej współrzędnej przestrzennej położenia ciała po czasie:

$$\vec{v}(t) = (v_x \quad v_y \quad v_z) = (x' \quad y' \quad z') = (\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}) = \left(\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt}\right).$$

Prędkość chwilowa na ogół także jest funkcją czasu, a jej pochodna po czasie nazywana jest przyspieszeniem: $\vec{a}(t) = \left(\frac{dv_x}{dt} \quad \frac{dv_y}{dt} \quad \frac{dv_z}{dt}\right)$.

Zadanie 13.
Ciało może poruszać się ruchem prostoliniowym, a jego położenie ciała względem początku układu współrzędnych opisuje następujący wzór: $x(t) = \frac{1}{2}at^2$.

- Narysuj zależność drogi od czasu
- znajdź i narysuj prędkość i przyspieszenie ciała w funkcji czasu

Zadanie 14.
Wyznacz pochodne następujących funkcji:
a) iloczyn u funkcji przez stałą: $f(x) = ag(x)$

b) sumy funkcji: $f(x) = h(x) + g(x)$

c) iloczynu funkcji $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

d) funkcji potęgowych; $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ $f(x) = x^3 = x \cdot x^2$

e) $f(x) = x^n$

f) wyznacz pochodną ilorazu funkcji $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

g) wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$,

Zadanie 15.
Bomba wulkaniczna wyrzucona z krateru A o wysokości y_A = 3.3 km, pod kątem α = 35° do poziomu, spadła na ziemie w punkcie B u podnóża wulkanu w odległości x_B = 9.4 km.
a) ile wynosiła wartość prędkości początkowej v_0 bomby ?
b) jak długo trwał lot bomby?
c) jaką maksymalną wysokość względem podstawy wulkanu osiągnęła bomba w czasie lotu ? Podać odległość tego maksimum od wulkanu

Zadanie 16.
Wysokość rakiety lecącej pionowo nad powierzchnią Ziemi w trakcie jej pierwszych kilkudziesięciu sekund lotu opisuje wzór $h(t) = h_0 + At^2 + Bt^3$, gdzie h_0 = 10 m, A = 9.2 m/s^2, B = 0.1 m/s^3. Znajdź prędkość rakiety w 40 oraz 80 sekundzie lotu.

Całki

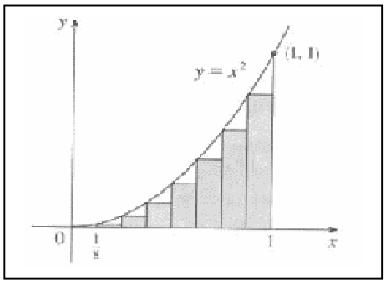
Niejednokrotnie w opisie ruchu dysponujemy tylko prędkością, czyli funkcją *v(t)* opisująca pochodną drogi po czasie. Czy posługując się nią można odtworzyć funkcję opisującą zależność drogi od czasu (w czasie to t_0 do t)?

Dzielimy interesujący nas odcinek czasu od t_0 do t na k równych odcinków, każdy o długości Δt. Dany, i – ty odcinek czasu t_i można wyrazić przez: $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$. Położenie ciała w czasie t można policzyć ze wzoru:

$$s(t) = s(t_0) + v(t_0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + ... + v(t_{k-1})\Delta t + v(t_k)\Delta t$$

gdzie $s(t_0)$ oznacza początkowe położenie ciała - w chwili t_0. Innymi słowy:

$$s(t) = s(t_0) + \sum_{i=0}^{k} v(t_k)\Delta t \, .$$



Obliczenia sa tym bardziej dokładne, im podział jest drobniejszy :

$$s(t) = s(t_0) + \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ k \to \infty}} \sum_{i=0}^{k-1} v(t_i)\Delta t$$

Powyższą operację matematyczną nazywamy całką Riemanna:

$$s(t) = s(t_0) + \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ k \to \infty}} \sum_{i=0}^{k-1} v(t_i)\Delta t = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Drogę możemy więc obliczyć jako całkę z prędkości po czasie. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej, to pole powierzchni pod krzywą prędkości zawarte miedzy rzędnymi od t_0 do t.

Podstawiając tak obliczoną drogę do wzoru na pochodną: $\frac{ds(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v(t)$

stwierdzamy, że całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania.

Funkcja $F(t) = \int f(t)dt + C$, taka, że $\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$ jest nazywana funkcją pierwotną dla *f(t)* lub jej całką nieoznaczoną. Wielkość *C* jest pewną stałą. Z powyższego wynika, że całka oznaczona

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = F(t_2) - F(t_1) \, .$$

Zadanie 17
Wyznacz wartości następujących całek:

a) $\int_0^1 t^2 dt$

b) $\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt$

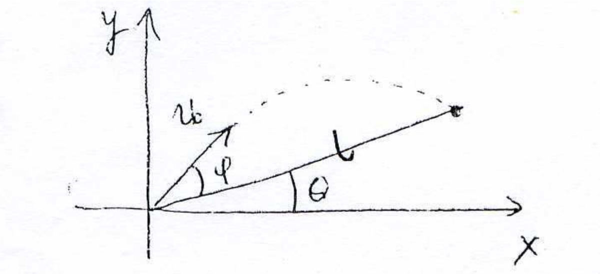
c) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$

Zadanie 18.

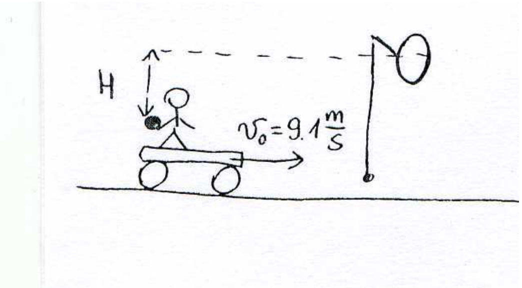
Prędkość ciała w ruchu prostoliniowym dana jest zależnością: $v(t) = a \cdot t$, gdzie $a = 2\frac{m}{s^2}$. Oblicz drogę przebytą przez ciało od 0 do 11 s oraz od 3 do 11 sek.

Zadanie 19.
W chwili t = 0 s ciało zaczyna poruszać się ruchem jednostajnym z prędkością v_0 = 5 m/s. Po upływie 8 s ruch ciała zmienił się na jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem a = 15 m/s^2. Znaleźć prędkość i położenie ciała w 20 – tej sekundzie ruchu.

Zadanie 20
Piłce nadano na progu równi prędkość v_0, której wektor skierowany był pod katem φ do powierzchni równi. Nachylenie równi do poziomu wynosi θ. Wyznaczyć odległość, mierzoną wzdłuż równi, na jaką przemieści się piłka do momentu zderzenia z równią. Dla jakiego kąta φ przy zadanym kącie θ zasięg mierzony wzdłuż równi jest maksymalny?



Zadanie 21
Człowiek porusza się na drezynie za stałą prędkością v_0 = 9.1 m/s. Chce przerzucić piłkę przez obręcz umocowaną do pręta przy torach i będącą H = 4.9 m powyżej wysokości jego reki, w taki sposób, aby piłka poruszała się z prędkością poziomą w momencie przechodzenia przez obręcz. Rzuca piłkę z prędkością v'=10,8 m/s w stosunku do własnego układu odniesienia.



(a) Jaka powinna być składowa pionowa prędkości początkowej piłki?
(b) Po jakim czasie piłka przejdzie przez obręcz?
(c) W jakiej odległości od obręczy liczonej poziomo, człowiek musi wykonać rzut?
(d) Jaki jest kierunek prędkości początkowej piłki w układzie odniesienia człowieka?
(e) Jaki jest kierunek prędkości początkowej piłki w układzie obserwatora stojącego przy torach?

Zadanie 22.
Dwa samochody poruszają się jednym pasem z prędkością v_0 = 60 km/h oraz odstępem d_0. W chwili t_0 samochód poprzedzający zaczyna hamować. Aby uniknąć wypadku, kierowca samochodu jadącego z tyłu zaczyna hamować, lecz jego reakcja jest opóźniona o Δt = 1s. Przyśpieszenie obydwu samochodów w trakcie hamowania wynosi a_0 = 3.2 ms^{-2}. Jaki powinien być odstęp samochodów d_0 aby nie doszło do stłuczki?