Zadanie 1 (zadanie domowe, seria 5)

Zwierciadło paraboliczne, doskonałe do teleskopów astronomicznych, można otrzymać wprowadzając w ruch wirowy wokół pionowej osi płaskie naczynie wypełnione rtęcią. Wyznacz prędkość kątową, z jaką należy obracać naczynie, aby otrzymać zwierciadło o ogniskowej 5 m. Ogniskowa zwierciadła parabolicznego, którego przekrój zawierający oś symetrii obrotowej y opisany jest równaniem $y = ax^2$ wynosi $1/4a$. Przyjmij przyspieszenie grawitacyjne $g = 10\ m/s^2$.

Wskazówka: aby znaleźć kształt powierzchni wirującej cieczy rozważ równowagę sił działających na drobinę rtęci znajdującą się przy powierzchni.

Rozwiązanie:

Warunek równowagi sił: ciężkości (mg), odśrodkowej ($m\omega^2 r$) i reakcji, działających na drobinę przy powierzchni cieczy daje:

$$mg \sin \alpha - m\omega^2 r \cos \alpha = 0$$

co, po znalezieniu $\tan \alpha$, pozwala wyznaczyć kształt powierzchni cieczy opisany równaniem (było na wykładzie)

$$y = \omega^2/2g\ r^2$$

gdzie r jest odległością od osi zwierciadła, a oś y to oś obrotu.

Jeśli więc ogniskowa $f = 1/4a = g/2\omega^2$ ma być równa $5\ m$, to $\omega = sqrt(g/2f) = 1\ [1/s]$.

Zadanie 2 – wersja A

Jednorodny walec o promieniu *R* został wydrążony w środku. Promień wydrążenia wynosi *r*, a masa walca po wydrążeniu wynosi *M*. W wydrążenie wsunięto inny walec o masie *m* i tym samym promieniu *r*. W pewnej chwili tak powstały walec zaczął się staczać bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia α. Znajdź przyspieszenia tak powstałego walca, jeżeli:

a) walec wewnętrzny jest sklejony na stałe z walcem zewnętrznym;

b) walec wewnętrzny może się obracać bez tarcia względem walca zewnętrznego.

Moment bezwładności walca, którego masa *M* jest równomiernie rozłożona między powierzchniami walcowymi o promieniu wewnętrznym *r* i zewnętrznym *R*:

$$I = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2).$$

Rozwiązanie:

a) Siły działające na walec o masie *M+m* i promieniu *R* staczający się bez poślizgu z równi pochyłej mają postać:

$$\vec{F}_s = [(M+m)g\sin\alpha, 0, 0]$$
$$\vec{T} = [-T, 0, 0]$$

Ruch odbywa się bez poślizgu więc: $a=\varepsilon R$

Podstawiając siły i przyspieszenia do równań otrzymujemy:

$$(M+m)g\sin\alpha - T = (M+m)a$$
$$RT = I\varepsilon$$

Z drugiego równania możemy wyznaczyć siłę tarcia (korzystając z faktu, że ruch odbywa się bez poślizgu): $T=\frac{Ia}{R^2}$

Wtedy: $(M+m)g\sin\alpha - \frac{Ia}{R^2} = (M+m)a$

Stąd dostajemy przyspieszenie środka masy walca o masie *M+m*, promieniu *R* i momencie bezwładności *I*:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{(M+m)R^2}}$$

Gdy walec wewnętrzny jest sklejony z walcem zewnętrznym, moment bezwładności walców sklejonych wynosi: $I = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) + \frac{1}{2}mr^2$

Przyspieszenie środka masy walca pełnego:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{(M+m)R^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{1/2\mathrm{M}(R^2+r^2)+1/2mr^2}{(M+m)R^2}} = \frac{2g\sin\alpha(M+m)R^2}{R^2(3\mathrm{M}+2\mathrm{m})+r^2(m+M)}$$

b) Gdy walec wewnętrzny może poruszać się bez tarcia względem walca zewnętrznego, moment bezwładności powstałego walca wynosi: $I = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$. Walec wewnętrzny nie daje tu wkładu, gdyż na walec wewnętrzny nie działa żaden moment sił, który powodowałby jego obrót.
Równie na przyspieszenie środka masy powstałego walca jest takie same jak w przypadku a), trzeba tylko podstawić inne wyrażenie na moment bezwładności I:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{(M+m)R^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{1/2\mathrm{M}(R^2 + r^2)}{(M+m)R^2}} = \frac{2g\sin\alpha(M+m)R^2}{R^2(3\mathrm{M} + 2\mathrm{m}) + r^2M}$$

Zadanie 2 – wersja B

Jednorodny walec o promieniu *r* został wydrążony w środku. Promień wydrążenia wynosi R, a masa walca po wydrążeniu wynosi *m.* W wydrążenie wsunięto inny walec o masie *M* i tym samym promieniu *R*. W pewnej chwili tak powstały walec zaczął się staczać bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia β. Znajdź przyspieszenia tak powstałego walca, jeżeli:

a) walec wewnętrzny jest sklejony na stałe z walcem zewnętrznym;

b) walec wewnętrzny może się obracać bez tarcia względem walca zewnętrznego.

Moment bezwładności walca, którego masa *M* jest równomiernie rozłożona między powierzchniami walcowymi o promieniu wewnętrznym *R* i zewnętrznym *r*:

$$I = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2).$$

Rozwiązanie:

a) Siły działające na walec o masie *M+m* i promieniu *r* staczający się bez poślizgu z równi pochyłej mają postać:

$$\vec{F}_s = [(M+m)g\sin\beta, 0, 0]$$
$$\vec{T} = [-T, 0, 0]$$

Ruch odbywa się bez poślizgu więc: $a = \varepsilon r$

Podstawiając siły i przyspieszenia do równań otrzymujemy:

$$(M+m)g\sin\beta - T = (M+m)a$$
$$rT = I\varepsilon$$

Z drugiego równania możemy wyznaczyć siłę tarcia (korzystając z faktu, że ruch odbywa się bez poślizgu): $T = \frac{Ia}{r^2}$

Wtedy: $(M+m)g\sin\beta - \frac{Ia}{r^2} = (M+m)a$

Stąd dostajemy przyspieszenie środka masy walca o masie *M+m*, promieniu *r* i momencie bezwładności *I*:

$$a = \frac{g\sin\beta}{1 + \frac{I}{(M+m)r^2}}$$

Gdy walec wewnętrzny jest sklejony z walcem zewnętrznym, moment bezwładności walców sklejonych wynosi: $I = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) + \frac{1}{2}MR^2$

Przyspieszenie środka masy walca pełnego:

$$a = \frac{g\sin\beta}{1 + \frac{I}{(M+m)r^2}} = \frac{g\sin\beta}{1 + \frac{1/2m(r^2 + R^2) + 1/2MR^2}{(M+m)r^2}} = \frac{2g\sin\beta(M+m)r^2}{r^2(3m + 2M) + R^2(m+M)}$$

b) Gdy walec wewnętrzny może poruszać się bez tarcia względem walca zewnętrznego, moment bezwładności powstałego walca wynosi: $I = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2)$. Walec wewnętrzny nie daje tu wkładu, gdyż na walec wewnętrzny nie działa żaden moment sił, który powodowałby jego obrót.
Równanie na przyspieszenie środka masy powstałego walca jest takie same jak w przypadku a), trzeba tylko podstawić inne wyrażenie na moment bezwładności I:

$$a = \frac{g\sin\beta}{1 + \frac{I}{(M+m)r^2}} = \frac{g\sin\beta}{1 + \frac{1/2\,m(R^2+r^2)}{(M+m)r^2}} = \frac{2g\sin\beta(M+m)r^2}{r^2(3m+2M) + R^2 m}$$

Zad. 3. Lądownik marsjański

Na orbitę stacjonarną Marsa (to odpowiednik orbity geostacjonarnej Ziemi) wprowadzono sondę o masie m=2000 kg na pokładzie którego znajdował się lądownik o masie 500kg. W pewnej chwili lądownik został odłączony poprzez zwolnienie zaczepów i ląduje na powierzchni Marsa dzięki własnemu silnikowi.

a) W jakiej odległości od środka planety Mars powinna krążyć sonda przed odłączeniem lądownika? Jaka jest prędkość sondy? Wiadomo, że doba na Marsie trwa T_0=24godz.37min.23s, promień Marsa R_M=3400 km, zaś przyspieszenie ciał przy powierzchni tej planety g_M=3,7 m/s^2. Dla oszacowania wartości liczbowej proszę przyjąć $T_0=9\text{x}10^4$s, R_M=3000 km, g_M=4 m/s^2, π=3.

b) Jaka musi być minimalna zmiana prędkości lądownika .

c) Jaka będzie prędkość fragmentu sondy pozostającej na orbicie.

Rozwiązanie:

Ad. a) $m\omega^2 r_n = G\dfrac{mM_M}{r_n^2}$ $\qquad r_n = \sqrt[3]{\dfrac{GM_M}{\omega^2}}$

Iloczyn GM_M znajdziemy z przyspieszenia marsjańskiego i promienia planety

$g_M = \dfrac{GM_M}{R_M^2}$, stąd $g_M R_M^2 = GM_M$ i $\quad r_n = \sqrt[3]{\dfrac{g_M R_M^2 T_0^2}{4\pi^2}}$ $\quad$ oraz $\quad v = \dfrac{2\pi r_n}{T}$

Podstawienie przybliżonych wartości daje błyskawicznie wynik:

$$r_n = \sqrt[3]{\frac{4\frac{m}{s^2}\cdot 9\cdot 10^{12}m^2 9^2\cdot 10^8 s^2}{4\cdot 3^2}} = \sqrt[3]{10^{12}\cdot 10^8\cdot 81m^3} \cong 2\cdot 10^7 m$$

r=2x10^{7}m, jest praktycznie identyczny z wynikiem, gdy wstawiamy dokładne wartości.

Ad. b) Zmiana prędkości lądownika

$v^2 = \dfrac{GM_M}{r}$ z zasady zachowania energii:

$$-G\frac{mM_M}{r_2} + \frac{mv_2^2}{2} = -G\frac{mM_M}{r_n} + \frac{mv_1^2}{2}$$

Z zasady zachowania pędu: $mv_2 r_2 = mv_1 r_n$

Rozwiązanie daje $v_1 = \sqrt{2GM_M\dfrac{r_2}{r_n(r_2+r_n)}}$ i $\Delta v = v - v_1 = \dfrac{2\pi r_n}{T} - \sqrt{2GM_M\dfrac{r_2}{r_n(r_2+r_n)}}$

Ad. c) Promień orbity i prędkość nie ulegną zmianie

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI wieku* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Imię i Nazwisko: ....

Nr. albumu: .... Grupa ćwiczeniowa:...........

Fizyka I (2011/2012)
Kolokwium 09.01.2012
Pytania testowe (A)

Na każde pytanie jest dokładnie jedna prawidłowa odpowiedź. Należy ją zaznaczyć stawiając czytelny znak **X** w odpowiedniej kratce. Otoczenie zakreślonej kratki kółkiem anuluje odpowiedź. Ponownego wyboru anulowanej wcześniej odpowiedzi można dokonać czytelnie wypisując odpowiednią literę przy numerze pytania. Za dobrą odpowiedź uzyskuje się 1 punkt, za złą -0.5 punktu.

1. W jednorodnym polu elektrycznym cząstka może poruszać się po

   [A] elipsie [B] hiperboli [X] paraboli [D] okręgu

2. Okres obiegu satelity geostacjonarnego wynosi

   [A] 24^h [B] 12^h [C] 24^h07^m [X] 23^h56^m

3. Okres T obiegu planet wokół Słońca zmienia się z wielką półosią ich orbity jak

   [A] $a^{2/3}$ [B] a^3 [C] a^2 [X] $a^{3/2}$

4. Przy nieznacznym wychyleniu z położenia równowagi chwiejnej energia potencjalna bryły sztywnej

   [A] wzrasta [B] nie można powiedzieć [X] maleje [D] nie zmienia się

5. Jeśli moment pędu bąka podpartego zmniejszy się dwukrotnie to częstość jego precesji

   [X] zwiększy się dwukrotnie [B] nie zmieni się [C] zmniejszy się dwukrotnie
   [D] zwiększy się czterokrotnie

34040

Imię i Nazwisko: ....

Nr. albumu: .... Grupa ćwiczeniowa:...........

Fizyka I (2011/2012)
Kolokwium 09.01.2012
Pytania testowe (B)

Na każde pytanie jest dokładnie jedna prawidłowa odpowiedź. Należy ją zaznaczyć stawiając czytelny znak **X** w odpowiedniej kratce. Otoczenie zakreślonej kratki kółkiem anuluje odpowiedź. Ponownego wyboru anulowanej wcześniej odpowiedzi można dokonać czytelnie wypisując odpowiednią literę przy numerze pytania. Za dobrą odpowiedź uzyskuje się 1 punkt, za złą -0.5 punktu.

1. W jednorodnym polu magnetycznym cząstka naładowana nie może poruszać się po

   [X] elipsie [B] prostej [C] okręgu [D] linii śrubowej

2. Pierwsza prędkość kosmiczna dla Ziemi wynosi w przybliżeniu

   [A] 1.7 km/s [B] 16.7 km/s [C] 11.2 km/s [X] 7.9 km/s

3. Planety krążą dookoła Słońca po orbitach

   [X] eliptycznych ze Słońcem w jednym z ognisk [B] kołowych [C] hiperbolicznych
   [D] eliptycznych ze Słońcem w środku elipsy

4. Przy nieznacznym wychyleniu z położenia równowagi trwałej środek masy bryły sztywnej

   [A] obniży się [B] przesunie się poziomo [X] podniesie się [D] nie zmieni położenia

5. Częstość precesji bąka podpartego nie zależy od

   [A] momentu pędu [X] kąta odchylenia od pionu [C] masy [D] położenia środka ciężkości

511670