Zadanie 1

Dane są dwa walce, każdy o masie M, które staczają się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia α. Pierwszy walec o promieniu R ma masę jednorodnie rozłożoną w całej swojej objętości. Masa drugiego walca rozłożona jest jednorodnie między powierzchniami walcowymi o promieniach wewnętrznym r i zewnętrznym R. Podaj wzór i obliczyć przyspieszenie środków mas tych walców, gdy $\alpha = \pi/6$, $M = 1$ kg, $R = 20$cm, $r = 10$ cm, $g = 10$ m/s^2. Moment bezwładności walca, którego masa M jest równomiernie rozłożona między powierzchniami walcowymi o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R:

$$I = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2).$$

Rozwiązanie:

Siły działające na każdy walec mają postać:
$$\vec{F}_s = [Mg\sin\alpha, 0, 0]$$
$$\vec{T} = [-T, 0, 0]$$

Ruch odbywa się bez poślizgu więc: $a = \varepsilon R$

Podstawiając siły i przyspieszenia do równań otrzymujemy:
$$Mg\sin\alpha - T = Ma$$
$$RT = I\varepsilon$$

Z drugiego równania możemy wyznaczyć siłę tarcia (korzystając z faktu, że ruch odbywa się bez poślizgu): $T = \frac{Ia}{R^2}$

Wtedy: $Mg\sin\alpha - \frac{Ia}{R^2} = Ma$

Stąd dostajemy przyspieszenie środka masy walca o masie M, promieniu R i momencie bezwładności I: $a = \dfrac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{MR^2}}$

Moment bezwładności walca pełnego względem osi obrotu: $I_{pełny} = \frac{1}{2}MR^2$

Moment bezwładności walca pustego względem osi obrotu: $I_{pusty} = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$

Przyspieszenie środka masy walca pełnego: $$a_{pełny} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{1/2MR^2}{MR^2}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Przyspieszenie środka masy walca pustego: $$a_{pusty} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{1/2M(R^2 + r^2)}{MR^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{R^2 + r^2}{2R^2}}$$

Odp.

$$a_{pe\ln y} = \frac{2}{3} g \sin\alpha = \frac{2}{3}\frac{m}{s^2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{10}{3}\frac{m}{s^2}$$

$$a_{pusty} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{R^2+r^2}{2R^2}} = \frac{10\frac{m}{s^2}\sin\frac{\pi}{6}}{1+\frac{(0{,}2m)^2+(0{,}1m)^2}{2\cdot(0{,}2m)^2}} = \frac{5\frac{m}{s^2}}{1+\frac{0{,}05}{0{,}08}} = \frac{5\frac{m}{s^2}}{\frac{13}{8}} = \frac{40}{13}\frac{m}{s^2}$$

Zad. 2. Lądownik marsjański

Na orbitę stacjonarną Marsa (to odpowiednik orbity geostacjonarnej Ziemi) wprowadzono sondę o masie m=2000 kg na pokładzie którego znajdował się lądownik o masie 500kg. W pewnej chwili czasie lądownik został odłączony poprzez zwolnienie zaczepów, aby dotrzeć do powierzchni Marsa dzięki własnemu silnikowi.

a) W jakiej odległości od środka planety Mars powinna krążyć sonda przed odłączeniem lądownika? Jaka jest prędkość sondy? Wiadomo, że doba na Marsie trwa T_0=24godz.37min.23s, promień Marsa R_M=3400 km, zaś przyspieszenie ciał przy powierzchni tej planety g_M=3,7 m/s^2. Dla oszacowania wartości liczbowej proszę przyjąć $T_0=9\text{x}10^4$s, R_M=3000 km, g_M=4 m/s^2, π=3.

b) Wyznacz stałe ruchu sondy, tzn. jego całkowitą energię E oraz moment pędu L.

c) Podaj stałe ruchu sondy i promień jego orbity po odłączeniu lądownika.

Rozwiązanie:

Ad. a) $$m\omega^2 r = G\frac{mM_M}{r^2} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{GM_M}{\omega^2}}$$

Iloczyn GM_M znajdziemy z przyspieszenia marsjańskiego i promienia planety

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^{\ 2}}, \qquad \text{stąd} \quad r = \sqrt[3]{\frac{g_M R_M^2 T_0^{\ 2}}{4\pi^2}} \quad \text{i prędkość sondy} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

Podstawienie przybliżonych wartości daje błyskawicznie wynik:

$$r = \sqrt[3]{\frac{4\frac{m}{s^2}\cdot 9\cdot 10^{12} m^2 9^2\cdot 10^8 s^2}{4\cdot 3^2}} = \sqrt[3]{10^{12}\cdot 10^8\cdot 81 m^3} \cong 2\cdot 10^7 m$$

r=2x10^{7}m, jest praktycznie identyczny z wynikiem, gdy wstawiamy dokładne wartości.

Ad. b) Prędkość na orbicie o promieniu r $\quad v^2 = \frac{GM_M}{r}$

$$E = -G\frac{mM_M}{r} + \frac{mv^2}{2} = -G\frac{mM_M}{r} + G\frac{mM_M}{2r} = -G\frac{mM_M}{2r}$$

$$E = -G\frac{mM_M}{2r} = -\frac{mg_M R_M^{\ 2}}{2r} = -\frac{2\cdot 10^3\cdot 4\cdot 9\cdot 10^{12}}{2\cdot 2\cdot 10^7} = -1.8\cdot 10^9 J$$

$$L = mvr = m\sqrt{\frac{GM}{r}}r = m\sqrt{GMr} = m\sqrt{g_M r}R_M = 5{,}4\cdot 10^{13} kg\frac{m^2}{s}$$

Dokładne rachunki dają dla satelity: $E = -1.067\cdot 10^9 J \quad L = 2{,}9\cdot 10^{13} kg\frac{m^2}{s}$

Ad. c) Promień orbity nie ulegnie zmianie a energia i moment pędu zmienią się proporcjonalnie do masy sondy

Zadanie 3 (zadanie domowe, seria 5)

Zwierciadło paraboliczne, doskonałe do teleskopów astronomicznych, można otrzymać wprowadzając w ruch wirowy wokół pionowej osi płaskie naczynie wypełnione rtęcią. Wyznacz prędkość kątową, z jaką należy obracać naczynie, aby otrzymać zwierciadło o ogniskowej 5 m. Ogniskowa zwierciadła parabolicznego, którego przekrój zawierający oś symetrii obrotowej y opisany jest równaniem $y = ax^2$ wynosi $1/4a$. Przyjmij przyspieszenie grawitacyjne $g = 10\ m/s^2$.

Wskazówka: aby znaleźć kształt powierzchni wirującej cieczy rozważ równowagę sił działających na drobinę rtęci znajdującą się przy powierzchni.

Rozwiązanie:

Warunek równowagi sił: ciężkości (mg), odśrodkowej ($m\omega^2 r$) i reakcji, działających na drobinę przy powierzchni cieczy daje:

$$mg \sin\alpha - m\omega^2 r \cos\alpha = 0$$

co, po znalezieniu $\tan\alpha$, pozwala wyznaczyć kształt powierzchni cieczy opisany równaniem (było na wykładzie)

$$y = \omega^2/2g\ r^2$$

gdzie r jest odległością od osi zwierciadła, a oś y to oś obrotu.

Jeśli więc ogniskowa $f = 1/4a = g/2\omega^2$ ma być równa $5\ m$, to $\omega = sqrt(g/2f) = 1\ [1/s]$.

Imię i Nazwisko: ....

Nr. albumu: .... Grupa ćwiczeniowa:...........

Fizyka I (2011/2012)
Kolokwium 09.01.2012
Pytania testowe (A)

Na każde pytanie jest dokładnie jedna prawidłowa odpowiedź. Należy ją zaznaczyć stawiając czytelny znak **X** w odpowiedniej kratce. Otoczenie zakreślonej kratki kółkiem anuluje odpowiedź. Ponownego wyboru anulowanej wcześniej odpowiedzi można dokonać czytelnie wypisując odpowiednią literę przy numerze pytania. Za dobrą odpowiedź uzyskuje się 1 punkt, za złą -0.5 punktu.

1. W jednorodnym polu elektrycznym cząstka może poruszać się po

   [A] elipsie [B] hiperboli [X] paraboli [D] okręgu

2. Okres obiegu satelity geostacjonarnego wynosi

   [A] 24^h [B] 12^h [C] 24^h07^m [X] 23^h56^m

3. Okres T obiegu planet wokół Słońca zmienia się z wielką półosią ich orbity jak

   [A] $a^{2/3}$ [B] a^3 [C] a^2 [X] $a^{3/2}$

4. Przy nieznacznym wychyleniu z położenia równowagi chwiejnej energia potencjalna bryły sztywnej

   [A] wzrasta [B] nie można powiedzieć [X] maleje [D] nie zmienia się

5. Jeśli moment pędu bąka podpartego zmniejszy się dwukrotnie to częstość jego precesji

   [X] zwiększy się dwukrotnie [B] nie zmieni się [C] zmniejszy się dwukrotnie
   [D] zwiększy się czterokrotnie

34040

Imię i Nazwisko: ....

Nr. albumu: .... Grupa ćwiczeniowa:...........

Fizyka I (2011/2012)
Kolokwium 09.01.2012
Pytania testowe (B)

Na każde pytanie jest dokładnie jedna prawidłowa odpowiedź. Należy ją zaznaczyć stawiając czytelny znak **X** w odpowiedniej kratce. Otoczenie zakreślonej kratki kółkiem anuluje odpowiedź. Ponownego wyboru anulowanej wcześniej odpowiedzi można dokonać czytelnie wypisując odpowiednią literę przy numerze pytania. Za dobrą odpowiedź uzyskuje się 1 punkt, za złą -0.5 punktu.

1. W jednorodnym polu magnetycznym cząstka naładowana nie może poruszać się po

   [X] elipsie   [B] prostej   [C] okręgu   [D] linii śrubowej

2. Pierwsza prędkość kosmiczna dla Ziemi wynosi w przybliżeniu

   [A] 1.7 km/s   [B] 16.7 km/s   [C] 11.2 km/s   [X] 7.9 km/s

3. Planety krążą dookoła Słońca po orbitach

   [X] eliptycznych ze Słońcem w jednym z ognisk   [B] kołowych   [C] hiperbolicznych
   [D] eliptycznych ze Słońcem w środku elipsy

4. Przy nieznacznym wychyleniu z położenia równowagi trwałej środek masy bryły sztywnej

   [A] obniży się   [B] przesunie się poziomo   [X] podniesie się   [D] nie zmieni położenia

5. Częstość precesji bąka podpartego nie zależy od

   [A] momentu pędu   [X] kąta odchylenia od pionu   [C] masy   [D] położenia środka ciężkości

511670