Kinematyka: opis ruchu

Fizyka I (Mechanika)

Wykład II:

- Pojęcia podstawowe
  - ⇒ punkt materialny, układ odniesienia, układ współrzędnych
  - ⇒ tor, prędkość, przyspieszenie
- Ruch jednostajny, ruch jednostajnie przyspieszony
- Transformacja Galileusza
- Ruch harmoniczny i ruch po okręgu

Pojęcia podstawowe

Punkt materialny

Ciało, którego rozmiary można w danym zagadnieniu zaniedbać.

Zazwyczaj przyjmujemy, że punkt materialny powinien być dostatecznie mały.

Nie jest to jednak konieczne !

Przykład: “wózek” na torze powietrznym.

Ważne jest, żeby ciało nie miało dodatkowych “stopni swobody”
(np. obroty , drgania własne, stany wzbudzone)

Położenie punktu materialnego całkowicie określa jego “stan”.

$\Rightarrow$ pojęcie punktu materialnego umożliwia prosty opis wielu sytuacji fizycznych.

Naogół przyjmujemy, że punkt materialny obdarzony jest masą (do tego jeszcze wrócimy).

Pojęcia podstawowe

Ruch

Zmiana położenia ciała względem wybranego układu odniesienia.

Układ odniesienia

Ciało, które wybieramy jako “punkt odniesienia”.

Najczęściej jest nim Ziemia lub punkt na jej powierzchni.

Układ odniesienia można też zdefiniować określając jego położenie (lub ruch) względem wybranego ciała lub grupy ciał.

Przykłady:

- układ związany ze stołem w sali wykładowej
- układ związany z lecącym samolotem
- układ środka masy zderzających się cząstek
- układ związany ze środkiem Galaktyki

Pojęcia podstawowe

Układ współrzędnych

Służy do określenia położenia ciała w danym układzie odniesienia

Położenie możemy zapisać na wiele różnych sposobów:

- układ współrzędnych kartezjańskich:

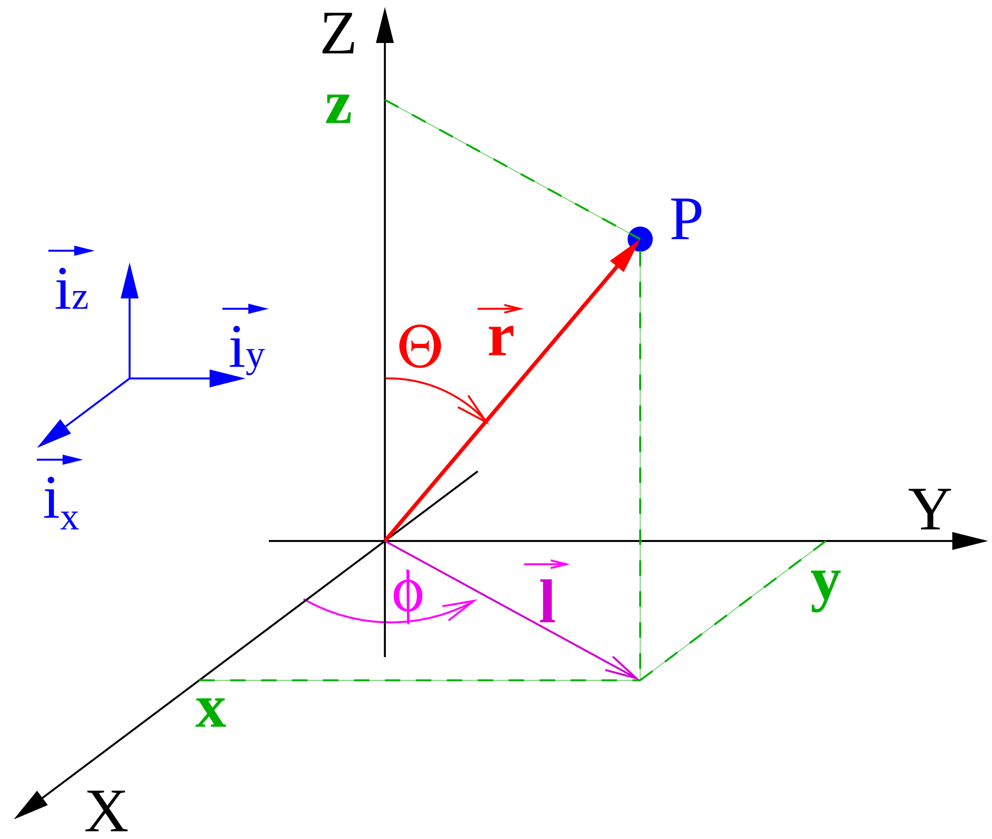
$$\vec{r} = x \cdot \vec{i}_x + y \cdot \vec{i}_y + z \cdot \vec{i}_z \equiv (x, y, z)$$

- układ współrzędnych biegunowych:

$$\vec{r} = (r, \Theta, \phi)$$

- układ współrzędnych walcowych:

$$\vec{r} = (l, \phi, z)$$



Pojęcia podstawowe

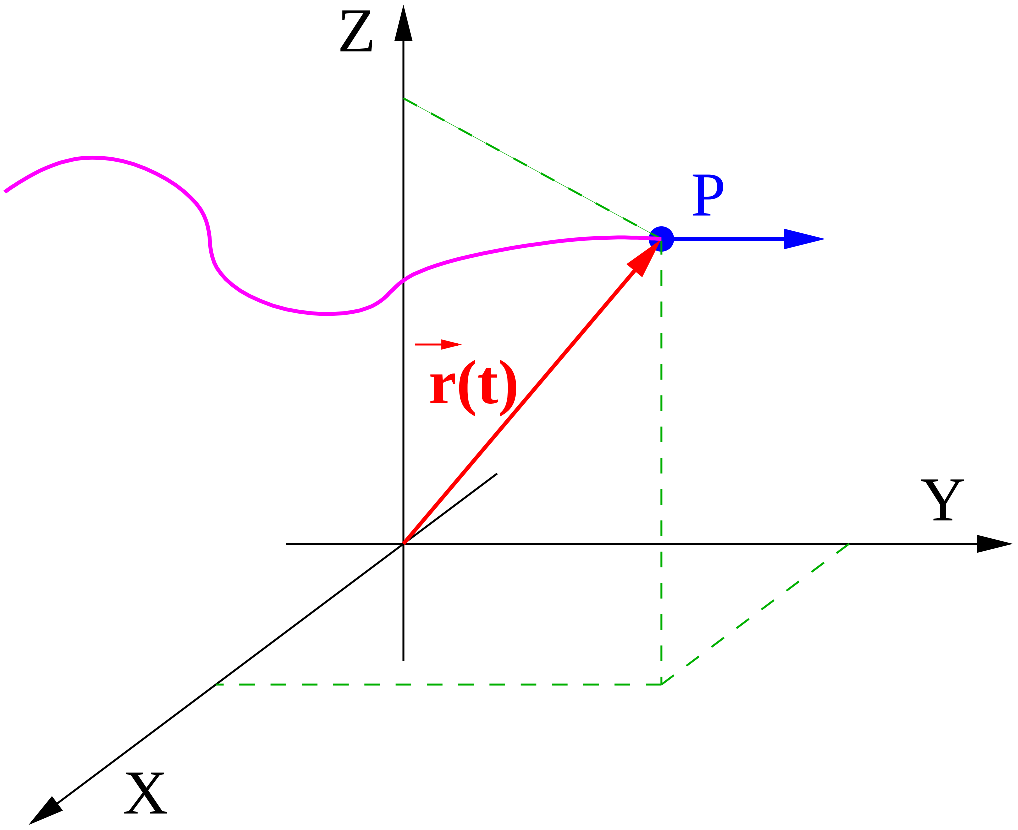
Tor ruchu

Opisuje zmianę położenia ciała w czasie

W ogólnym przypadku -
postać parametryczna toru:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{r}(t)$$



Wektor położenia ciała $\vec{r}$ (wszystkie jego współrzędne) wyrażamy jako funkcje czasu.

Pojęcia podstawowe

Tor ruchu

W szczególnych przypadkach możliwe jest odwrócenie jednej z zależności:

$$t = F(x)$$

czas wyrażamy jako funkcję współrzędnej

⇒ postać uwikłana toru:

$$y = y(F(x)) = y(x) \qquad z = z(x)$$

$$\vec{r} = (x, y(x), z(x))$$

Funkcje

W fizyce bardzo często staramy się opisać zależności pomiędzy różnymi wielkościami w postaci funkcyjnej.

Naogół do oznaczenia funkcji używamy symbolu odpowiadającego danej wielkości fizycznej, np.:

droga - s, wysokość - h, prędkość - v

Postać funkcyjna zależy jednak od wyboru argumentu funkcji !

W przypadku opisu toru:

$y(t)$ i $y(x)$ to dwie różne funkcje !

choć opisują tą samą wielkość fizyczną

Pojęcia podstawowe

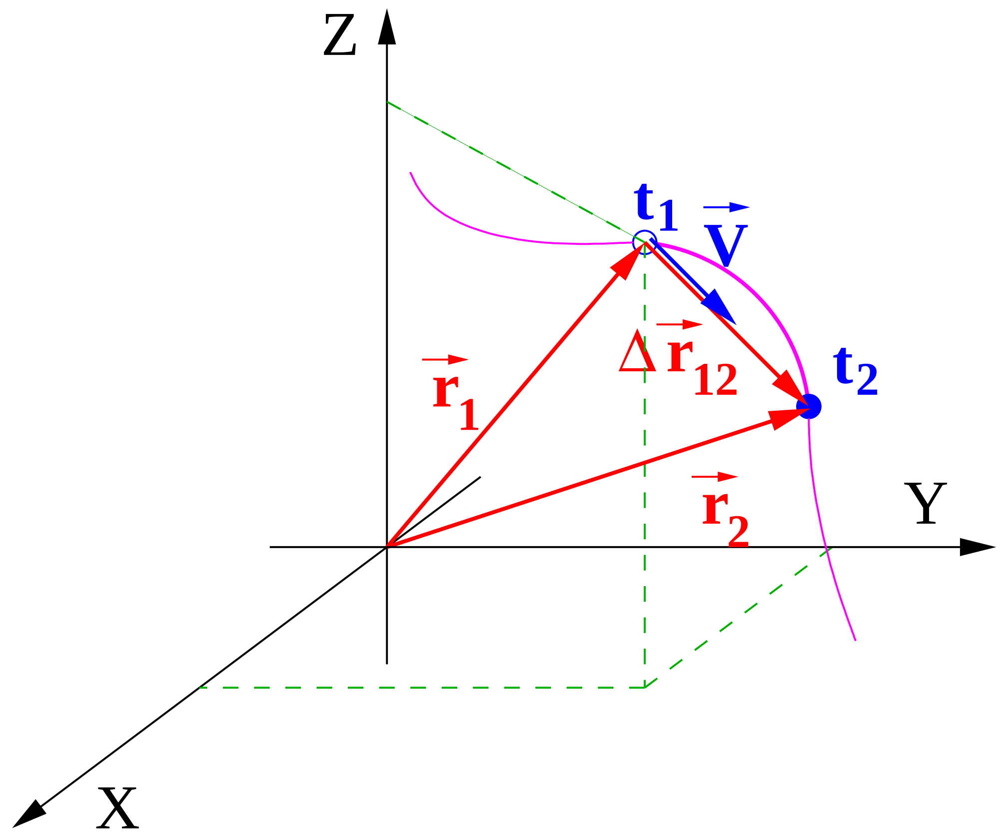
Prędkość średnia

W odstępie czasu:

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1$$

punkt materialny przemieścił się o:

$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



Prędkość średnią definiujemy jako

$$\vec{V}_{12}^{(\text{śr})} = \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}$$

Pojęcia podstawowe

Prędkość chwilowa

Praktycznie każdy pomiar prędkości musi trwać skończony okres czasu.

Prawie zawsze mierzymy więc prędkość średnią.

Pojęcie prędkości chwilowej wprowadzamy jako graniczną wartość prędkości średniej dla nieskończenie krótkiego czasu pomiaru, $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}^{(\text{śr})} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Doświadczenie pokazuje, że jest to pojęcie dobrze zdefiniowane:
dla rzeczywistych obiektów ta granica zawsze istnieje.

Pojęcia podstawowe

Prędkość chwilowa

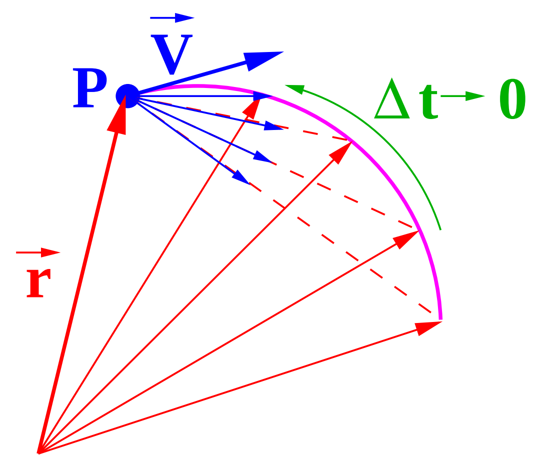
Matematycznie definicja prędkości chwilowej odpowiada definicji pochodnej:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Pochodna wektora $\equiv$ wektor pochodnych składowych tego wektora

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{i}_y + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{i}_z = v_x \cdot \vec{i}_x + v_y \cdot \vec{i}_y + v_z \cdot \vec{i}_z$$

Wektor prędkości chwilowej jest **styczny do toru**



Wartość prędkości:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Pojęcia podstawowe

Przyspieszenie średnie

W odstępie czasu:

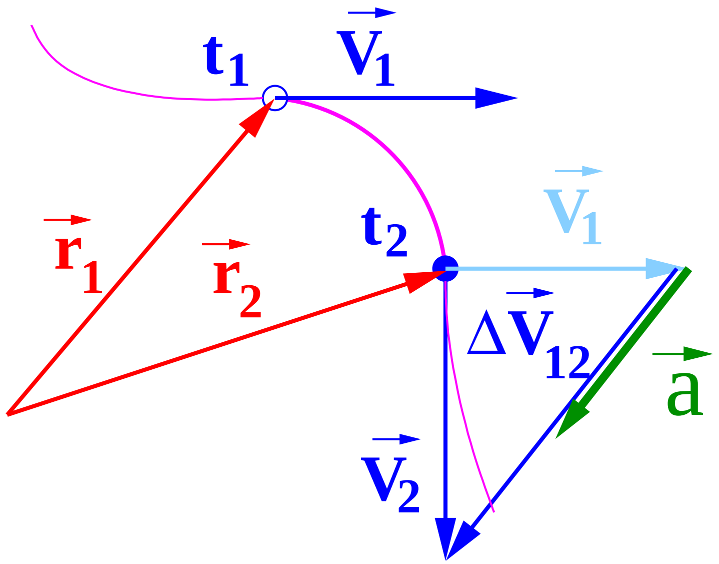
$$\Delta t_{12} \;=\; t_2 - t_1$$

prędkość zmienia się o:

$$\Delta \vec{V}_{12} \;=\; \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)$$

Przyspieszenie średnie:

$$\vec{a}^{(\text{śr})}_{12} \;=\; \frac{\Delta \vec{V}_{12}}{\Delta t_{12}}$$

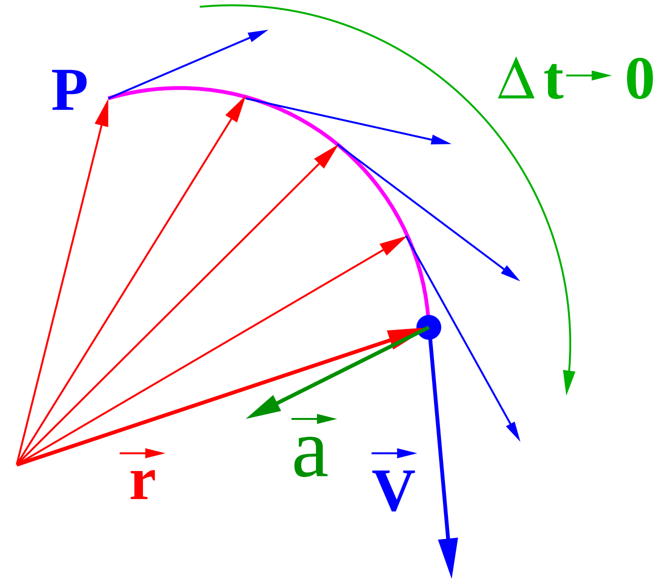


Pojęcia podstawowe

Przyspieszenie chwilowe

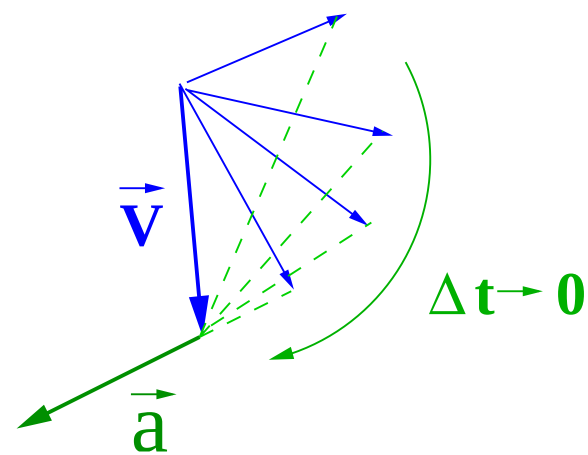
Podobnie jak w przypadku prędkości - graniczna wartość dla nieskończenie krótkiego pomiaru:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$



Przyspieszenie chwilowe jest pochodną po czasie prędkości chwilowej:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \vec{i}_x + \frac{dV_y}{dt} \cdot \vec{i}_y + \frac{dV_z}{dt} \cdot \vec{i}_z$$
$$= a_x \cdot \vec{i}_x + a_y \cdot \vec{i}_y + a_z \cdot \vec{i}_z$$



Opisuje “tempo” zmian prędkości...

Klasyfikacja ruchów

Ze względu na tor

wybrane przypadki szczególne

- prostoliniowy, odbywający się wzdłuż lini prostej

  Zawsze możemy tak wybrać układ współrzędnych aby

$$y(t) = z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{i}_x \cdot x(t)$$

- płaski, odbywający się w ustalonej płaszczyźnie

$$z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{i}_x \cdot x(t) \; + \; \vec{i}_y \cdot y(t)$$

- po okręgu

Ze względu na przyspieszenie

- jednostajny $\Rightarrow$ wartość prędkości pozostaje stała: $|\vec{V}|$ = const
- jednostajnie przyspieszony $\Rightarrow$ przyspieszenie jest stałe: $\vec{a}$ = const

Ruch jednostajny prostoliniowy

Najprostszy przypadek ruchu:

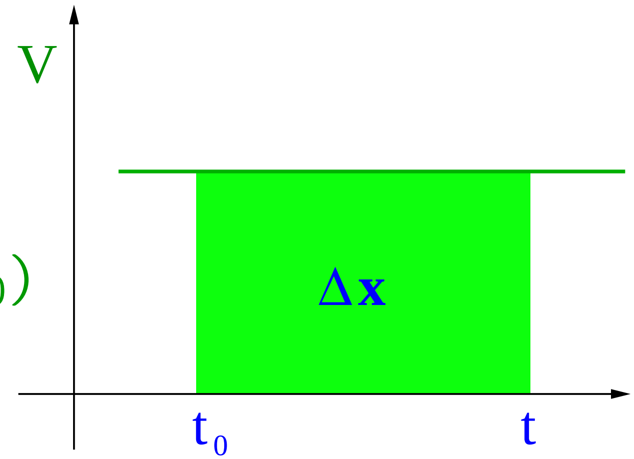
- Jednostajny: $|\vec{V}|$ = const
- Prostoliniowy: $\frac{\vec{V}}{V}$ = const

$$\Big\} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$$

Przyjmując, że ruch odbywa się wzdłuż osi X:

$$V = \frac{dx}{dt} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + V \cdot (t - t_0) \qquad x_0 = x(t_0)$$



Położenie (przebyta droga) jest liniową funkcją czasu.

Drogi przebyte w równych odcinkach czasu są sobie równe.

Ruch prostoliniowy

Zależność drogi od prędkości

Przypadek ogólny: znamy prędkość $V(t)$
czy możemy wyznaczyć zależność położenia od czasu ?

Możemy sumować przesunięcia dx po krótkich przedziałach czasu dt.

Przesunięcie ciała w czasie $\Delta t = t - t_0$:

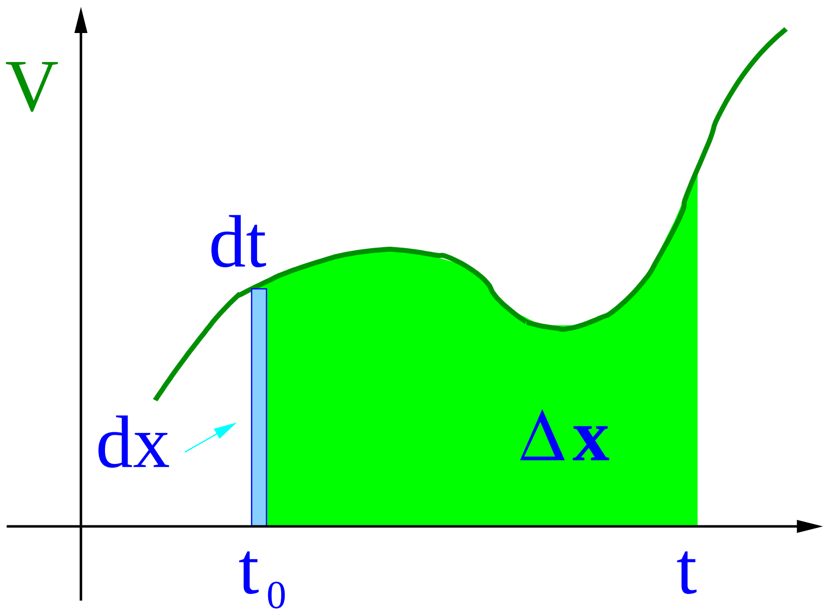
$$\Delta x = \sum_{dt} dx = \sum_{dt} V\,dt$$

Graficznie: pole pod krzywą $V(t)$

Matematycznie, przechodząc do granicy $dt \to 0$

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} V\,dt$$

całka oznaczona



Ruch jednostajnie przyspieszony

Jednostajnie przyspieszony

Ruch ze stałym przyspieszeniem $\vec{a}$ = const

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \text{const} = \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \qquad\qquad \vec{V}_0 = \vec{V}(t_0)$$

$$d\vec{V} = \vec{a}(t)\; dt \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\; dt$$

Prostoliniowy

Ruch jest prostoliniowy: $\frac{\vec{V}}{V}$ = const $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\vec{V} \,||\, \vec{a}$ = const

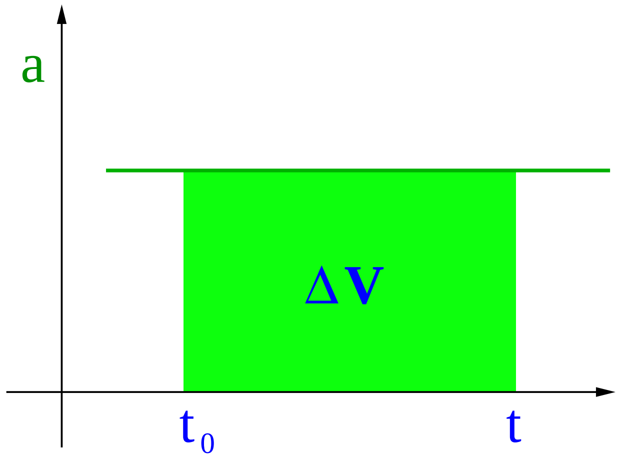
Przyspieszenie musi mieć kierunek zgodny z kierunkiem prędkości

Ruch jednostajnie przyspieszony

Prostoliniowy (⇒ jednowymiarowy)

Prędkość jest liniową funkcją czasu:

$$V = V_0 + a \cdot (t - t_0) = V_0 + \int_{t_0}^{t} a \, dt$$

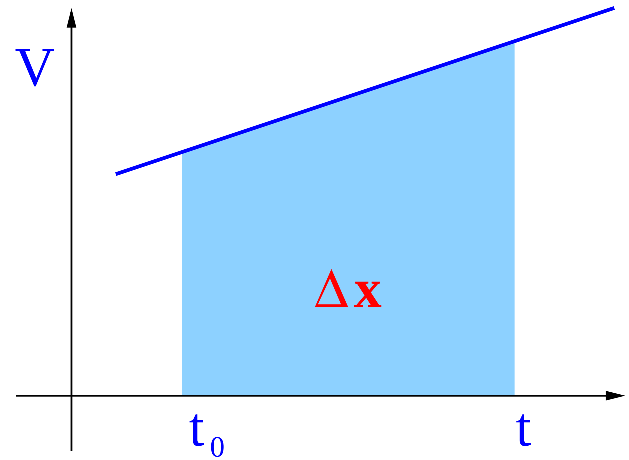


Położenie jest kwadratową funkcją czasu:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(V + V_0) \cdot (t - t_0) \qquad \text{pole trapezu}$$

$$= x_0 + V_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} V \, dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [V_0 + a \cdot (t - t_0)] \, dt$$



Ruch jednostajnie przyspieszony

Przyjmijmy, że w chwili $t_0 = 0$ ciało spoczywa: $V_0 = V(t_0) = 0$.

Mierzymy drogę jaką ciało przebywa w równych przedziałach czasu:

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} = \Delta t \\ \Rightarrow t_n &= n \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Przebyta droga:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 \\ \Delta x_n &= x(t_n) - x(t_{n-1}) = \frac{1}{2}\, a \cdot \left(t_n^2 - t_{n-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\, a \cdot \Delta t^2 \left(n^2 - (n-1)^2\right) = \frac{1}{2}\, a \cdot \Delta t^2 \cdot (2n-1) \end{aligned}$$

Drogi w kolejnych odcinkach czasu mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = 1 : 3 : 5 : 7 : \ldots$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Przypadek ogólny

W ogólnym przypadku, gdy wektory $\vec{V}_0$ i $\vec{a}$ nie są równoległe,
ruch jednostajnie przyspieszony nie jest ruchem prostoliniowym:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{V}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie przechodzącej przez $\vec{r}_0$
i wyznaczonej przez kierunki wektorów $\vec{V}_0$ i $\vec{a}$.

Ruch jednostajnie przyspieszony

Przypadek ogólny

Zawsze możemy tak wybrać układ współrzędnych aby przyspieszenie skierowane było wzdłuż jednej z osi, przykładowo osi OY:

$$\vec{a} \parallel \vec{i}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = (0, a, 0)$$

oraz prędkość początkowa leżała w płaszczyźnie XY:

$$\vec{V}_0 \;=\; (V_{x,0}, V_{y,0}, 0)$$

Ruch możemy wtedy opisać jako zlożenie niezależnych ruchów w 3 składowych:
ruch jednostajny (X) $\oplus$ ruch jednostajnie przyspieszony (Y) $\oplus$ spoczynek (Z):

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= a \\ a_z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V_x &= V_{x,0} = const \\ V_y &= V_{y,0} + a\,t \\ V_z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + V_{x,0} \cdot (t - t_0) \\ y &= y_0 + V_{y,0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\,a \cdot (t - t_0)^2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Niezależność ruchów

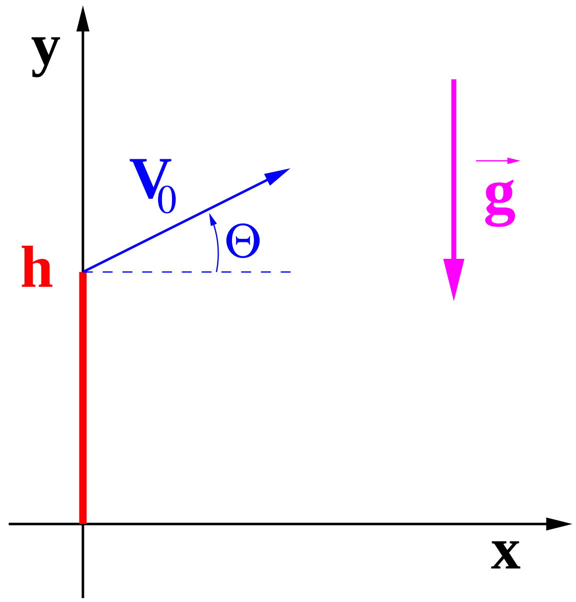
Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch ciala w jednorodnym polu grawitacyjnym:

$$\vec{a} = \vec{g} = (0, -g, 0)$$

(wygodny wybór układu współrzędnych)



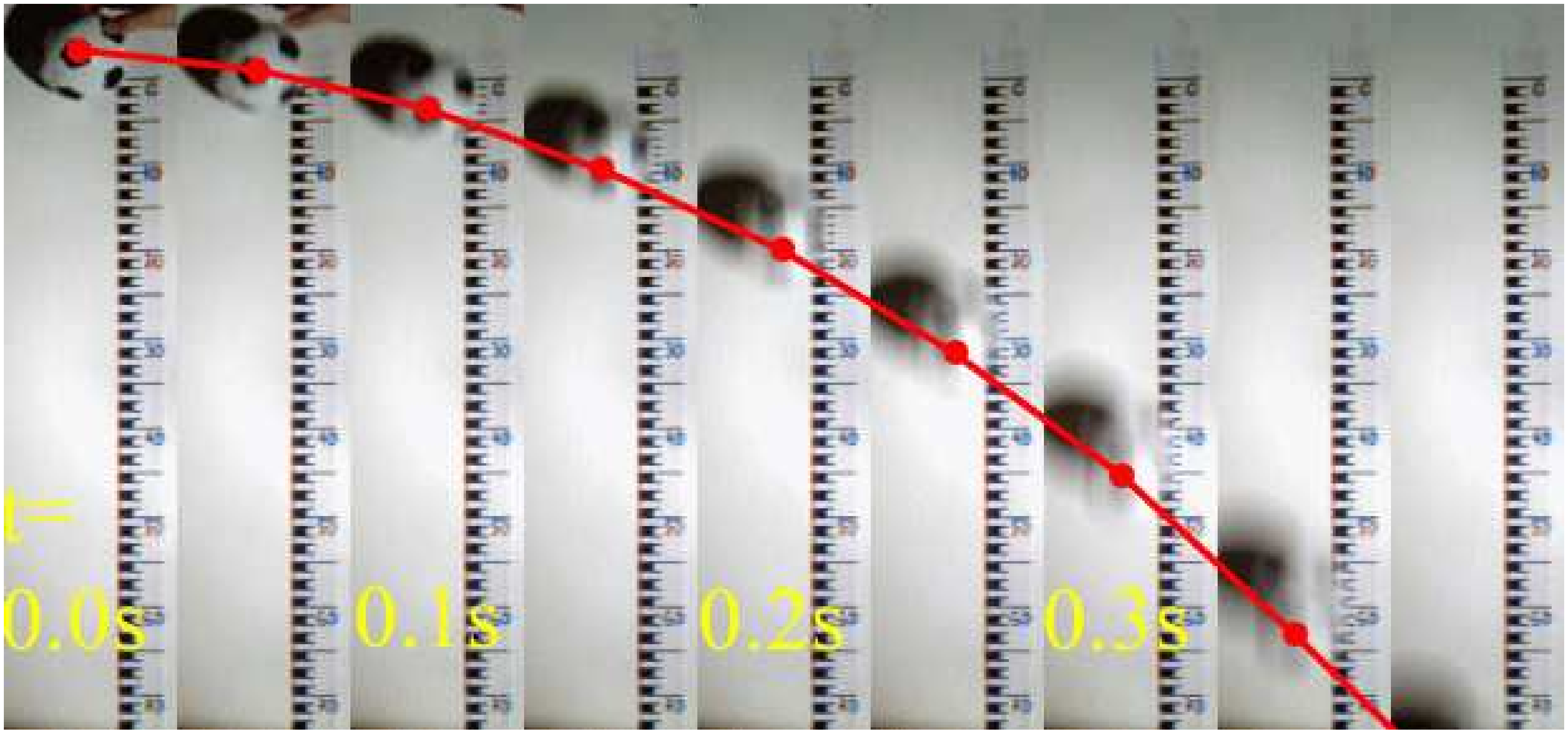
Pole grawitacyjne Ziemi możemy przyjąć za jednorodne, jeśli badamy ruch na odległościach $|\Delta\vec{r}| \ll R_Z$

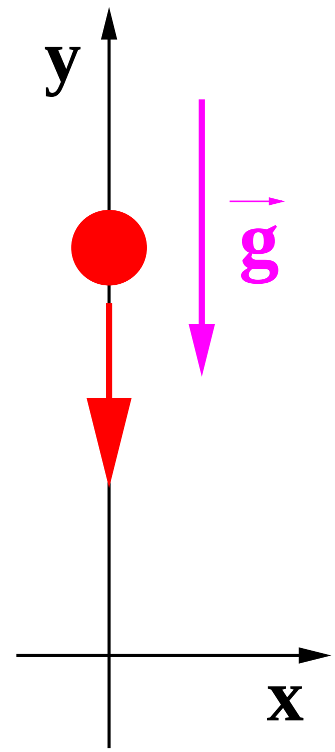
Rodzaje ruchu:

- spadek swobodny: $V_0 = 0$ (ruch prostoliniowy)
- rzut pionowy: $\theta = \pm\pi/2$ (ruch prostoliniowy)
- rzut poziomy: $\theta = 0$
- rzut ukośny: $\theta \neq 0, \pi/2, ...$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Spadek swobodny





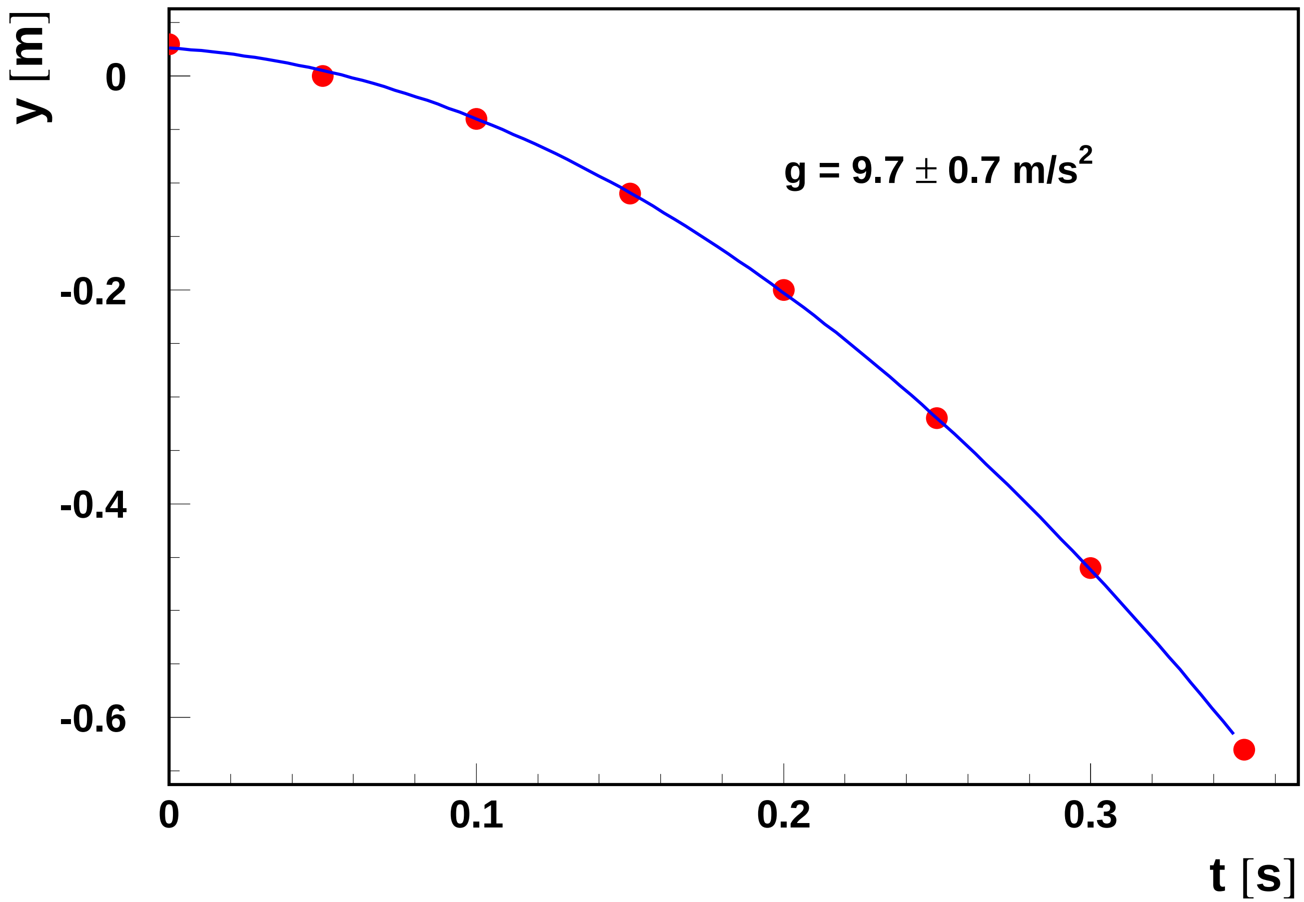
Położenie zależy kwadratowo od czasu:

$$y \;=\; h - \frac{g}{2} \cdot t^2 \qquad \text{zakładając: } y(0) = h,\ V_y(0) = 0$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

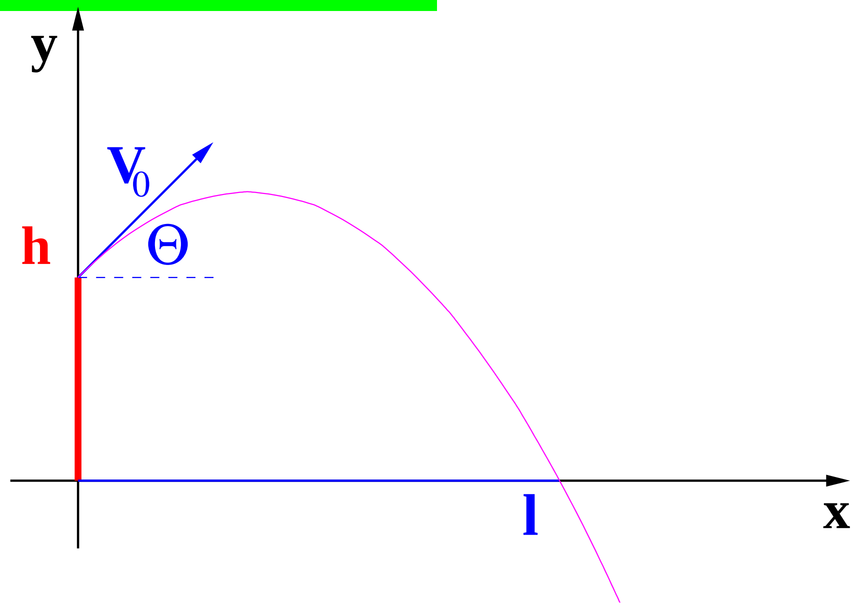
Spadek swobodny

Wyniki “domowych” pomiarów:



Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w polu grawitacyjnym



Niezależność ruchów: $t_0 = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = h$

$$x = V_{x,0} \cdot t = V_0 \cos\theta \cdot t$$

$\Rightarrow$ ruch w poziomie zależy tylko od $V_{x,0}$

$$\begin{aligned} y &= h + V_{y,0} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \\ &= h + V_0 \sin\theta \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned}$$

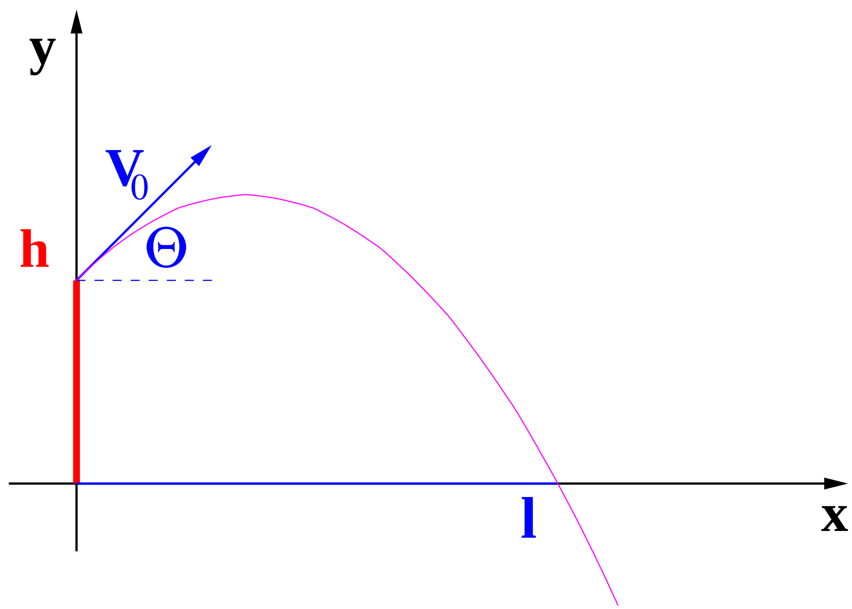
$\Rightarrow$ ruch w pionie zależy tylko od $V_{y,0}$

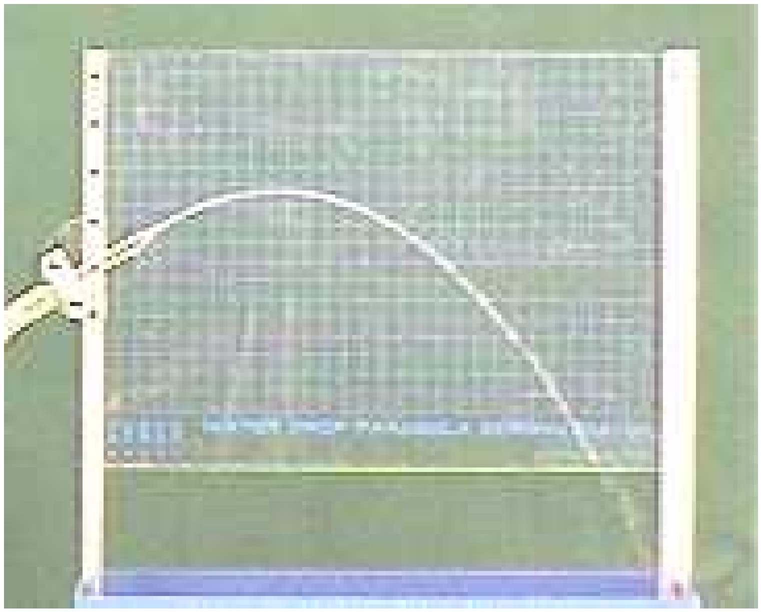
Rzut poziomy $\theta = 0 \Rightarrow V_{y,0} \Rightarrow$ czas spadania nie zależy od V_0: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Dwa ciała o tym samym $V_{x,0}^{(1)} = V_{x,0}^{(2)} \Rightarrow$ taki sam ruch w poziomie: $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w polu grawitacyjnym





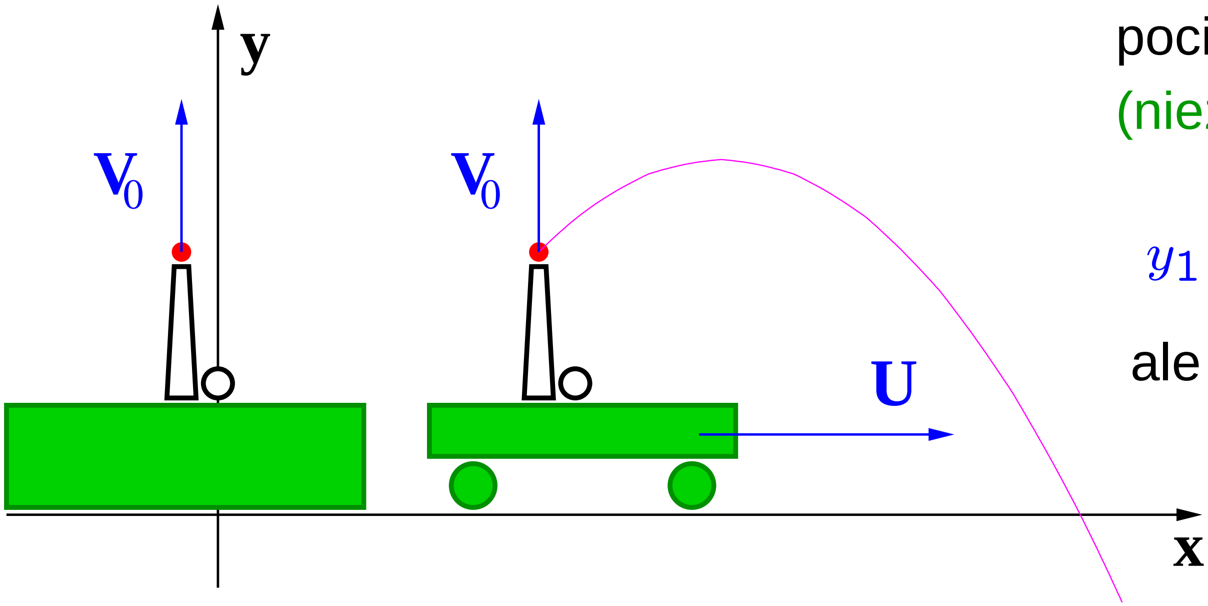
Tor w rzucie ukośnym: $\Rightarrow$ $y = h + x \cdot \tan\theta - x^2 \cdot \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta}$ $\Rightarrow$ parabola

Zasięg dla h=0 $\Rightarrow$ $l = \frac{V_0^2}{g}\sin(2\theta)$ $\Rightarrow$ największy zasięg dla $\theta = \frac{\pi}{4}$ (45°)

Transformacja Galileusza

Wybór układu odniesienia

Dwa identyczne działa ustawione są pionowo: jedno na peronie, a drugie na wagonie.



Dla obserwatora na peronie ruch pocisków jest identyczny w pionie: (niezależność ruchów)

$$y_1(t) = y_2(t) \;=\; y_0 + V_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

ale różny w kierunku poziomym:

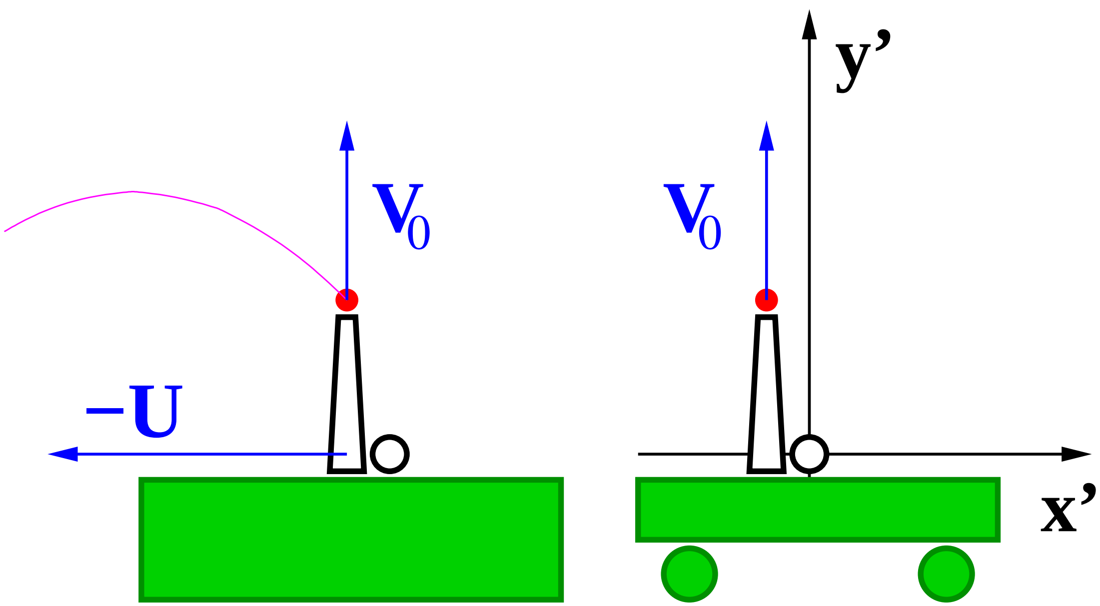
$$x_1(t) \;=\; 0$$
$$x_2(t) \;=\; U \cdot t$$

Skąd wiemy, że w kierunku pionowym ruch obu pocisków będzie identyczny? (zaniedbując opory powietrza)

Transformacja Galileusza

Wybór układu odniesienia

Dwa identyczne działa ustawione są pionowo:
jedno na peronie, a drugie na wagonie.



Dla obserwatora na wagonie sytuacja wygląda identycznie, tylko teraz porusza się peron:

$$x'_1(t) = -U \cdot t$$
$$x'_2(t) = 0$$

Ruch w pionie nie zmienia się:

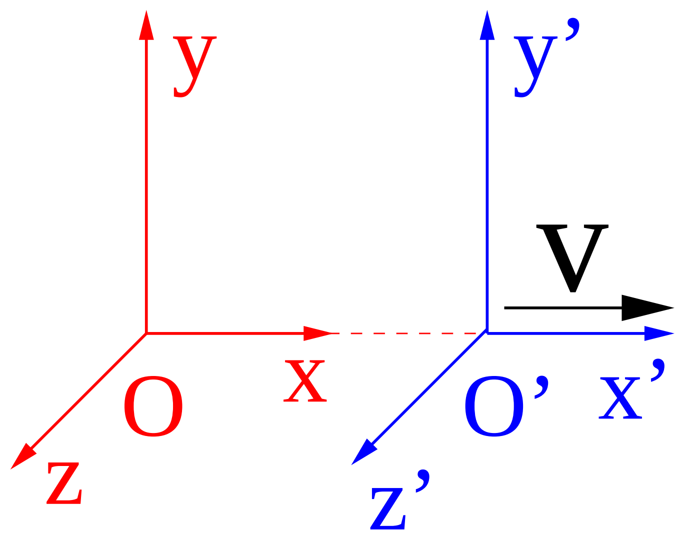
$$y'_1(t) = y'_2(t) = y_0 + V_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

W kierunku pionowym ruch obu pocisków musi być identyczny
ze względu na symetrię zagadnienia.

Transformacja Galileusza

Rozważmy dwa układy odniesienia związane z obserwatorami O i O' poruszające się względem siebie ruchem jednostajnym, prostoliniowym.

Przyjmijmy, że osie układów są równoległe i ruch względny zachodzi w kierunku osi X. W chwili $t = t' = 0$ początki układów pokrywały się.

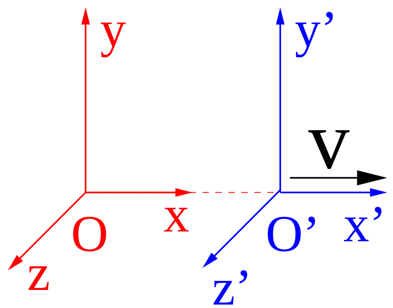


Obserwując ten sam ruch obserwatorzy mierzą inną zależność położenia od czasu.

Jeśli wiemy jak obserwatorzy poruszają się względem siebie, znamy $\vec{V}$, powinniśmy móc wyznaczyć transformacje $(x, y, z) \Leftrightarrow (x', y', z')$

Transformacja Galileusza

Transformacja współrzędnych przestrzennych



Transformacja Galileusza $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = x' + V\,t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Transformacja Galileusza prowadzi do wzoru na składanie prędkości:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V}}$$

$\vec{V}$ - prędkość względna

Uniwersalność czasu

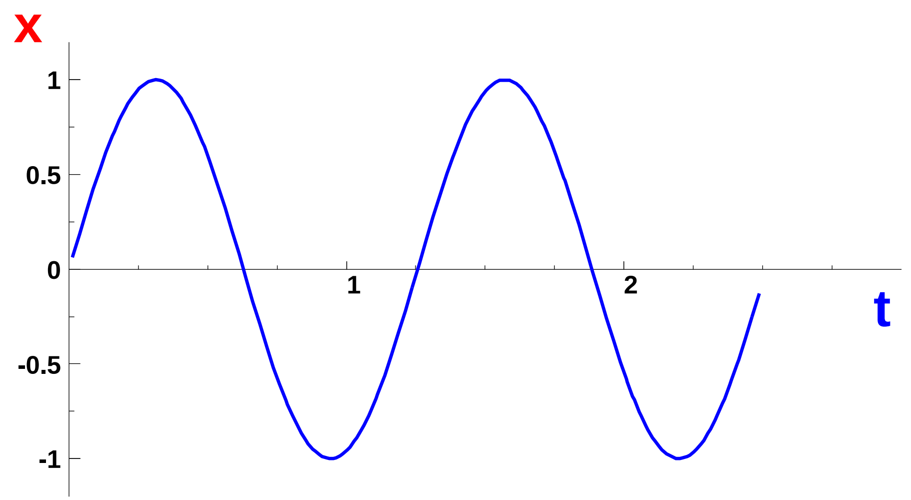
Czas nie zależy od układu odniesienia: $t \equiv t'$

Jest to podstawowe założenie w fizyce klasycznej (Newtonowskiej).

Ruch harmoniczny

Szczególny przykład ruchu drgającego:

$$x \;=\; A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$



Parametry

- amplituda A
- częstość kołowa ω

  okres drgań $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- faza początkowa ϕ

Prędkość: $V = \dfrac{dx}{dt} = \omega\; A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

Przyspieszenie: $a = \dfrac{dV}{dt} = -\omega^2\; A \cdot \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 \cdot x$

Ruch harmoniczny

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \, x \quad \text{(ruch w jednym wymiarze)}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \, \vec{r} \quad \text{(postać ogólna)}$$

Równanie oscylatora dobrze opisuje zachowanie bardzo wielu układów fizycznych:

- ciężarek na sprężynie
- wahadło matematyczne (dla małych wychyleń)
- struna
- spławik na wodzie

Równanie oscylatora harmonicznego jest przykładem równania różniczkowego.

Nasza wiedza nt. ruchu ciała przedstawiana jest często w postaci równań różniczkowych (równań ruchu). Aby znaleźć opis ruchu ciała trzeba te równania rozwiązać.

Najczęsciej są to równania typu: $\vec{a} = F(\vec{x}, \vec{v}, t)$

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Styczny do toru punktu materialnego jest zawsze wektor

   A prędkości chwilowej   B prędkości średniej   C przyspieszenia chwilowego
   D przyspieszenia średniego

2. Jak skierowane jest przypieszenie w ruchu prostoliniowym:

   A równolegle do prędkości   B dowolnie   C prostopadle do prędkości
   D nie ma przyspieszenia

3. Silnik rakietowy o stałej sile ciągu rozpędza pojazd od 0 do 360 km/h w ciągu 10 sekund. Jaką drogę pokona w tym czasie pojazd?

   A 1800 m   B 900 m   C 500 m   D 360 m

4. Działo umieszczone na nieruchomej platformie wystrzeliwuje pocisk pionowo do góry. Jak zmieni się wysokość na jaką doleci pocisk (zaniedbując opory powietrza) gdy platforma zacznie się poruszać w kierunku poziomym.

   A wzrośnie   B nie zmieni się   C zmaleje   D zależy od kierunku ruchu

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego