Prawa ruchu: dynamika

Fizyka I (Mechanika)

Wykład IV:

- Równania ruchu
- Więzy
- Siły sprężyste i opory ruchu
- Prawa ruchu w układzie nieinercjalnym

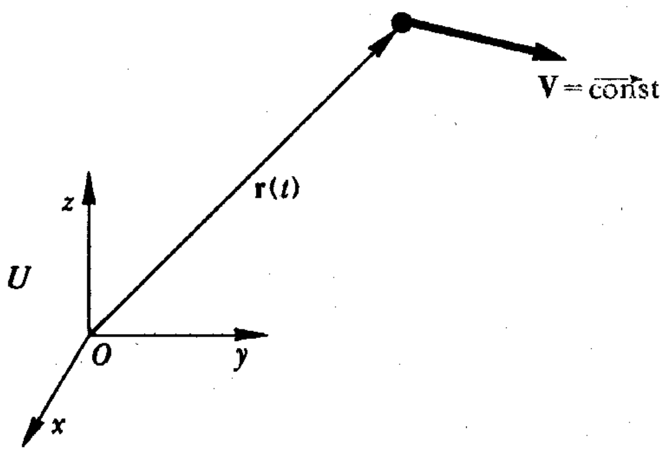
  $\Rightarrow$ siły bezwładności

I zasada dynamiki

Zasada bezwładności

"Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszajż ciała do zmiany tego stanu." I.Newton

Układ w którym obowiązuje I zasada dynamiki nazywamy **układem inercjalnym**.



Jeśli istnieje jeden układ inercjalny to istnieje nieskończenie wiele układów inercjalnych.

każdy inny układ poruszający się względem niego z prędkością $\vec{V} = const$

Zasada bezwładności jest równoważna z postulatem:

Istnieje układ inercjalny

II zasada dynamiki

II prawo Newtona

"Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej

i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona"

Zmiana ruchu ciała (w układzie inercjalnym) jest zawsze wynikiem oddziaływania otoczenia (innych ciał).

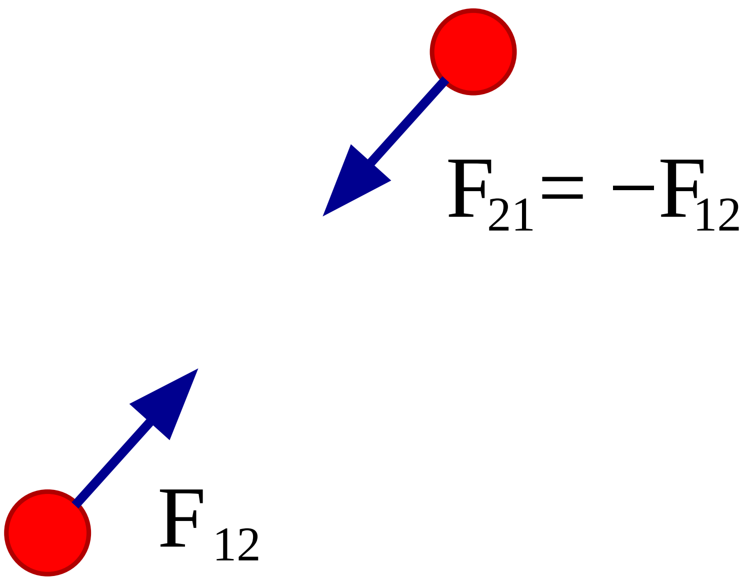
Oddziaływanie to opisujemy ilościowo wprowadzając pojęcie **siły**

Siła jest wielkością wektorową (kierunek zmiany ruchu)

Siły możemy porównywać ilościowo niezależnie od ruchu ciał
naogół wykorzystujemy przy tym I zasadę dynamiki (równowaga sił)
np. porównywanie ciężaru poprzez ważenie ciał, pomiar siły dynamometrem...

III zasada dynamiki

Zasada akcji i reakcji



"Każdemu działaniu towarzyszy
równe i przeciwnie skierowane
przeciwdziałanie.

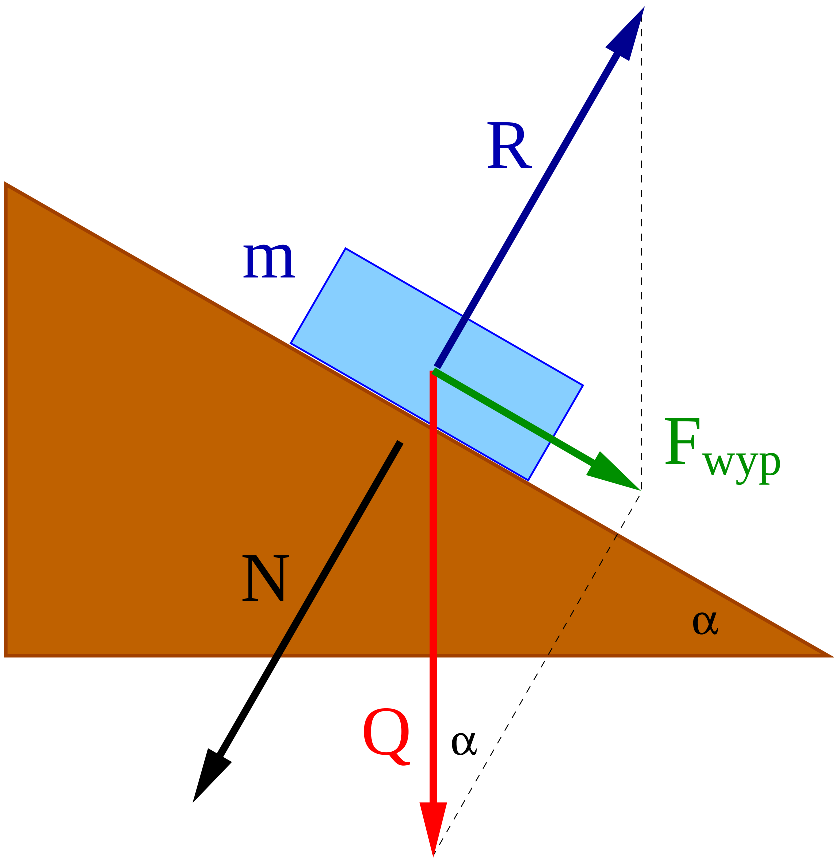
Wzajemne oddziaływania dwóch ciał
są zawsze równe sobie
i skierowane przeciwnie."

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Zasady dynamiki

Przykład

Klocek na równi bez tarcia



Na klocek działają siły ciężkości i reakcji równi:

$$\vec{F}_{wyp} = \vec{Q} + \vec{R}$$

W kierunku prostopadłym do powierzchni równi nie ma ruchu $\Rightarrow$ nie ma przyspieszenia $\Rightarrow$ siły równoważą się:

$$R = Q \cdot \cos\alpha$$

Siła wypadkowa działa równolegle do równi:

$$F_{wyp} = Q \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad ma = mg \cdot \sin\alpha$$

$$a = g \cdot \sin\alpha$$

Równania ruchu

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu,
czyli określanie ruchu ciała ze znajomości działających na nie sił.

Postać ogólna

Siła działająca na ciało może zależeć od położenia i prędkości cząstki oraz czasu

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$\Rightarrow$ równanie ruchu:

$$\boxed{m \, \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}$$

Układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu $m(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}) = (F_x, F_y, F_z)$

Ogólne rozwiązanie ma sześć stałych całkowania:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_6)$$

Równania ruchu

Warunki początkowe

Aby ściśle określić ruch ciała musimy poza rozwiązaniem równań ruchu wyznaczyć wartości wolnych parametrów (w ogólnym przypadku sześciu)

Najczęściej dokonujemy tego określając warunki początkowe:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}(t_0) \\ \vec{v}_0 &= \vec{v}(t_0) \end{aligned}$$

t_0 - wybrana "chwila początkowa"

W mechanice klasycznej obowiązuje "zasada przyczynowości"

Jeśli znamy równania ruchu oraz dokładnie poznamy warunki początkowe możemy jednoznacznie określić stan układu w przeszłości i w przyszłości.

Zachowanie obiektów mikroświata (np. cząstek elementarnych) nie jest deterministyczne.
Granice stosowalności mechaniki klasycznej określa wartość stałej Plancka $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$

Rówanania ruchu

Przykład

W ogólnym przypadku **siła sprężysta** może być przedstawiona w postaci:

$$\vec{F} \; = \; -k\,\vec{r}$$

Siła centralna - działająca zawsze w kierunku środka układu (zawsze możemy tak wybrać), stara się przywrócić ciało do położenia równowagi.

Równanie ruchu sprowadza się do postaci:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \; = \; -\omega^2\,\vec{r}\,, \qquad \text{gdzie: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\Rightarrow$ oscylator harmoniczny.

Ogólne rozwiązanie równania ruchu:

$$\vec{r}(t) \; = \; \vec{A}\cdot\cos\omega t \; + \; \vec{B}\cdot\sin\omega t$$

Rówanania ruchu

Oscylator harmoniczny

Wartości $\vec{A}$ i $\vec{B}$ możemy wyznaczyć z warunków początkowych:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 = \vec{r}(0) &= \vec{A} \\ \vec{v}_0 = \vec{v}(0) &= \omega \vec{B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cdot \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \cdot \sin \omega t$$

Ruch jest płaski, odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$.

Torem ruchu w ogólnym przypadku jest elipsa.

W szczególnym przypadku torem ruchu może być:

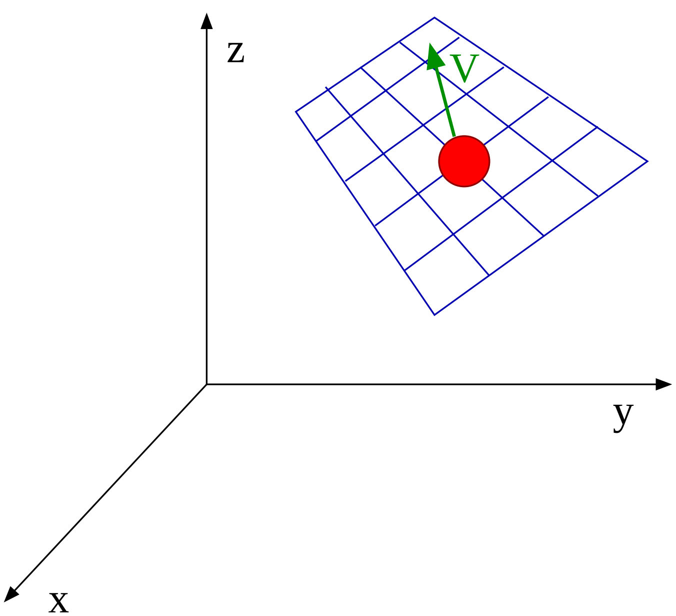
- odcinek, jeśli $\vec{r}_0 || \vec{v}_0$ (albo $\vec{r}_0 = 0$ albo $\vec{v}_0 = 0$)
- okrąg, jeśli $\vec{r}_0 \perp \vec{v}_0$ i $v_0 = \omega \cdot r_0$

Równania ruchu

Do tej pory rozważaliśmy ruch ciała, które może się przemieszczać bez ograniczeń w całej trójwymiarowej przestrzeni - trzy stopnie swobody: f=3.

W każdej chwili stan ciała opisuje sześć parametrów (dwa wektory: $\vec{r}$ i $\vec{v}$)

Więzy



W wielu przypadkach ruch ciała jest jednak ograniczony $\Rightarrow$ cząstka nieswobodna

$\Leftarrow$ powierzchnia więzów

Ogólny warunek opisujący powierzchnie:

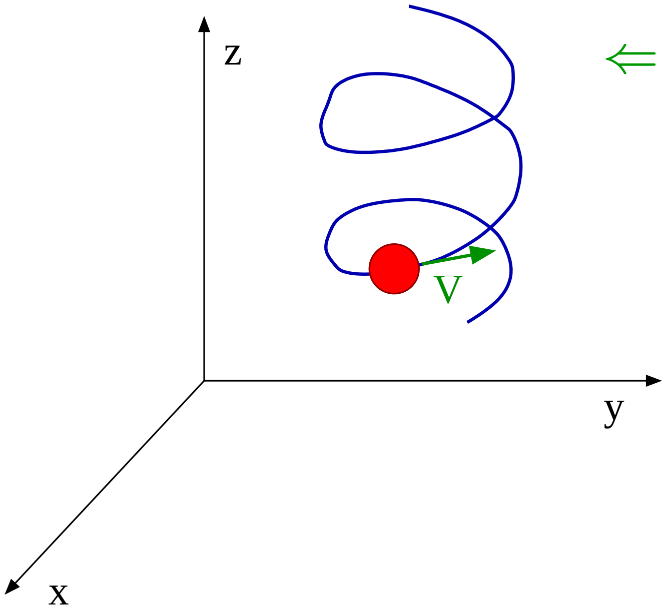
$$h(x, y, z, t) = 0$$

$\Rightarrow$ dwa stopnie swobody f=2

cztery parametry początkowe

Równania ruchu

Więzy



$\Leftarrow$ krzywa więzów

Krzywą w przestrzeni możemy opisać porzez dwa warunki:

$$h_1(x,y,z,t) = 0$$
$$h_2(x,y,z,t) = 0$$

$\Rightarrow$ jeden stopień swobody f=1,

dwa parametry początkowe

Do równania ruchu musimy wprowadzić dodatkową siłę reakcji więzów

$$\boxed{m\,\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) + \vec{F}_R}$$

gdzie: $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ - siły zewnętrzne, $\vec{F}_R$ - reakcja więzów

Rówanania ruchu

Więzy

Przy braku oporów ruchu (więzy idealne) siła reakcji więzów jest zawsze prostopadła do powierzchni lub krzywej więzów.

Więzy mogą być stacjonarne (*skleronomiczne*), niezależne od czasu:

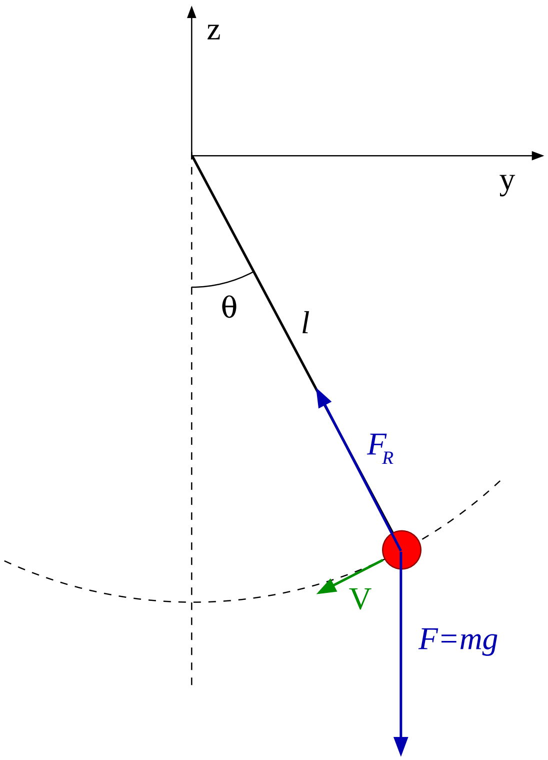
$$h(x, y, z) = 0$$

lub zależne od czasu (*reonomiczne*):

$$h(x, y, z, t) = 0$$

Przykład

Wahadło jednowymiarowe



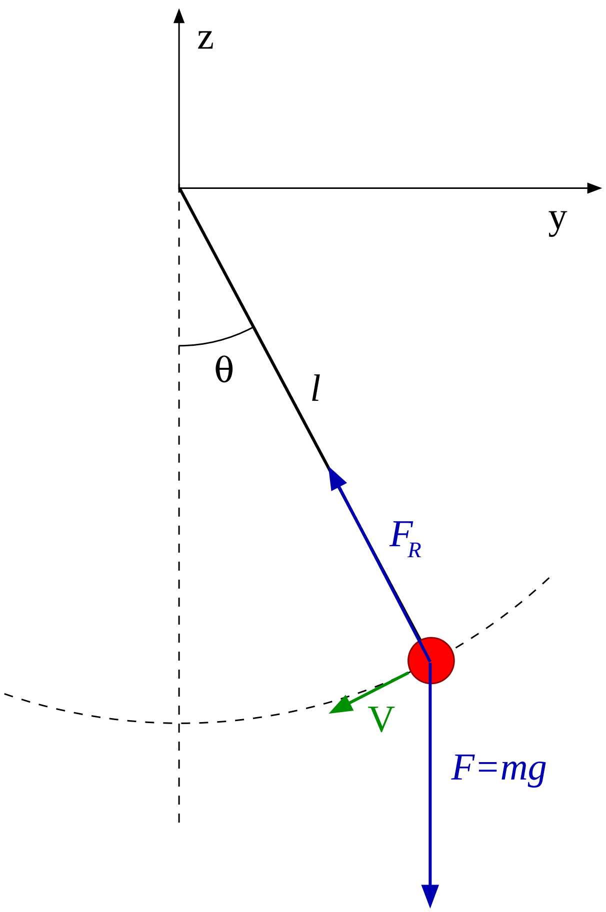
Równania więzów:

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \text{ - sfera}$$

$$x = 0 \text{ - płaszczyzna}$$

Rówanania ruchu

Wahadło



Warunki narzucone przez więzy najłatwiej uwzględnić opisując położenie kulki przez kąt Θ:

$$y = \; l \sin\Theta \qquad z = -l \cos\Theta$$

O sile reakcji $F_R(t)$ wiemy jedynie tyle, że działa wzdłuż nitki.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{F_R}{m}\sin\Theta \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{F_R}{m}\cos\Theta$$

$\Rightarrow$ przyspieszenie styczne nie zależy od F_R:

$$a_\Theta \equiv \cos\Theta\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sin\Theta\,\frac{d^2z}{dt^2} \;=\; -g\cdot\sin\Theta$$

W przybliżeniu małych kątów ($\sin\theta \approx \theta$) otrzymujemy:

$$l\,\frac{d^2\Theta}{dt^2} \;=\; -g\cdot\Theta$$

$\Rightarrow$ oscylator harmoniczny częstość $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Rówanania ruchu

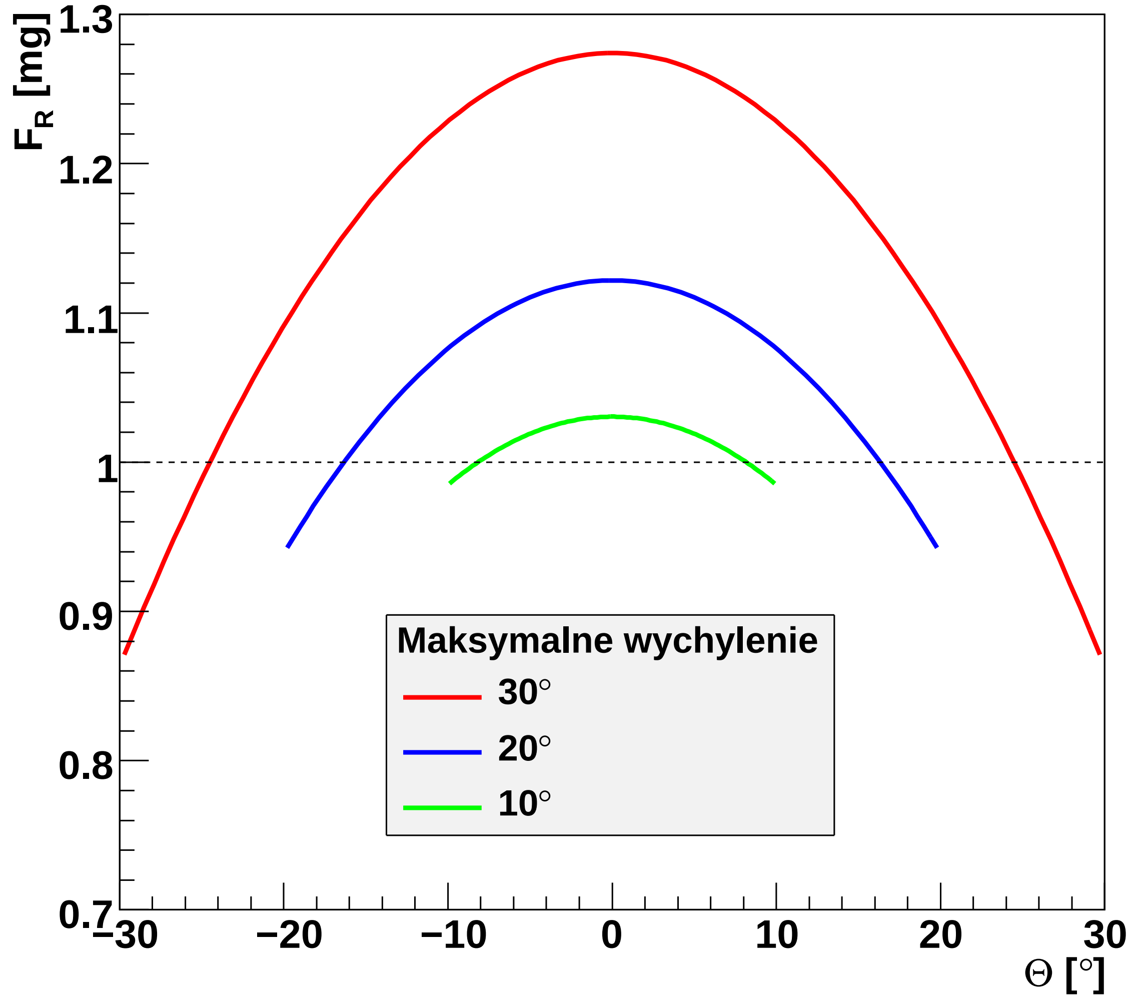
Wahadło

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego:

$$\Theta(t) = \Theta_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Siła reakcji wyznaczona przez podstawienie rozwiązania do równania ruchu (w przybliżeniu małych kątów):

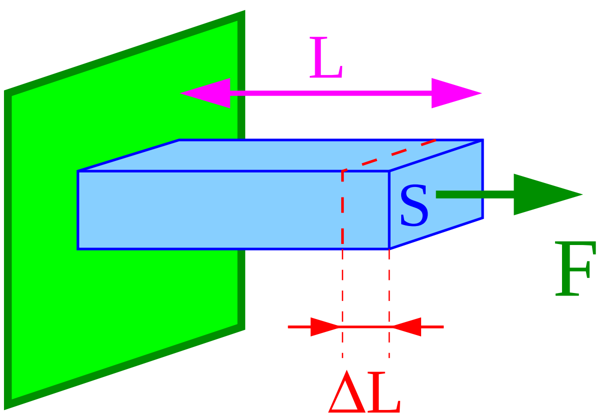
$$F_R(\Theta) \;=\; mg\left[1 + \Theta_0^2 - \frac{3}{2}\Theta^2(t)\right]$$



Siła sprężysta

Prawo Hooke'a

Opisuje zależność siły sprężystej od odkształcenia ciała:



$$F = E\,S\,\frac{\Delta L}{L}$$

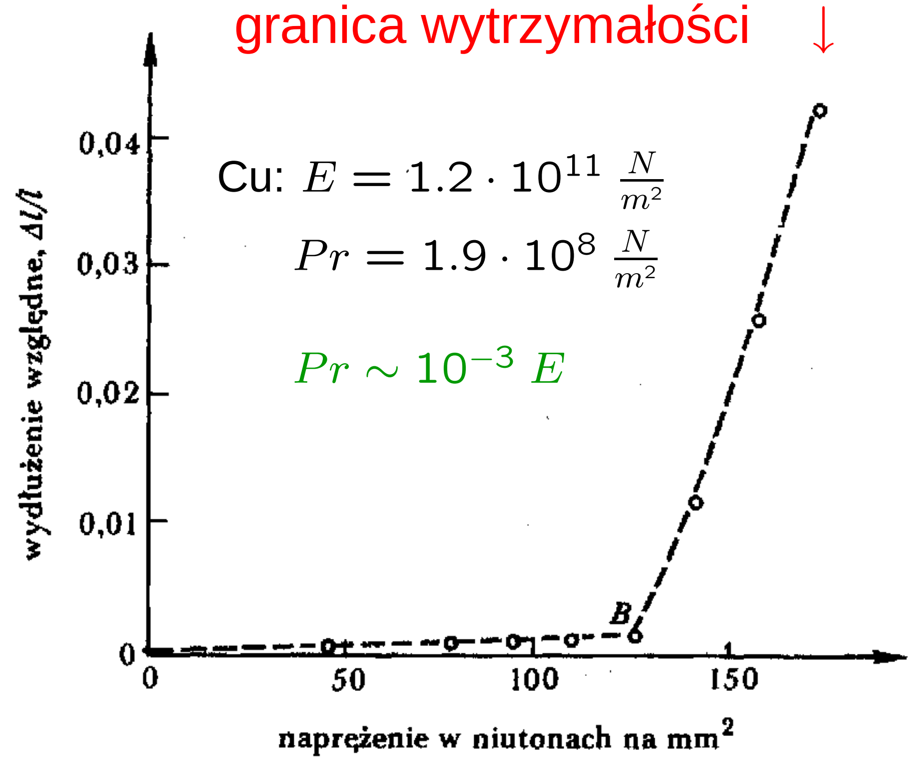
E - moduł Younga $[N/m^2]$

naprężenie odpowiadające dwukrotnemu wydłużeniu

Prawo Hooke'a jest prawem empirycznym

Jest słuszne tylko dla małych naprężeń.

granica wytrzymałości $\downarrow$



Cu: $E = 1.2 \cdot 10^{11}\ \frac{N}{m^2}$

$Pr = 1.9 \cdot 10^{8}\ \frac{N}{m^2}$

$Pr \sim 10^{-3}\ E$

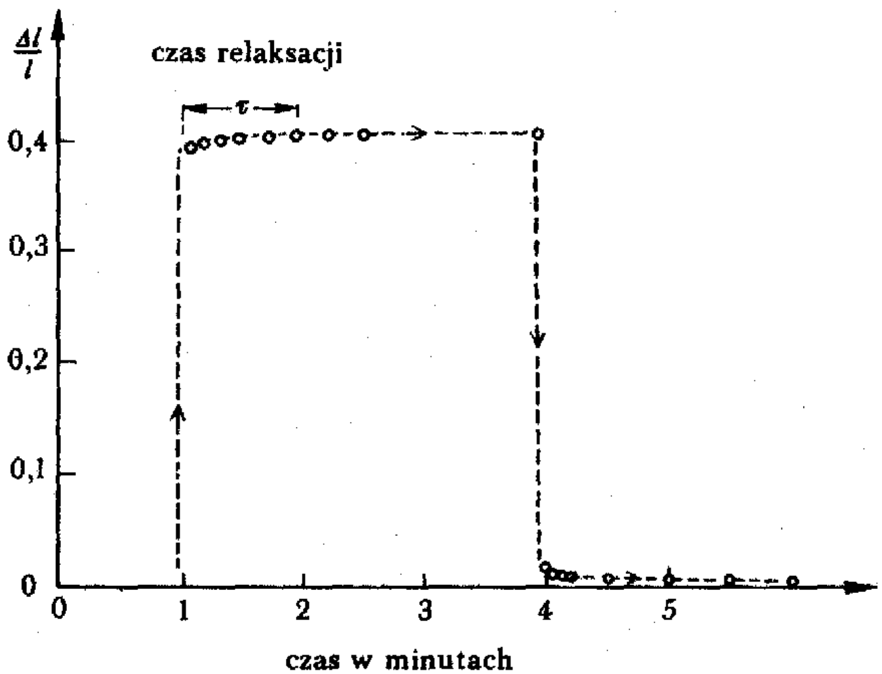
granica proporcjonalności $\uparrow$ (Pr)

Siła sprężysta

Relaksacja

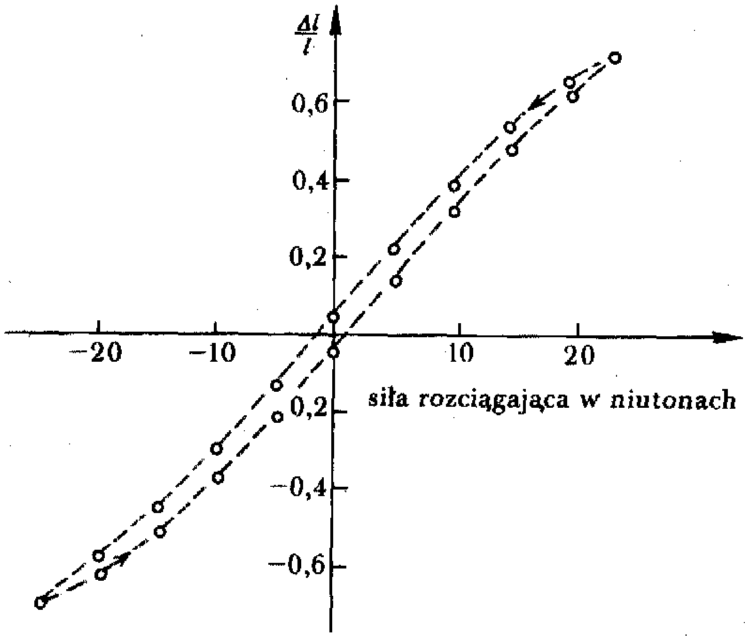
Prawo Hooke'a odnosi się do sytuacji statycznej.

Od momentu przyłożenia siły do osiągnięcia odpowiedniego odkształcenie mija skończony czas - czas relaksacji



podobnie gdy siła przestanie działać

Histereza

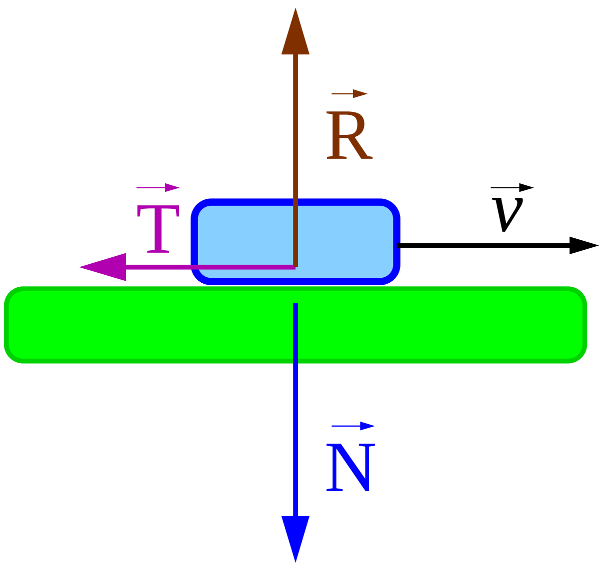


Przyłożenie dużej siły, nawet na krótki czas może powodować trwałe odkształcenie

⇒ trzeba przyłożyć siłę przeciwnie skierowaną

Tarcie

Tarcie kinetyczne



Siła pojawiająca się między dwoma powierzchniami poruszającymi się względem siebie, dociskanymi siłą N.

Ścisły opis sił tarcia jest bardzo skomplikowany.

$\Rightarrow$ Prawo empiryczne:

$$\vec{T} \; = \; -\mu_k \, \vec{i}_v \, N \qquad \vec{i}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Siła tarcia kinetycznego:

- jest proporcjonalna do $\perp$ siły dociskającej
- nie zależy od powierzchni zetknięcia
- nie zależy od prędkości

Prawo empiryczne $\Rightarrow$ przybliżone !!!

Tarcie

Obraz mikroskopowy

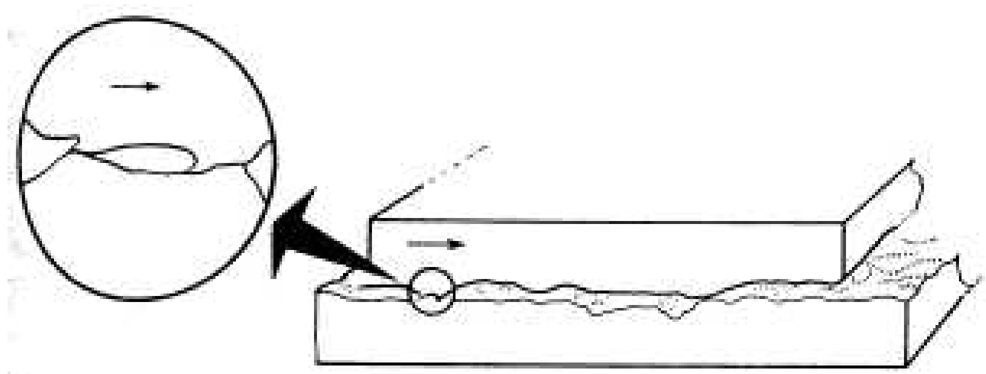
Tarcie wywołane jest przez oddziaływanie elektromagnetyczne cząstek stykających się ciał.

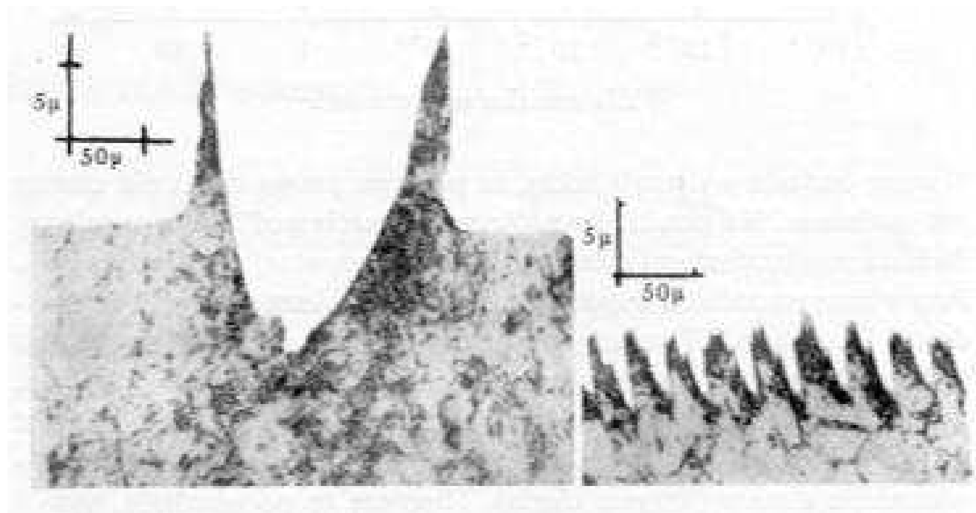
Powierzchnie nigdy nie są idealnie równe

na poziomie mikroskopowym cząstki jednego ciała “blokują drogę” cząstkom drugiego ciała

$\Rightarrow$ muszą zostać “odepchnięte”

wypolerowana miedź $\Rightarrow$

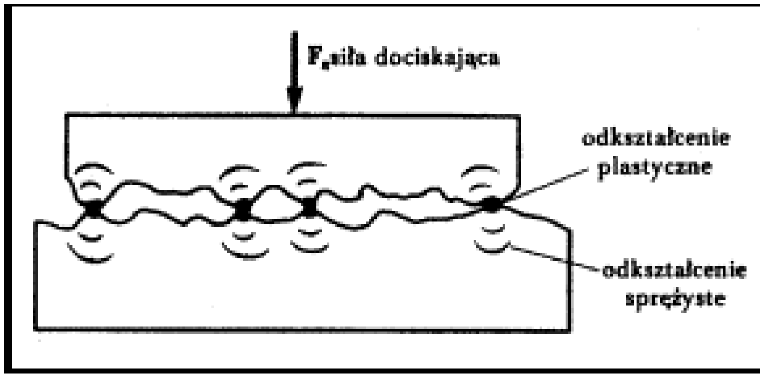




Tarcie

Zależność od nacisku

Powierzchnia rzeczywistego (mikroskopowego) styku ciał jest w normalnych warunkach wiele rzędów wielkości mniejsza niż powierzchnia geometryczna:



siła dociskająca	ułamek powierzchni
1 N/cm^2	0.00001
2.5 N/cm^2	0.000025
50 N/cm^2	0.0005
250 N/cm^2	0.0025

(płytki stalowe)

$\Rightarrow$ efektywna powierzchnia styku proporcjonalna do nacisku

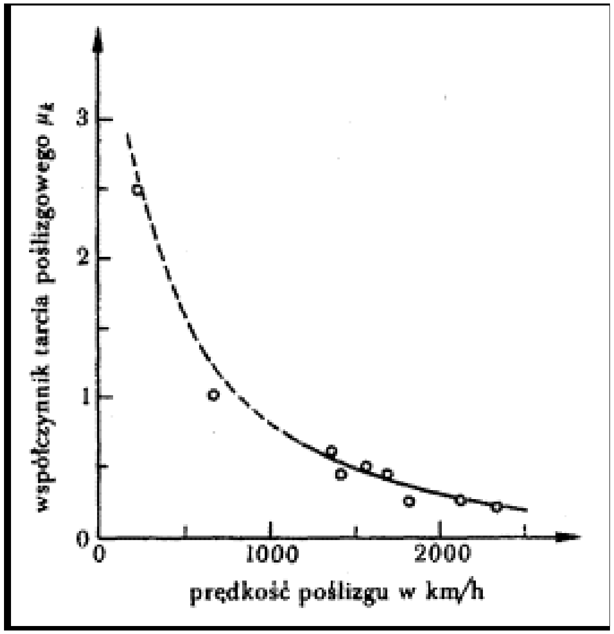
$\Rightarrow$ liczba oddziaływań na poziomie atomowym proporcjonalna do nacisku

Tarcie

Odstępstwa od praw empirycznych

Przy dużych prędkościach może się pojawić zależność μ_k od prędkości v:

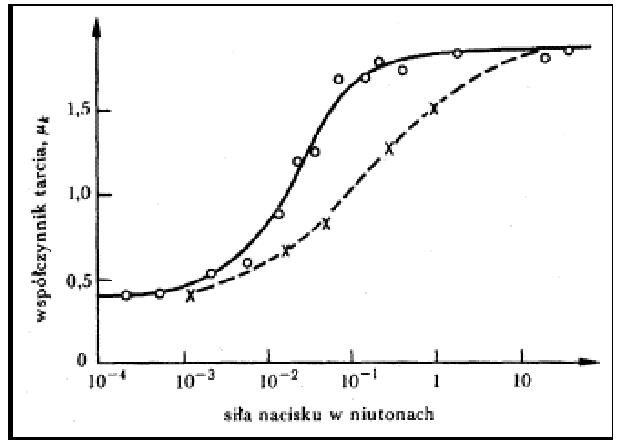
stal i miedź



Przy bardzo dużych prędkościach miedź ulega chwilowemy stopieniu...

Przy dużych siłach dociskających mogą się pojawić odstępstwa od zależnosci liniowej:

miedź i miedż



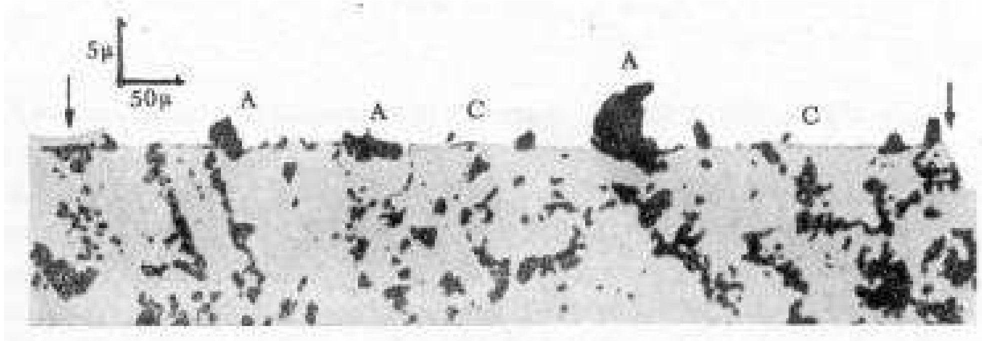
Przy dużym nasisku zniszczeniu ulega warstwa tlenków na powierzchni miedzi...

Tarcie

Ścieranie

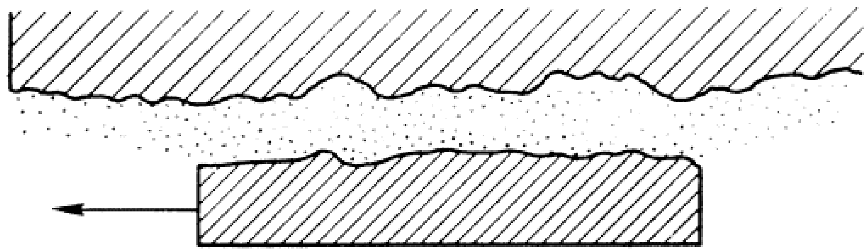
Na poziomie mikroskopowym tarcie prowadzi trwałych zmian w stykających się powierzchniach.

Fragmenty miedzi przyłączone do powierzchni stali:



Smarowanie

Tarcie zmniejszamy wprowadzając smar między poruszające się powierzchnie.

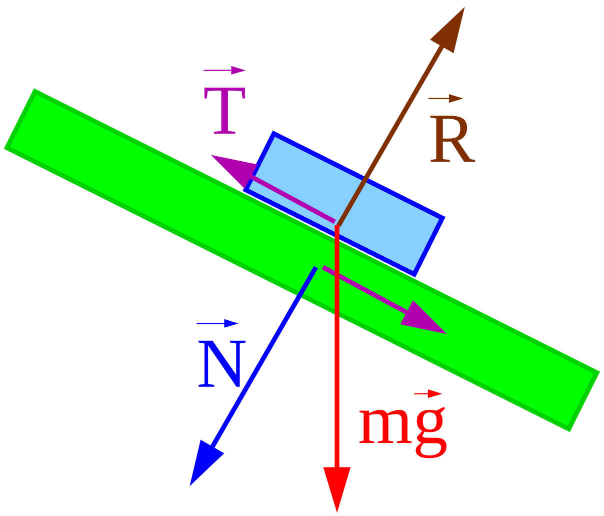


Powierzchnie nie stykają się ⇒ brak tarcia

⇒ pojawia się jednak nowa siła oporu związana z lepkością

Tarcie

Tarcie statyczne



Ciało pozostaje w równowadze dzięki działaniu tarcia statycznego

Siła działająca między dwoma powierzchniami nieruchomymi względem siebie, dociskanymi siłą N.

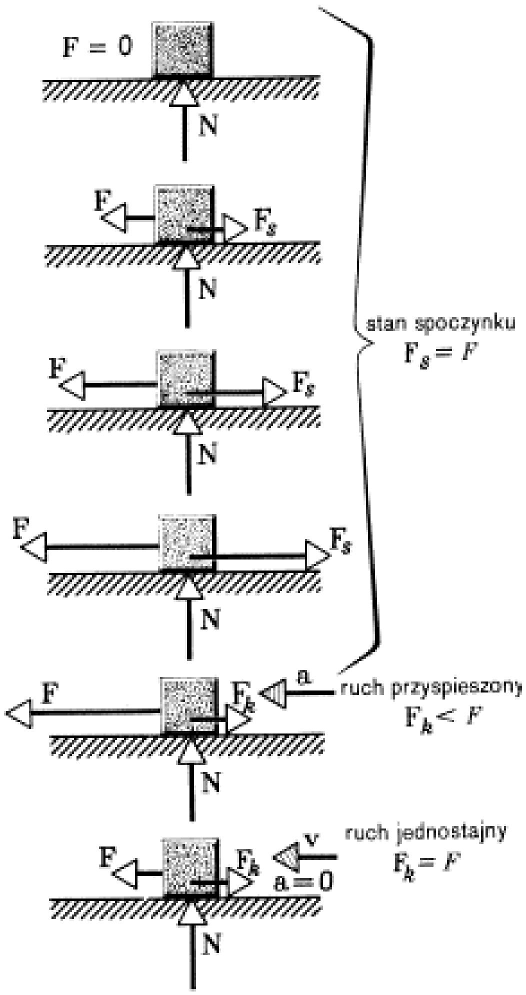
Maksymalna siła tarcia statycznego T_S^{max} jest równa najmniejszej sile F jaką należy przyłożyć do ciała, aby ruszyć je z miejsca.

Prawo empiryczne:

$$\vec{T}_S^{max} = -\mu_s \, \vec{i}_F \, N \qquad \vec{i}_F = \frac{\vec{F}}{F}$$

Tarcie

Tarcie statyczne

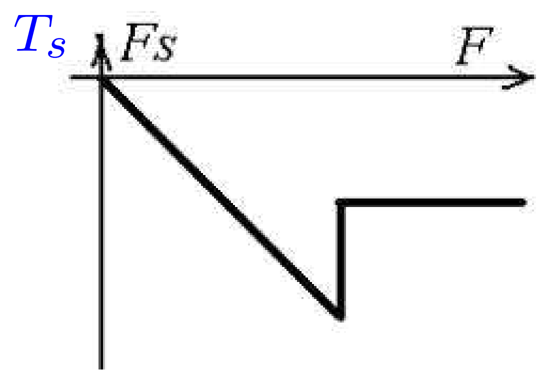


Póki przyłożona siła $\vec{F}$ jest mała, tarcie statyczne utrzymuje ciało w spoczynku:

$$\vec{T}_s \;=\; -\vec{F}$$

$\Rightarrow$ siła tarcia rośnie proporcjonalnie do przyłożonej siły.

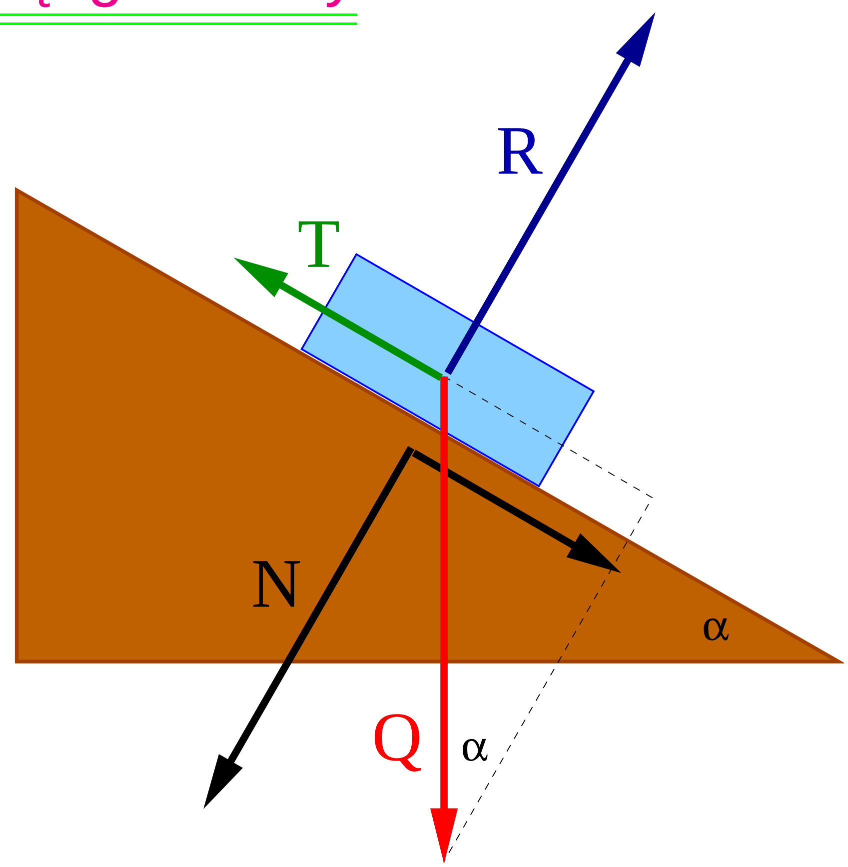
Gdy przyłożona siła przekroczy wartość $T_S^{max} = \mu_s \cdot N$ ciało zaczyna się poruszać $\Rightarrow$ tarcie kinetyczne



Tarcie kinetyczne naogół słabsze od spoczynkowego: $\mu_k < \mu_s$

Tarcie

Kąt graniczny



Jest to maksymalny kąt nachylenia równi, przy którym siła tarcia pozwala na utrzymanie go w równowadze. Z warunku równowagi:

$$T = Q \sin\alpha$$
$$N = Q \cos\alpha$$

Z definicji współczynnika tarcia statycznego:

$$T_S^{max} = \mu_S \cdot N$$

Otrzymujemy:

$$Q \sin\alpha_{gr} = \mu_S \cdot Q \cos\alpha_{gr}$$

$$\mu_S = \tan\alpha_{gr}$$

Tarcie

Współczynniki tarcia

Przykładowe współczynniki
dla wybranych materiałów:

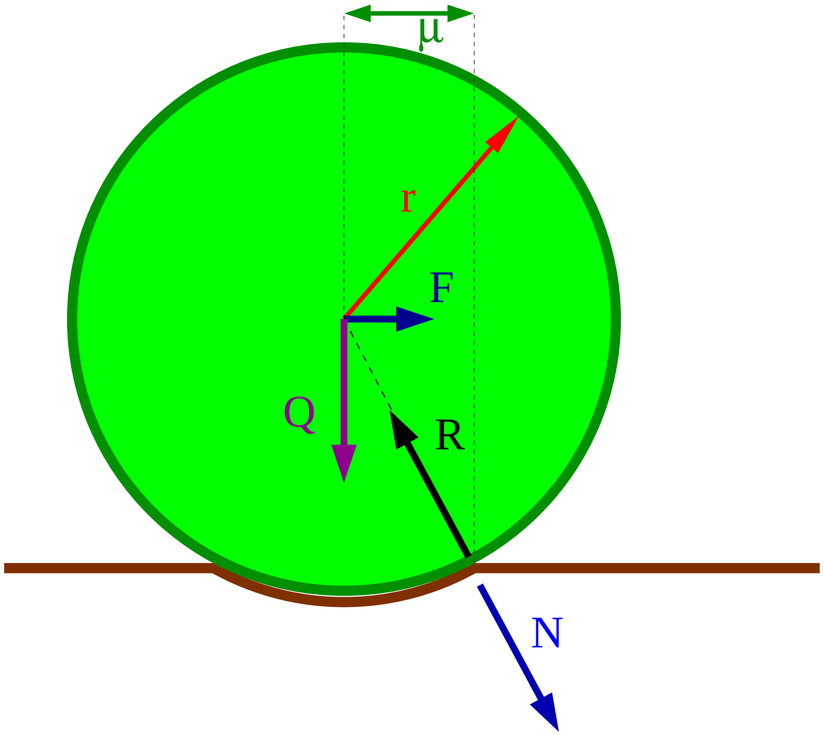
materiały	μ_s	μ_k
stal o stal	0,15	0,03 – 0,09
stal o lód	0,027	0,014
drewno o drewno	0,65	0,2 – 0,4
guma o beton suchy	1,0	0,7
guma o beton mokry	0,7	0,5

Hamowanie samochodu:
ważne aby koła nie zaczęły się ślizgać

- poślizg $\Rightarrow \mu_k$
- dobry kierowca lub ABS $\Rightarrow \mu_s$
  zysk ~40% na drodze hamowania

Tarcie

Tarcie toczne



Poza tarciem statycznym i kinetycznym (poślizgowym) mamy tarcie toczne:

$$\vec{T}_t = -\mu_t \, \vec{i}_F \, \frac{N}{r}$$

Współczynnik tarcia tocznego μ_t jest zwykle bardzo mały

Przykładowo:

- drewno + drewno $\Rightarrow$ μ_t= 0,0005 m
- stal hartowana + stal $\Rightarrow$ μ_t= 0,00001 m

(wymiar długości!)

Toczące się ciało odkształca zawsze powierzchnię po której się toczy.

Układ inercjalny

Zasada bezwładności

"Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszajż ciała do zmiany tego stanu." I.Newton

Układ odniesienia w którym spełniona jest zasada bezwładności nazywamy układem inercjalnym

Zasada bezwładności jest równoważna z postulatem itnienia układu inercjalnego

W układzie inercjalnym ruch ciała jest jednoznacznie zadany przez działające na nie siły zewnętrzne (równanie ruchu) + warunki początkowe

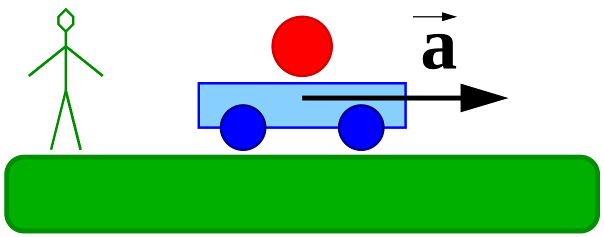
$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

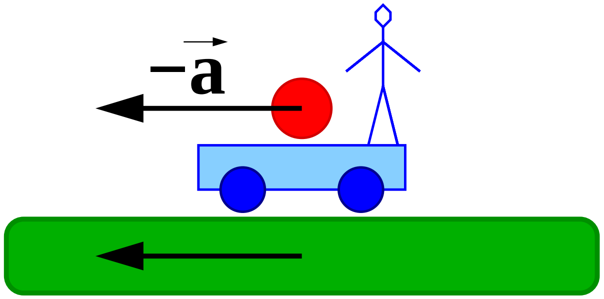
$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

Układy nieinercjalne

Opis ruchu

Wózek porusza się z przyspieszenien $\vec{a}$ względem stołu





Z punktu widzenia obserwatora związanego ze stołem kulka pozostaje w spoczynku.

Wynika to z zasady bezwładności - siły działające na kulkę równoważą się

$$\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$$

Z punktu widzenia obserwatora związanego z wózkiem kulka porusza się z przyspieszeniem $-\vec{a}$

$\Rightarrow$ prawa Newtona nie są spełnione !?

Oba układy nie mogą być inercjalne.

Prawa ruchu w układzie nieinercjalnym wymagają modyfikacji

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Przyjmijmy, że układ O' porusza się względem układu inercjalnego O.

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)

Niech $\vec{r}_\circ(t)$ opisuje położenie układu O' w O. Przyspieszenie: $\vec{a}_\circ = \frac{d^2\vec{r}_\circ}{dt^2}$

Ruch punktu materialnego mierzony w układach O i O':

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_\circ$$

Przyspieszenie punktu materialnego mierzone w układach O i O':

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_\circ$$

Prawa ruchu w układzie inercjalnym O:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

$\Rightarrow$ w układzie nieinercjalnym O':

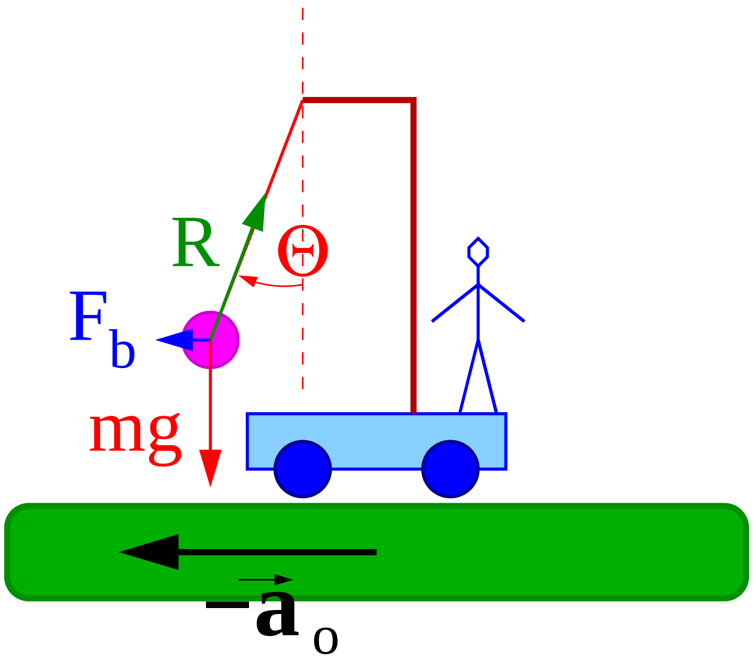
$$m\vec{a}\,' = \vec{F}(\vec{r}\,', \vec{v}\,', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_\circ$$

$\Rightarrow$ w układzie nieinercjalnym musimy wprowadzić siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_\circ$

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Wahadło w układzie nieinercjalnym poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}$ względem układu inercjalnego



Oprócz siły ciężkości $m\vec{g}$ i reakcji $\vec{R}$ musimy uwzględnić pozorną siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_\circ$

Opis ruchu można uprościć wprowadzając efektywne przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_\circ$$

siły bezwładności $\equiv$ siły grawitacji

$\Rightarrow$ odchylenie położenia równowagi:

$$\tan\theta = \frac{a_\circ}{g}$$

Przyspieszenie drgań:

$$\omega'^{\,2} = \frac{g'}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$$

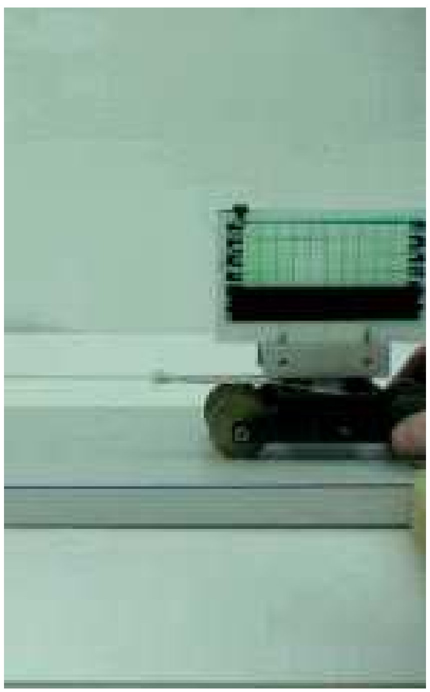
Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Jeśli $a_\circ \ll g \Rightarrow$ w układzie poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_\circ \perp \vec{g}$ obserwujemy pozorną zmianę kierunku działania siły ciężkości:

Ciecz w naczyniu:

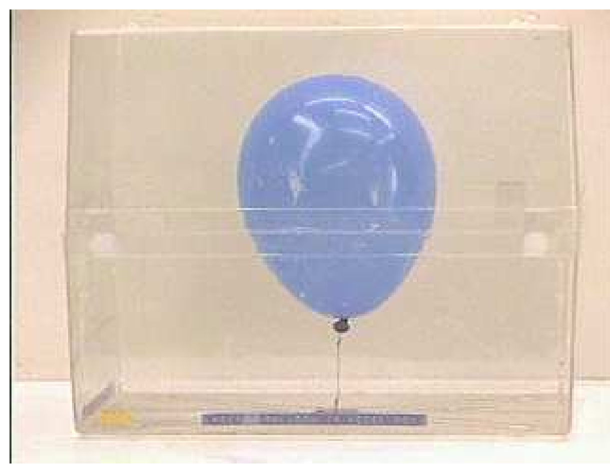
$\vec{a} = 0$



$\vec{a} \neq 0$

Balon z helem:

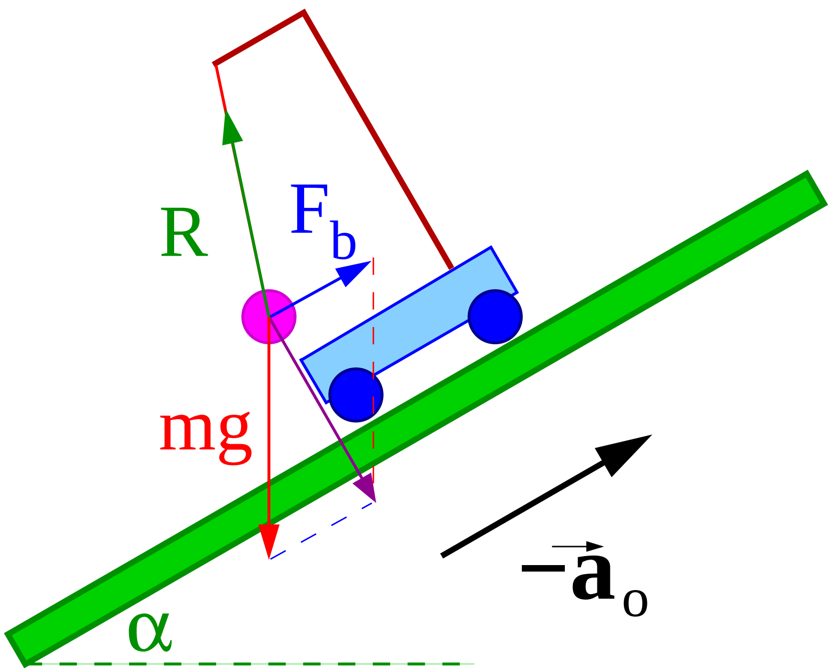
$\vec{a} = 0$



$\vec{a} \neq 0$

Układy nieinercjalne

Równia



siły działające w układzie wózka

Wózek zsuwa się bez tarcia po równi pochyłej. Zaniedbując ruch obrotowy kół przyspieszenie wózka:

$$a_\circ = g \sin\alpha$$

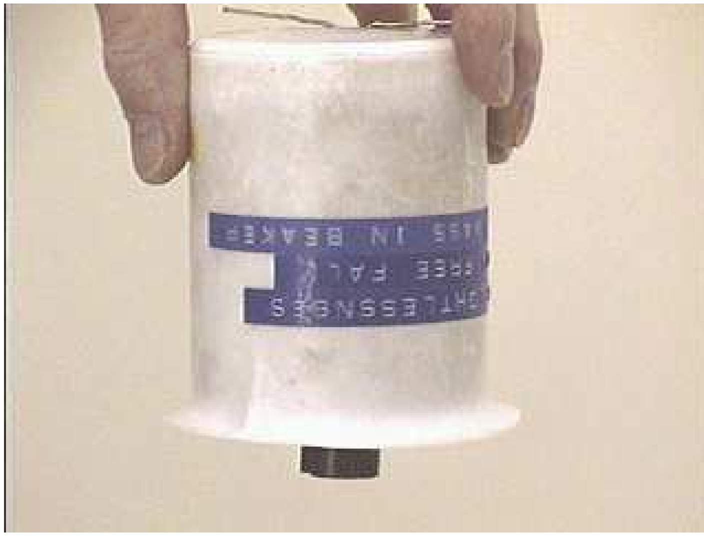
W układzie związanym z wózkiem działająca na wahadło siła bezwładności jest równa co do wartości (lecz przeciwnie skierowana) równoległej składowej ciężaru.

Na wahadło działa pozorna siła ciężkości prostopadła do powierzchni równi.

$$g' = g_\perp = g \cos\alpha < g$$

$\Rightarrow$ spowolnienie drgań

Układy nieinercjalne



Spadek swobodny

W układzie odniesienia poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_\circ || \vec{g}$ obserwujemy pozorną zmianę wartości przyspieszenie grawitacyjnego:

$$\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_\circ$$

W układzie związanym z ciałem spadającym swobodnie $\vec{a}_\circ = \vec{g}$

$$\vec{g}\,' = 0$$

$\Rightarrow$ stan nieważkości

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Dwa klocki o masach $m_1 = 2\, m_2$ zsuwają się z tej samej wysokości po równi pochyłej. Stosunek ich prędkości na końcu równi v_1/v_2 wynosi

   $\boxed{\text{A}}$ 2 $\boxed{\text{B}}$ 1/2 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 1/4

2. Na poziomie mikroskopowym proporcjonalność siły tarcia do siły nacisku wiąże się ze

   $\boxed{\text{A}}$ wzrostem rzeczywistej powierzchni styku $\boxed{\text{B}}$ odkrztałceniem sprężystym powierzchni
   $\boxed{\text{C}}$ zmniejszeniem odległości między atomami $\boxed{\text{D}}$ silniejszym elektryzowaniem ciał

3. Ciało spoczywa na równi nachylonej pod kątem α. Wartość tarcia statycznego wynosi

   $\boxed{\text{A}}$ $Q \sin\alpha$ $\boxed{\text{B}}$ $\mu_s Q \cos\alpha$ $\boxed{\text{C}}$ $\mu_s Q$ $\boxed{\text{D}}$ $\mu_s Q \sin\alpha$

4. Okres drgań wahadła w rakiecie, lecącej pionowo blisko powierzchni Ziemi z przyspieszeniem $\vec{a} \neq 0$ jest taki sam jak w nieruchomej rakiecie. Wynika z tego, że

   $\boxed{\text{A}}$ $\vec{a} = -2\,\vec{g}$ $\boxed{\text{B}}$ $\vec{a} = 2\,\vec{g}$ $\boxed{\text{C}}$ $\vec{a} = -\vec{g}$ $\boxed{\text{D}}$ $\vec{a} = \vec{g}$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego