



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Zasady zachowania

Fizyka I (Mechanika)

Wykład V:

- Zasada zachowania pędu
- Ruch ciał o zmiennej masie
- Praca, moc, energia kinetyczna
- Siły zachowawcze i energia potencjalna
- Zasada zachowania energii

II zasada dynamiki

Przypomnienie

Druga zasada dynamiki Newtona w postaci “klasycznej”

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Zależność słuszna dla ciał których masa jest stała, $m = \text{const}$

Możemy to wykorzystać i przekształcić zależność do postaci:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \stackrel{m=\text{const}}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie $\vec{p} = m\vec{v}$ - pęd cząstki

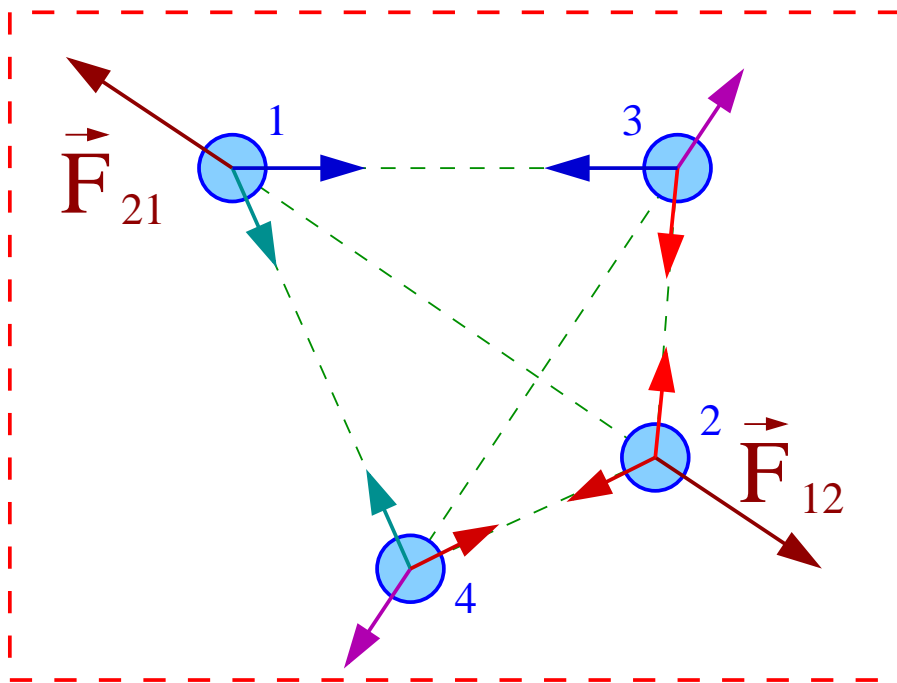
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F} dt = I \text{ - popęd siły}$$

Zasada zachowania pędu

Układ izolowany

Każde ciało może w dowolny sposób oddziaływać z innymi elementami układu.



Brak oddziaływań ze światem zewnętrznym

III zasada dynamiki

Siły z którymi działają na siebie ciała i i j :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających na ciało i :

$$\vec{F}_i^\Sigma = \sum_j \vec{F}_{ji}$$

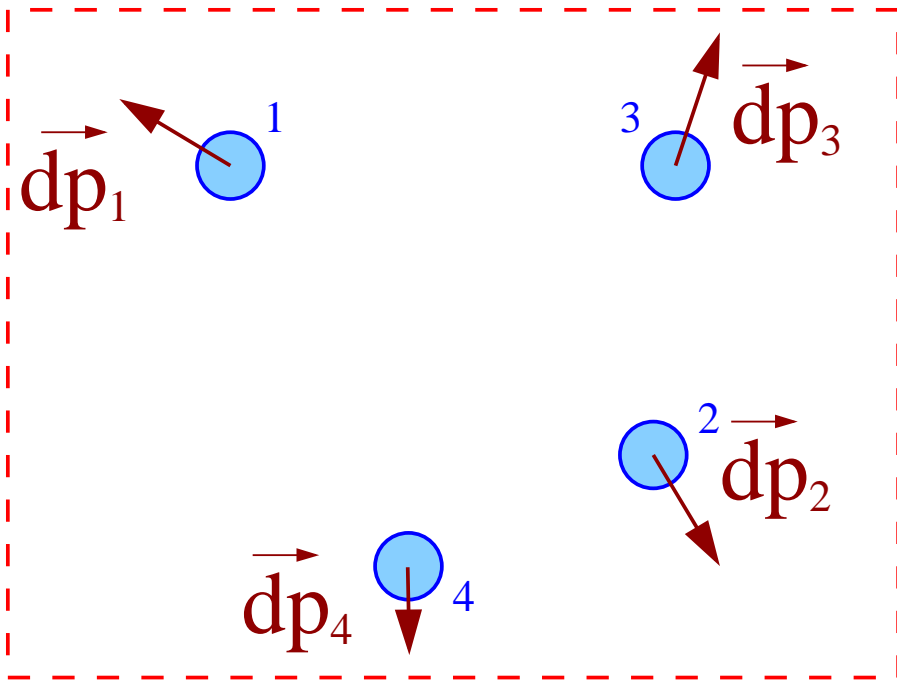
Suma sił działających na układ:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i -\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{tot} \\ &\Rightarrow \vec{F}_{tot} = 0\end{aligned}$$

Zasada zachowania pędu

II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^\Sigma$$



izolowany układ inercjalny

Pęd układu

Prawo ruchu układu:

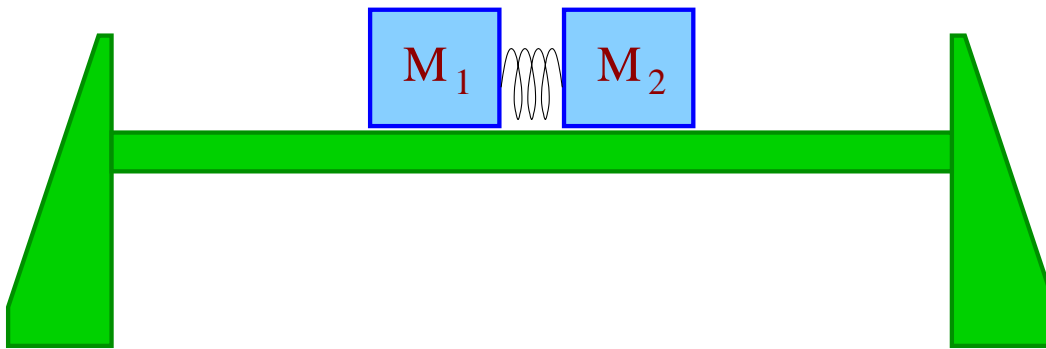
$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

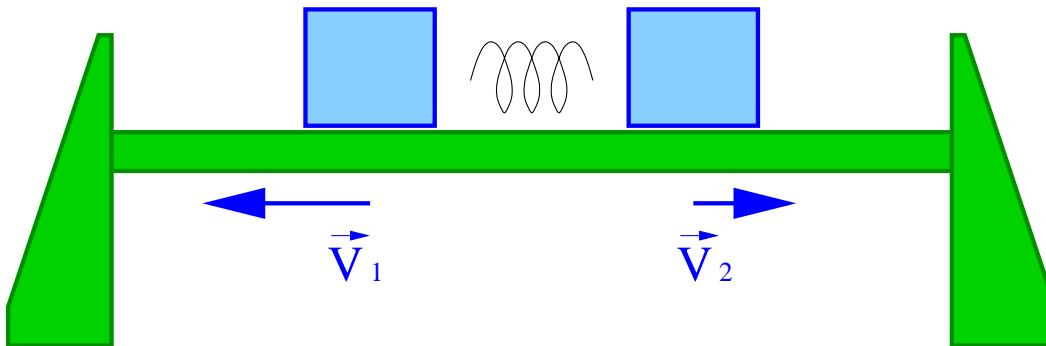
Dla dowolnego układu **izolowanego**, **suma pędów** wszystkich elementów układu pozostaje **stała**.

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



$$M_1 < M_2$$



Układ “rozpada się” pod wpływem **sił wewnętrznych**.

Jeśli na początku wszystkie obiekty spoczywają

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

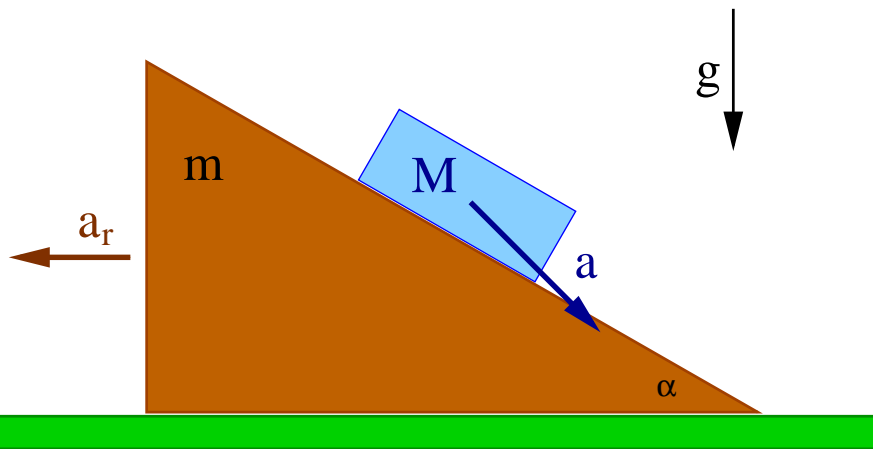
to i po “rozpadzie” **suma pędów** musi być **równa 0**.

Dwa ciała: $(v_i \ll c)$

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{v}_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{v}_1 \\ \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} &= \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



Równia rusza się bez tarcia po poziomym stole.
Na równi kładziemy klocek, który może zsuwać się bez tarcia.

Jak znaleźć przyspieszenia, z którymi będzie poruszał się klocek i równia?

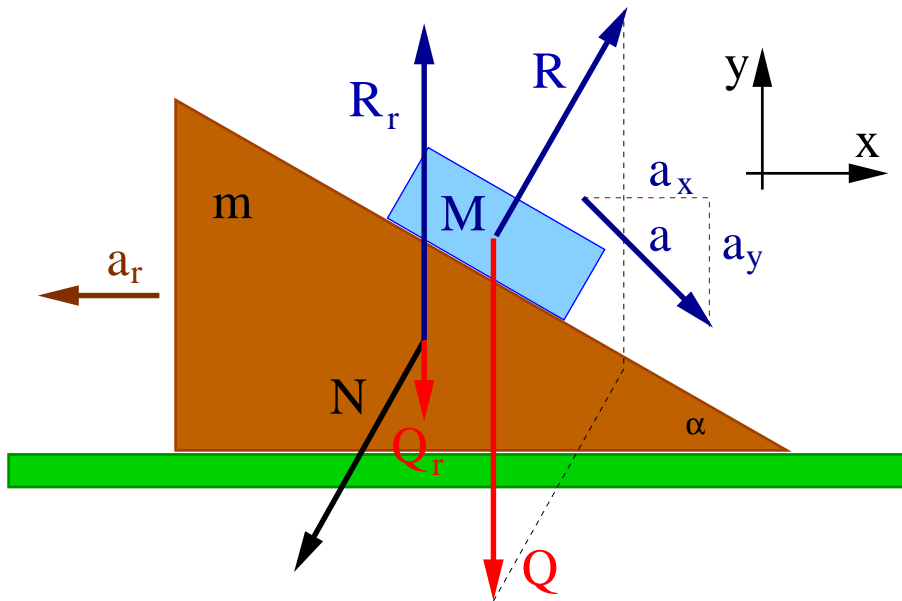
Jeśli masa klocka nie jest zaniedbywalna w porównaniu z masą równi to równia będzie “uciekać” spod zsuwającego się klocka. **Wynika to z zasady zachowania pędu!**

Siły zewnętrzne (siła ciężkości i reakcji stołu) mają kierunek pionowy
 \Rightarrow mogą zmieniać tylko składową pionową pędu układu równia-klocek.

Składowa pozioma pędu musi być zachowana!

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



Na układ działają siły zewnętrzne:

- siły ciężkości Q i Q_r
- oraz siła reakcji stołu R_r

Siła wypadkowa działa wzdłuż kierunku pionu (prostopadle do powierzchni stołu).

Składowa pozioma pędu układu równia-klocek musi być zachowana.

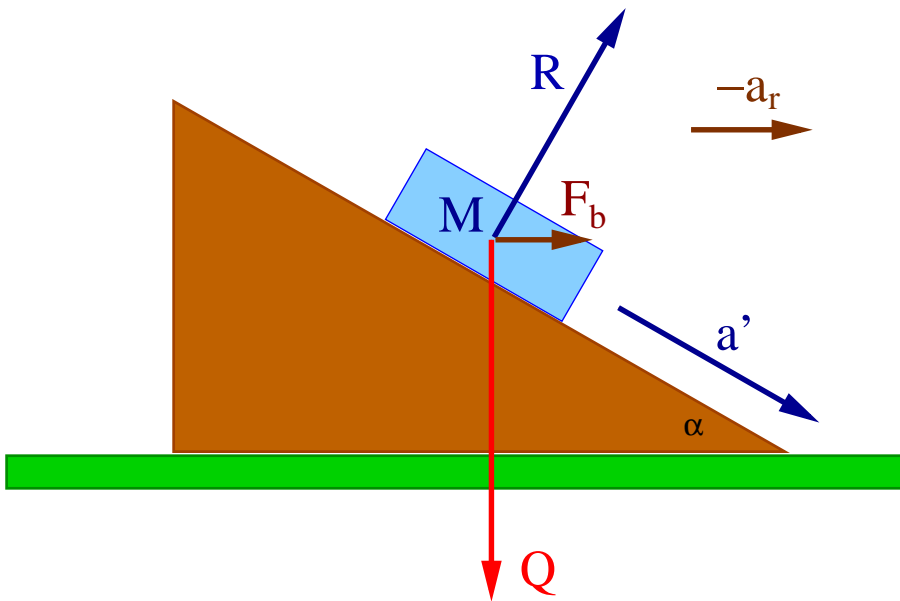
Uwzględniając, że prędkość i przyspieszenie równi są skierowane przeciwnie do osi X :

$$-mV_r + MV_x = const \quad \Leftrightarrow \quad ma_r = Ma_x$$

Kierunek przyspieszenia klocka nie jest równoległy do powierzchni równi!

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



Zagadnienie daje się łatwiej rozwiązać, gdy przejdziemy do układu **nieinercyjnego** związanego z **równią**. W układzie tym na klocek działa dodatkowo siła bezwładności

$$\vec{F}_b = -\vec{a}_r M$$

Przyspieszenie klocka (**wzdłuż równi!**):

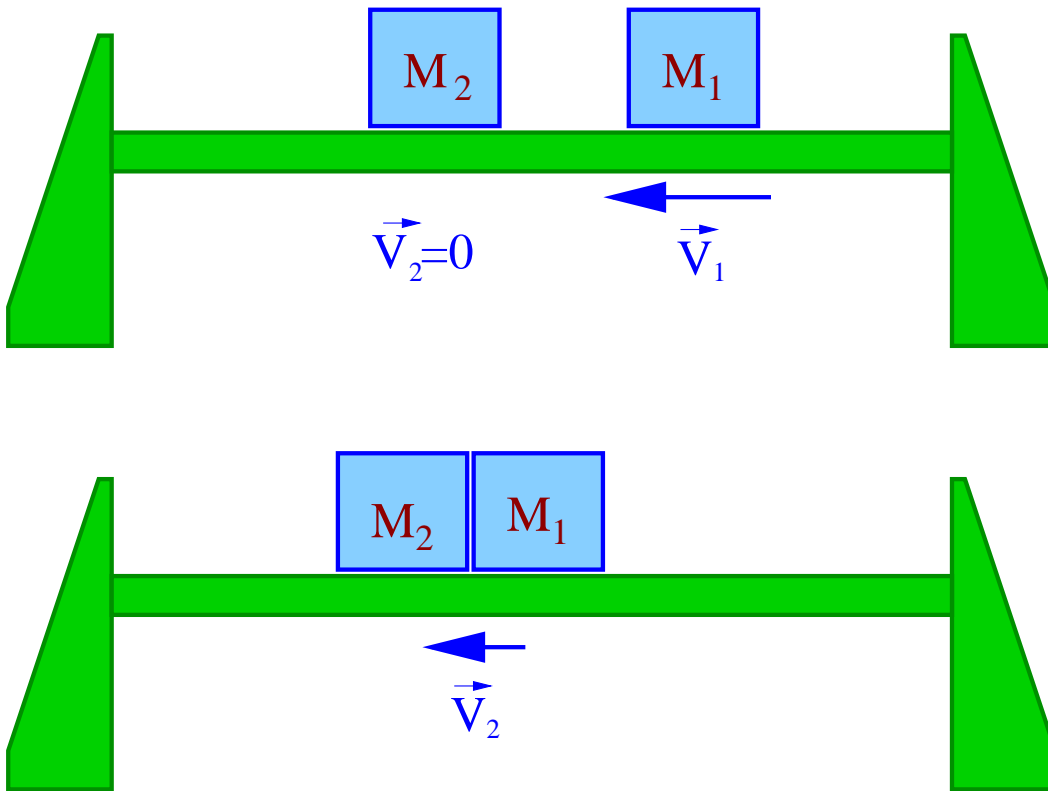
$$a' = g \sin \alpha + a_r \cos \alpha$$

Możemy teraz wyznaczyć składową X tego przyspieszenia **w układzie stołu**, i porównać z wartością oczekiwaną z zasady zachowania pędu:

$$\begin{cases} a_x = a' \cos \alpha - a_r = g \sin \alpha \cos \alpha - a_r \sin^2 \alpha \\ M a_x = m a_r \end{cases} \Rightarrow a_r = g \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{m + M \sin^2 \alpha}$$

Zasada zachowania pędu

Zderzenia nieelastyczne



Zderzeniem **całkowicie niesprężystym** (całkowicie nieelastycznym) nazywamy zderzenie, w wyniku którego ciała pozostają trwale złączone (lub nie poruszają się względem siebie)

Gdy jedno z ciał spoczywa

Pęd początkowy: $\vec{p}_i = m_1 \vec{v}_1$

Pęd końcowy: $\vec{p}_f = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_2$

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$
$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1$$

Ruch ciała o zmiennej masie

II zasada dynamiki w postaci

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

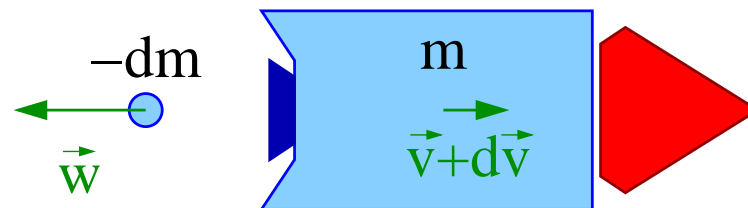
może być w szczególności wykorzystana do opisu ruchu ciała o zmiennej masie.

W ogólnym przypadku: $m = m(\vec{r}, \vec{v}, t)$

Rakieta

Silnik raketowy napędza raketę na zasadzie odrzutu. Jej masa maleje.

Rozważmy pracę silnika rakiety z punktu widzenia zasady zachowania pędu.

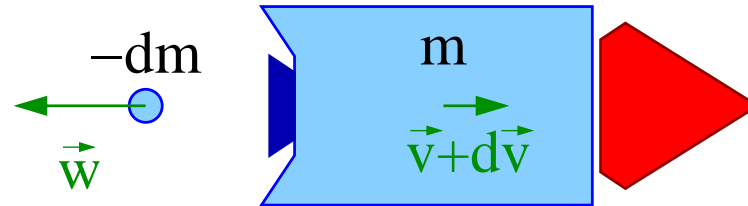


W przedziale czasu dt masa rakiety maleje z m do $m + dm$ ($dm < 0$ bo masa maleje)

Od ciała o masie $m - dm$ poruszającego się z prędkością \vec{v} odłącza się element $-dm > 0$ poruszający się z prędkością \vec{w}

Ruch ciał o zmiennej masie

W wyniku odrzuty rakietą zmienia swoją prędkość o $d\vec{v}$



Z zasady zachowania pędu:

$$\begin{aligned}(m - dm) \vec{v} &= m (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \vec{w} \\ \Rightarrow d\vec{p} = m d\vec{v} &= (m - dm) \vec{v} - m \vec{v} + dm \vec{w} \\ &= dm (\vec{w} - \vec{v}) \equiv dm \vec{v}_{odrz}\end{aligned}$$

Siła odrzutu (siła ciągu rakiety):

$$\vec{F}_{odrz} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \quad \frac{dm}{dt} < 0$$

Ruch ciała o zmiennej masie

Równanie ruchu

Ruch ciała pod wpływem siły odrzutu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zewn} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz}$$

Zaniedbując wpływ sił zewnętrznych
(np. pola grawitacyjnego):

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} &= \vec{v}_{odrz} \end{aligned}$$

Całkując stronami:

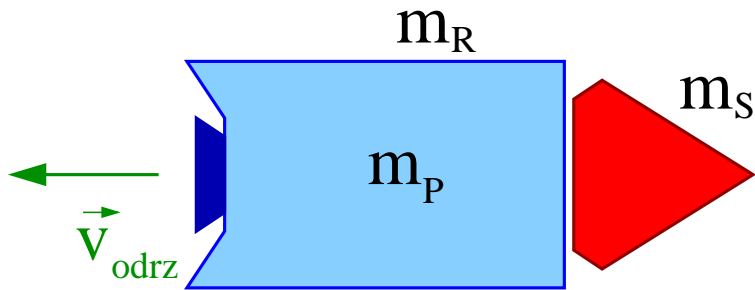
$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_k} \frac{d\vec{v}}{\vec{v}_{odrz}} &= \int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m} \\ \Rightarrow \vec{v}_k &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{odrz} \cdot \ln \left(\frac{m_k}{m_0} \right) \end{aligned}$$

wzór Ciotkowskiego

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta jednostopniowa

Rakieta o masie m_R ma wynieść satelitę o masie m_S , zużywając paliwo o masie m_P :



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11 \text{ km/s}$ (np. lot na Księżyc) przy silniku raketowym o $v_o = 3 \text{ km/s}$

Możliwa do uzyskania prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \ln \left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R} \right) \\ \approx v_{odrz} \cdot \ln(1 + f)$$

gdzie: $f = \frac{m_P}{m_R} \quad m_S \ll m_R$

stosunek masy paliwa do masy rakiety

$$f = \exp \left(\frac{v_k}{v_o} \right) - 1 \approx 38$$

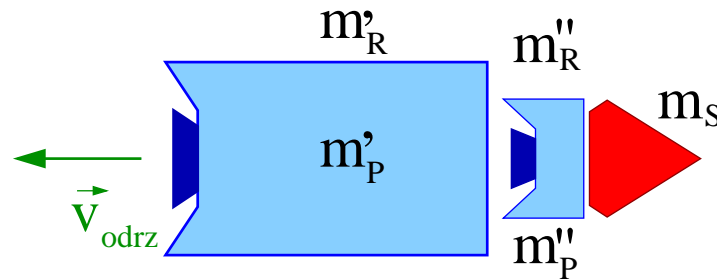
Teoretycznie możliwe,
praktycznie niewykonalne (?)...
i nieopłacalne !...

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta dwustopniowa

Raketę dzielimy na dwa człony o masach m'_R i m''_R ,
w których znajduje się paliwo o masie m'_P i m''_P :

$$\begin{aligned} m'_R + m''_R &= m_R \\ m'_P + m''_P &= m_P \end{aligned}$$



Prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \left[\ln \left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R + m''_P} \right) + \ln \left(\frac{m_S + m''_R + m''_P}{m_S + m''_R} \right) \right]$$

W przybliżeniu $m_S \ll m''_R \ll m'_R$: $v_k \approx v_{odrz} \cdot 2 \ln(1 + f)$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11 \text{ km/s}$ przy $v_o = 3 \text{ km/s}$:

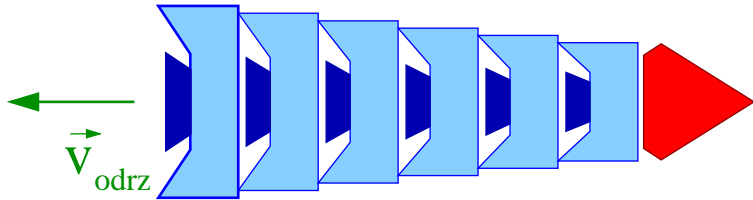
$$f = \exp \left(\frac{v_k}{2 v_o} \right) - 1 \approx 5.3$$

Dla $f \approx 10$ (dla obu członów) można wystrzelić w kosmos $m_S \approx 0.6\% (m_R + m_P)$
przy optymalnym wyborze $m''_R \approx 7\% m_R$

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta wielostopniowa

Rakieta składa się z wielu członów.
W każdym z nich stosunek masy paliwa do “obudowy” wynosi f



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną dla $m_S \approx 100 \text{ kg}$ przy rakiemie o $f = 10$:

$$m_R = \frac{m_S}{1+f} \left[\exp \left(\frac{v_k (1+f)}{v_o f} \right) - 1 \right]$$

W granicy wielu bardzo małych członów:

$$m d\vec{v} = dm \vec{v}_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1}$$

$$m_R \approx 500 \text{ kg}$$

$$m_P \approx 5000 \text{ kg}$$

Co sprowadza się do:

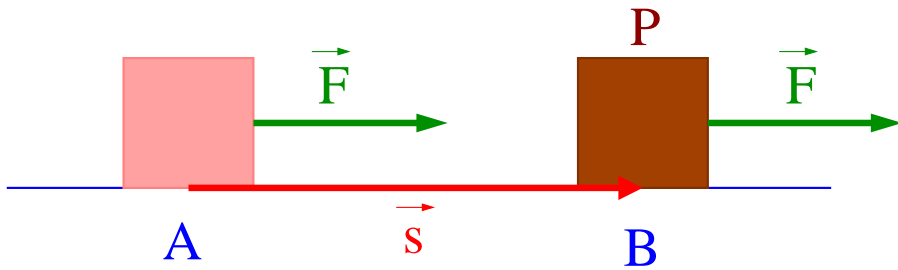
Przy rakiemie jednoczłonowej, przy tych samych m_S i m_R potrzebaby 228'000 kg paliwa !!!

$$v_k = v_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1} \cdot \ln \left(1 + \frac{m_R}{m_S} (1+f) \right)$$

Dla rakiety dwuczłonowej:
 $m_R \approx 1600 \text{ kg}$, $m_P \approx 16'000 \text{ kg}$

Praca i energia

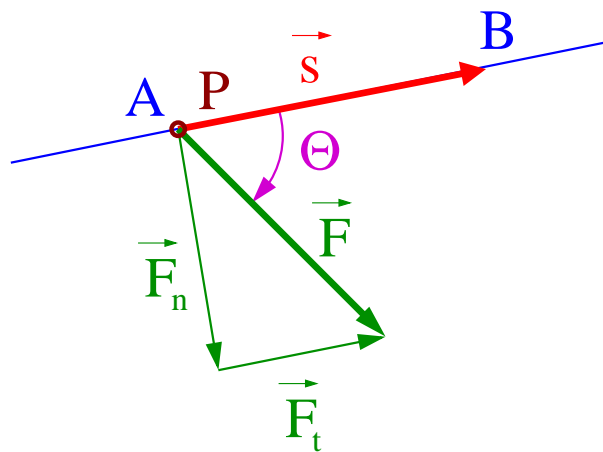
Praca



Najprostszy przypadek:

Stała siła \vec{F} działa na ciało P powodując jego przesunięcie wzdłuż kierunku działania siły o \vec{s} . Praca jaką wykona przy tym siła \vec{F}

$$W_{AB} = F \cdot s$$



W przypadku siły działającej pod kątem w stosunku do przesunięcia praca jaką wykonuje

$$W_{AB} = F \cdot s \cdot \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Składowa prostopadła nie wykonują pracy!

Liczy się tylko równoległa składowa siły...

Praca i energia

Praca

Dowolna siła \vec{F} działa na punkt materialny P

Praca jaką wykonuje siła przy przesunięciu o $d\vec{r}$

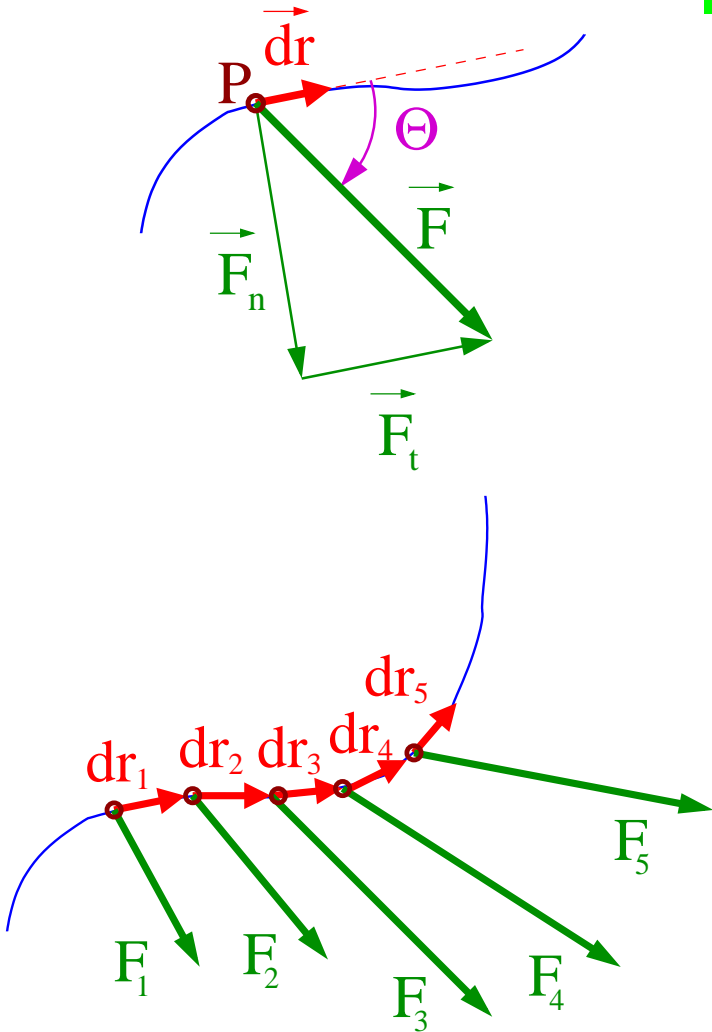
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \theta ds = F_t ds$$

Aby policzyć pracę siły \vec{F} dla dowolnej drogi, musimy posumować wkłady od kolejnych małych przesunięć \Rightarrow całkowanie.

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

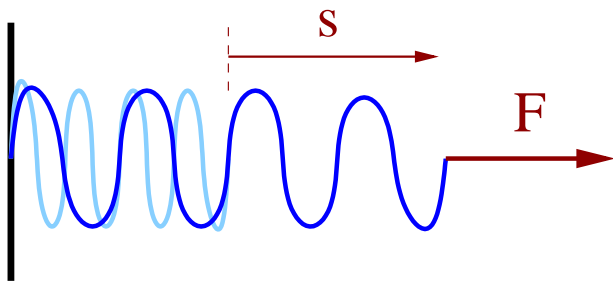
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy!
siła Lorenza, siła Coriolisa, siły reakcji więzów...



Praca i energia

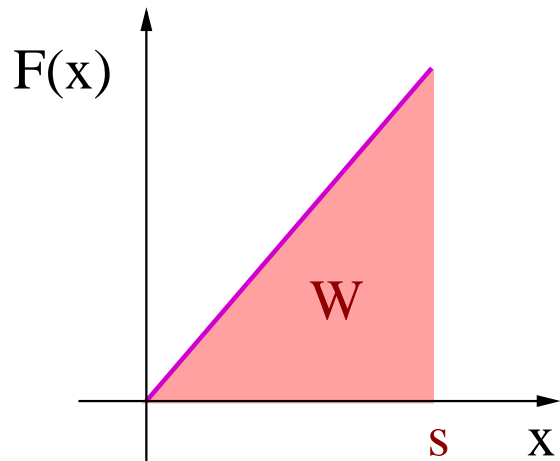
Praca



Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy przeciwko sile sprężystości:

$$F(x) = kx$$



Wykonana praca:

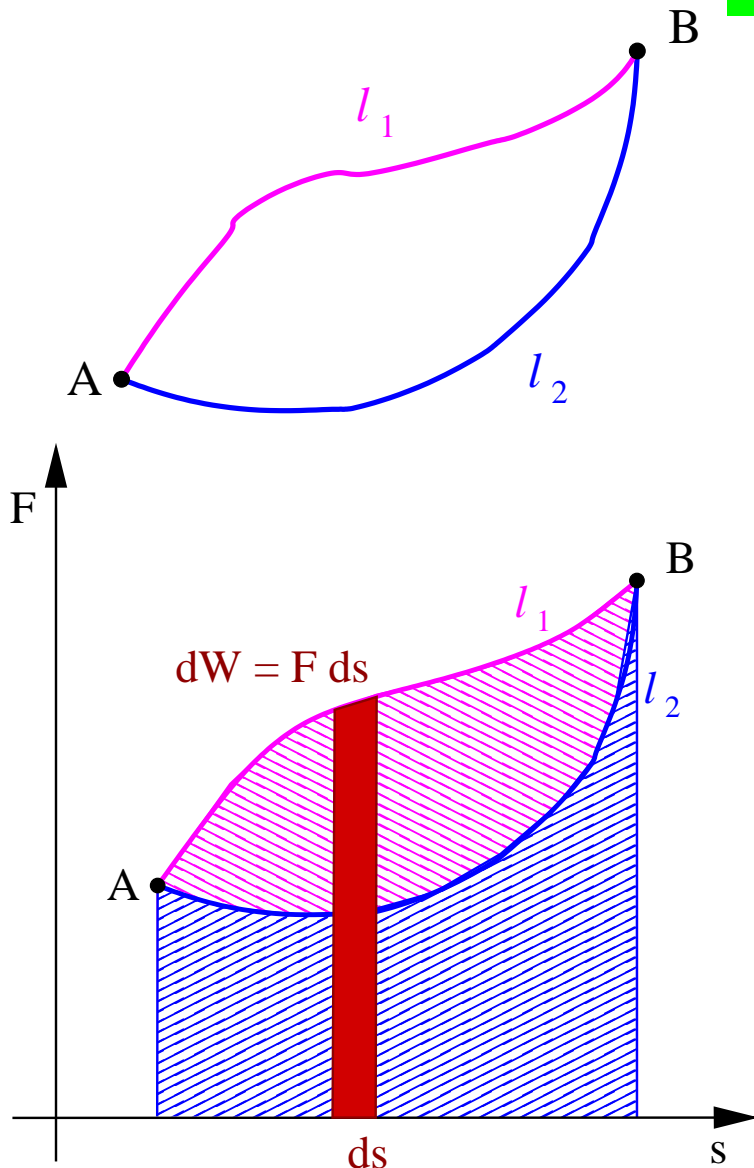
$$\begin{aligned} W &= \int_0^s F(x) \cdot dx \\ &= \int_0^s kx \cdot dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_0^s = \frac{1}{2} ks^2 \end{aligned}$$

Praca i energia

Praca

W ogólnym przypadku praca W_{AB} jaką wykonujemy podczas ruchu punktu z **A** do **B** może zależeć od:

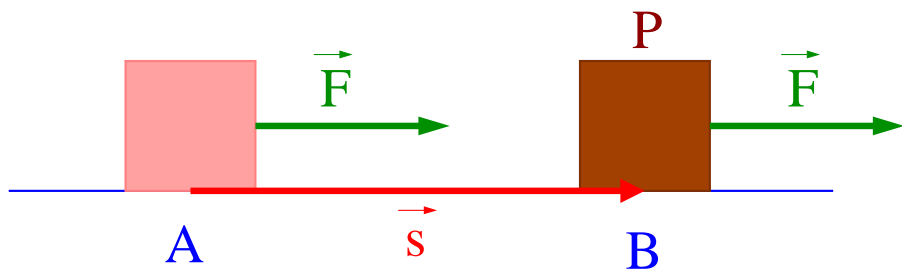
- przebytej drogi l
np. praca sił tarcia będzie proporcjonalna do l
- toru ruchu
np. jeśli siły oporu zależą od wyboru toru
- prędkości
siły oporu w ośrodku zależą od prędkości
- czasu
jeśli działające siły zależą od czasu



Praca i energia

Energia kinetyczna

Przyjmijmy, że siła \vec{F} jest siłą wypadkową działającą na ciało **P**. Zmiana prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym:



$$\begin{aligned}v_B - v_A &= \frac{F}{m} \cdot \Delta t \\ &= \frac{F}{m} \cdot \frac{s}{\langle v \rangle} = \frac{F}{m} \cdot \frac{2s}{v_A + v_B}\end{aligned}$$

Gdzie skorzystaliśmy z wyrażenia na prędkość średnią: $\langle v \rangle = \frac{v_A + v_B}{2}$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}v_B^2 - v_A^2 &= (v_B - v_A)(v_B + v_A) = \frac{2}{m} \cdot F \cdot s = \frac{2}{m} \cdot W_{AB} \\ \Rightarrow W_{AB} &= \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k\end{aligned}$$

Pracę możemy wyrazić poprzez zmianę energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Praca i energia

Energia kinetyczna

Praca jaką wykonuje siła \vec{F} przy przesunięciu P o ds

$$\begin{aligned} dW &= F_t ds = m a_t ds = m \frac{dv}{dt} ds \\ \frac{dv}{dt} ds &= dv \frac{ds}{dt} \Rightarrow &= m \frac{ds}{dt} dv = m v dv \end{aligned}$$

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B F_t(s) \cdot ds = \int_A^B m v dv = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

Niezależnie od postaci siły \vec{F} i drogi

na ciało nie działają inne siły, układ inercjalny

praca siły jest równa zmianie energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Praca i energia

Moc

Moc średnia opisuje średnią pracę wykonywaną na jednostkę czasu:

$$P^{(\text{śr})} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Moc chwilowa

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Wstawiając $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Moc siły jest proporcjonalna do prędkości ciała!

Jednostką pracy jest **Dżul**:

$$1J = 1N \cdot 1m = 1 \frac{kg \ m^2}{s^2}$$

Jednostką mocy jest **Wat**:

$$1W = \frac{1J}{1s} = 1 \frac{kg \ m^2}{s^3}$$

Kiedyś używano jako jednostki mocy **konia mechanicznego**:

$$1 \ KM = 735.498 \ W$$

Praca i energia

Energia potencjalna

Ruch w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym \vec{g} .

Siła ciężkości działająca na masę m : $\vec{F} = m \vec{g} = m (0, -g, 0)$

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -m \vec{g} (\vec{r}_A - \vec{r}_B) = m g (y_A - y_B)$$

Możemy wprowadzić **energię potencjalną** dla jednorodnego pola grawitacyjnego

$$E_p(\vec{r}) = -m \vec{g} \vec{r} = m g y$$

Pracę możemy wtedy wyrazić przez zmianę **energii potencjalnej**

$$W_{AB} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Mówimy, że siła ciężkości jest **siłą zachowawczą**.

Praca i energia

Energia potencjalna

Siła $\vec{F}(\vec{r})$ jest **zachowawcza** (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od **położenia** punktów początkowego (A) i końcowego (B)

⇒ można ją wyrazić przez zmianę **energii potencjalnej**

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Jeśli droga jest zamknięta to praca jest równa zero

$$\int_A^A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

cyrkulacja (krążenie) \vec{F}

Siłami zachowawczymi są też wszystkie siły centralne, zależne tylko od odległości
 $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$ siła kulombowska, siła grawitacyjna, siły sprężystości...

Praca i energia

Siła a energia potencjalna

Praca wykonana przy infintezymalnym przesunięciu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

zmiana energii potencjalnej \Rightarrow $= -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$

Otrzymujemy:

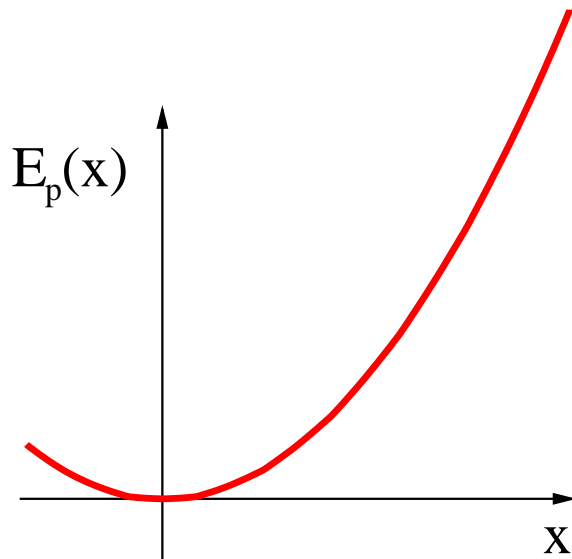
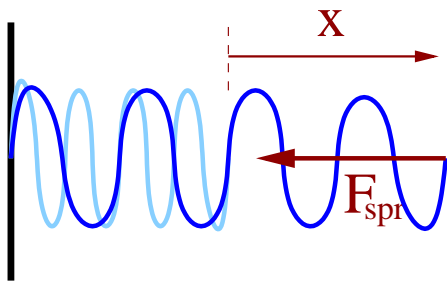
$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$$

Znajomość potencjału siły zachowawczej jest równoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany.

Praca i energia

Siła a energia potencjalna



Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy.

$$W = \int_0^s F(x) \cdot dx = \frac{1}{2}ks^2$$

Koszt tej pracy rośnie energia potencjalna:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

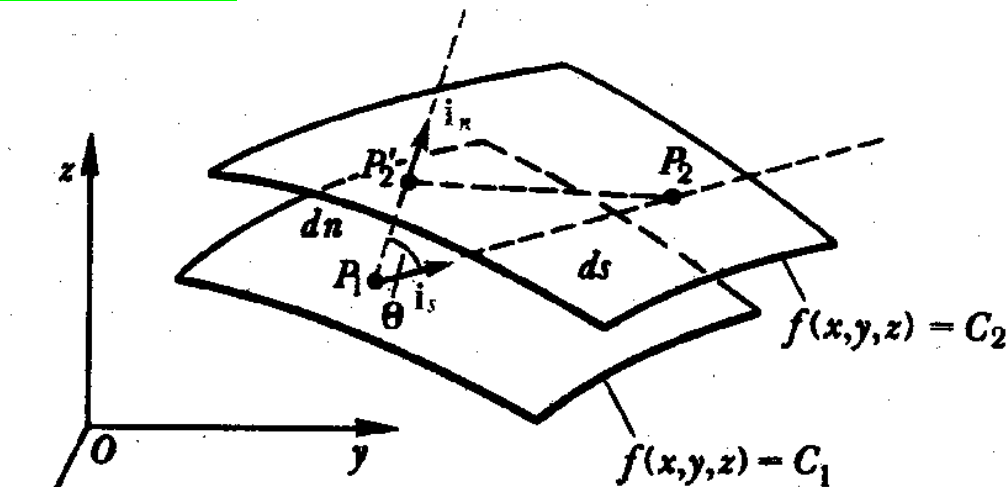
Siła sprężystości:

$$F_x^{spr}(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -kx$$

W momencie puszczenia sprężyny energia potencjalna zamienia się na kinetyczną...

Praca i energia

Gradient



Gradient wskazuje **kierunek** w którym następuje **największa zmiana** wartości funkcji skalarnej $f(x, y, z)$.

Wartość gradientu odpowiada **wartości pochodnej** funkcji $f(x, y, z)$ wzdłuż tego kierunku.

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \vec{i}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\text{"nabla"} \Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}_n \frac{\partial f}{\partial n} \quad \vec{n} - \text{wektor normalny do } f = \text{const}$$

Siłę zachowawczą wyrażamy jako gradient energii potencjalnej: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$ pomiędzy A i B wyraża się przez energię potencjalną

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B$$

Z drugiej strony, praca siły działającej na ciało zmienia energię kinetyczną:

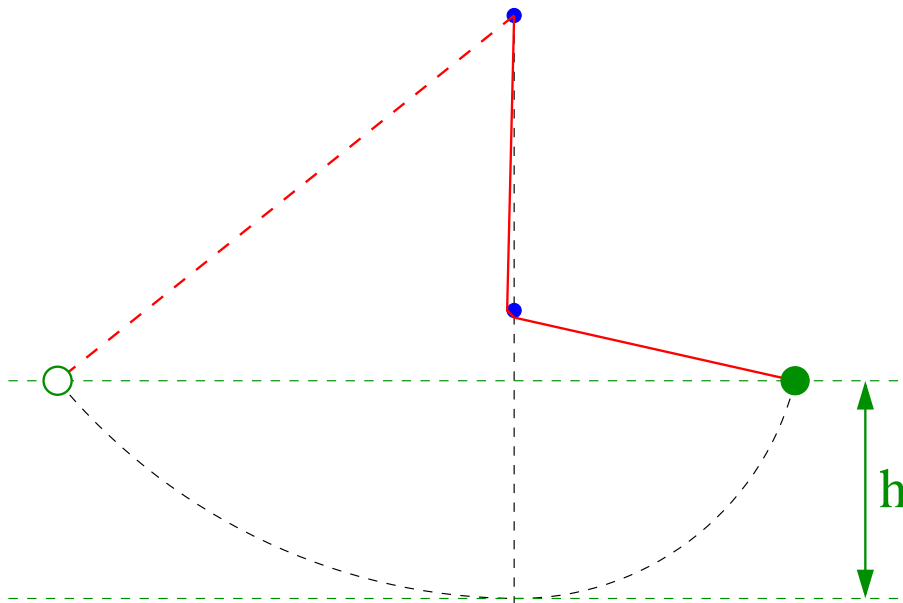
$$\begin{aligned} W_{AB} &= E_k^B - E_k^A \\ \Rightarrow E_k^B - E_k^A &= E_p^A - E_p^B \\ \Rightarrow E_k^B + E_p^B &= E_k^A + E_p^A \\ \Rightarrow E &= E_p + E_k = \text{const} \end{aligned}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

Zasada zachowania energii

Wahadło Galileusza

Wysokość na jaką wznosi się wahadło nie zmienia się przy zmianie długości nici:

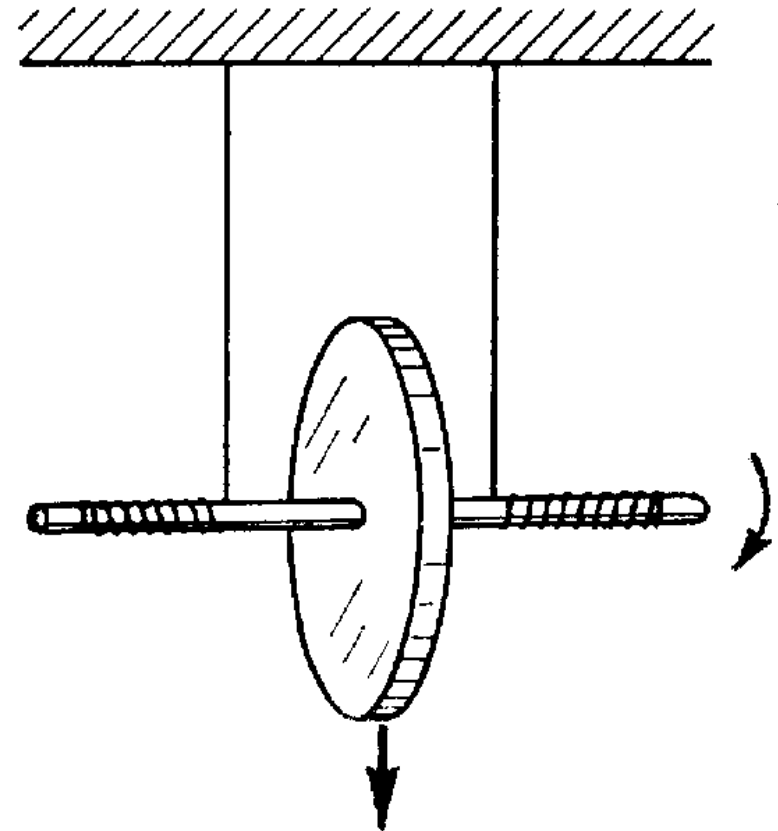


$$E_p + E_k = E = \text{const}$$

$$E_k = 0 \Rightarrow m g h = E$$

siły reakcji więzów nie wykonują pracy

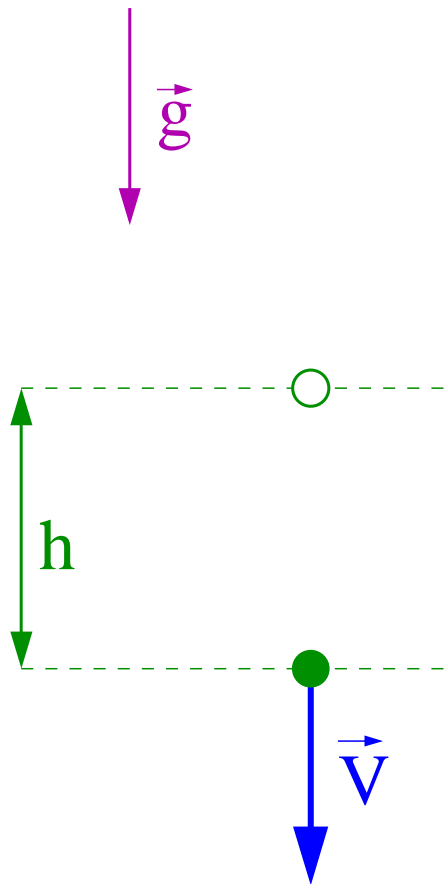
Koło Maxwella



Przemiana energii potencjalnej w energię kinetyczną ruchu obrotowego.

Zasada zachowania energii

Spadek swobodny



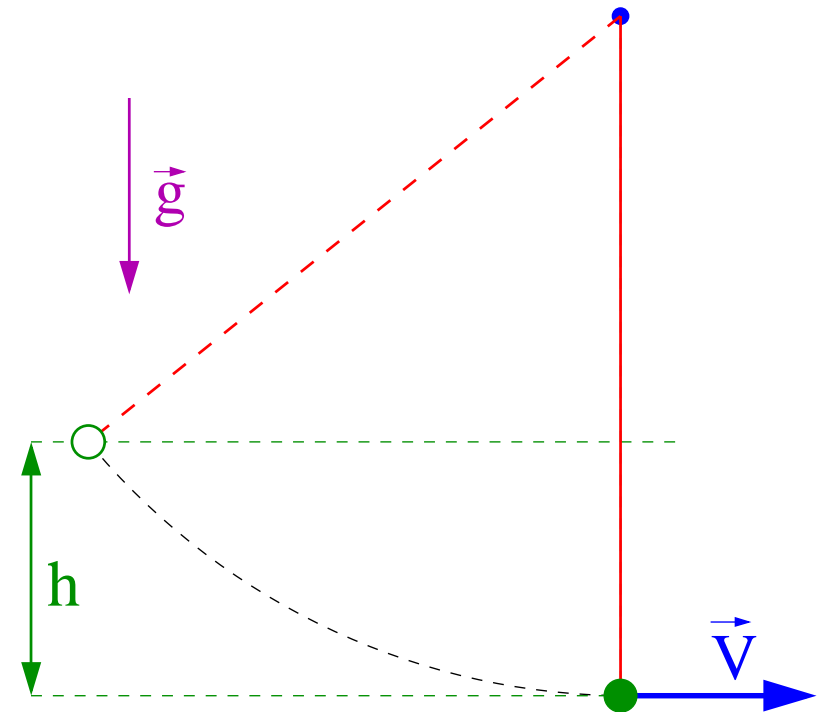
W jednorodnym polu \vec{g} ciało spada swobodnie z wysokości h ($\vec{v}(0) = 0$).

Prędkość końcowa z zasady zachowania energii:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\frac{m v^2}{2} = m g h$$

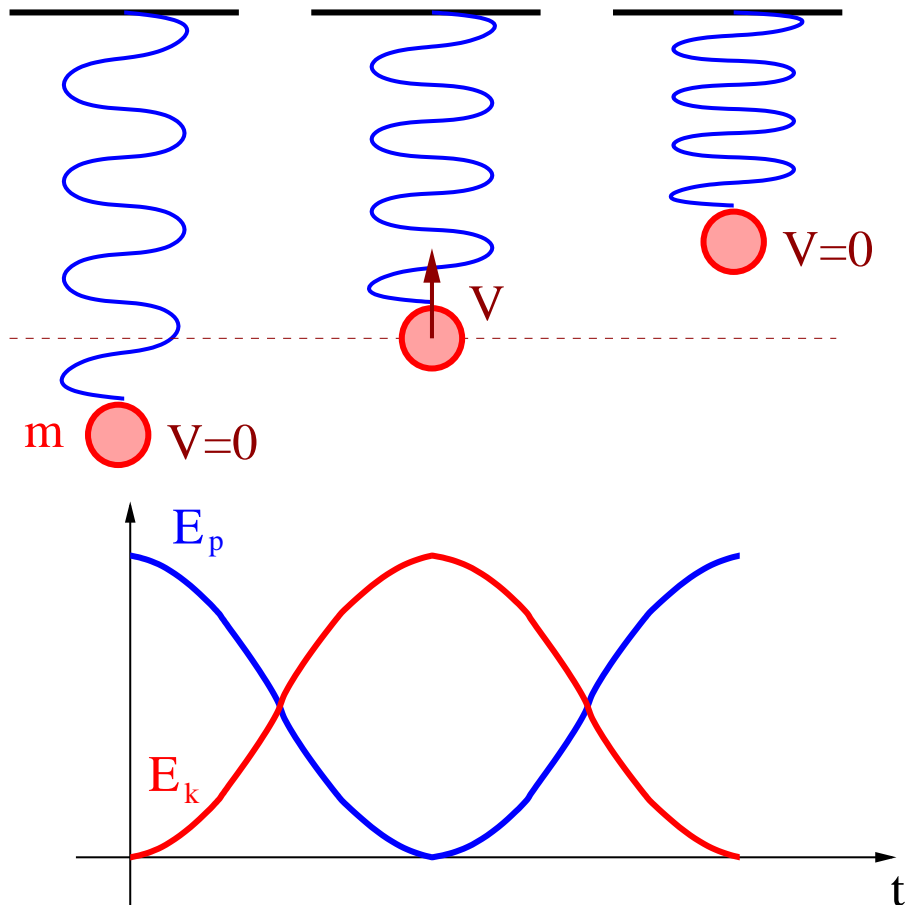
$$v = \sqrt{2 g h}$$



Taką samą prędkość uzyska wahadło puszczony z wysokości h

Zasada zachowania energii

Siły sprężystości



Ruchu pod wpływem sił sprężystości:

$$E = E_p(x) + E_k(x) = \text{const}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

Ruch harmoniczny $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow E_p(x) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$v = \omega A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow E_k(x) = \frac{1}{2}m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$$

Zasada zachowania energii

Równania ruchu

Znajomość energii potencjalnej jest równoważna znajomości siły (zachowawczej):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Czy znając $E_p(\vec{r})$ możemy rozwiązać równania ruchu ciała ?

- Możemy wyznaczyć zależność $\vec{F}(\vec{r})$ i skorzystać z II zasady dynamiki...

albo

- Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii:

$$E = E_k(\dot{\vec{r}}) + E_p(\vec{r}) = \text{const}$$

W zależności od zagadnienia jeden albo drugi sposób może być bardziej użyteczny...

Zasada zachowania energii

Dla ruchu prostoliniowego pod działaniem siły zachowawczej $\vec{F}(x)$, energia potencjalna $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) = \text{const}$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymujemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}}$$
$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x'))}}$$

\Rightarrow Znając $E_p(x)$ możemy zawsze znaleźć związek między x i t .

Zasada zachowania energii

Przykład: $\vec{F} = F \vec{i}_x = \text{const} \Rightarrow E_p(x) = -F x \quad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

Przyjmując, że $x = 0$ w chwili $t = 0$ mamy:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E + F x'}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}} t = \frac{2}{F} \left[\sqrt{E + F x'} \right]_0^x = \frac{2}{F} \sqrt{E + F x} - \frac{2}{F} \sqrt{E}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{\sqrt{2m}} t + \sqrt{E} = \sqrt{E + F x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) \cdot t^2 + \sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot t$$
$$\frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

v_0 - predkość w chwili $t = 0 \Rightarrow$ energia całkowita $E = \frac{mv_0^2}{2} > 0$

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. W wyniku czołowego zderzenia ciężarówka o masie 4 ton jadącej z prędkością 30 km/h z samochodem osobowym o masie 800 kg oba pojazdy zatrzymały się. Samochód osobowy poruszał się z prędkością:
 A 80 km/h B 120 km/h C 150 km/h D 180 km/h
2. Prędkość jaką może uzyskać jednostopniowa rakietą zależy od masy końcowej m_k i masy początkowej rakiety m_0 jak
 A $\frac{m_0}{m_k} - 1$ B $\ln \frac{m_0}{m_k}$ C $\left(\frac{m_0}{m_k}\right)^2$ D $\sqrt{\frac{m_0}{m_k}}$
3. Dwa kamienie o różnej masie wystrzelwane z tej samej procy (tak samo naciągniętej) będą miały równe
 A prędkości B zasięgi C energie kinetyczne D pędy
4. Dla ciała, poruszającego się w polu sił zachowawczych, zachowana(y) jest
 A moment pędu B pęd C energia kinetyczna D energia całkowita
5. Ciało A spuszczone swobodnie z wysokości cztery razy większej niż ciało B : $h_A = 4h_B$. Uzyskane prędkości
 A $v_A = 2 v_B$ B $v_A = \sqrt{2} v_B$ C $v_A = 4 v_B$ D $v_A = 2\sqrt{2} v_B$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego