



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Zasady zachowania

Fizyka I (Mechanika)

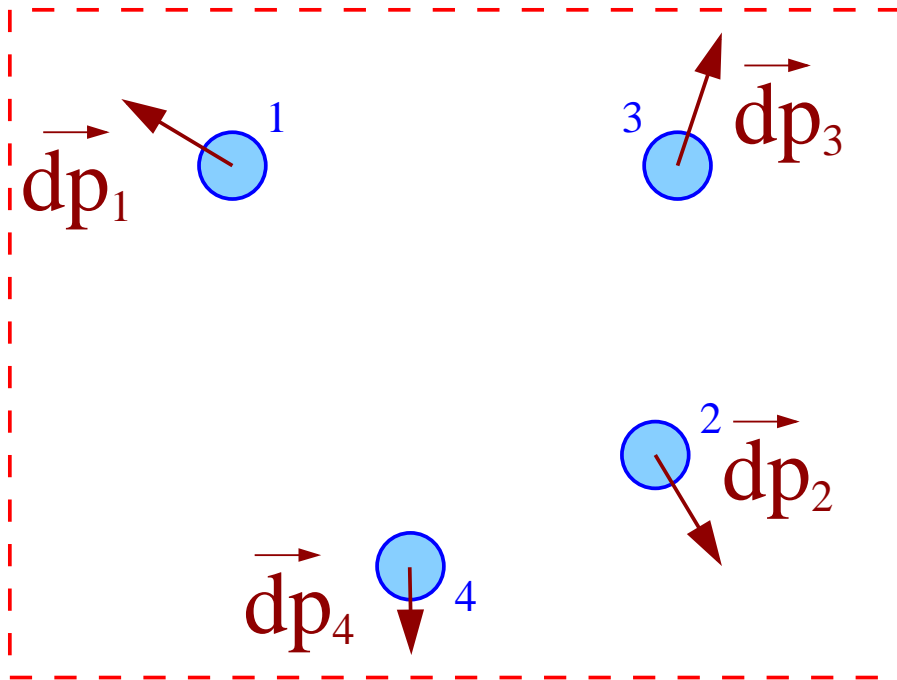
Wykład VI:

- Zasady zachowania energii i pędu
- Zasada zachowania momentu pędu
- Zderzenia elastyczne
- Układ środka masy

Zasada zachowania pędu

II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^\Sigma$$



izolowany układ inercjalny

Pęd układu

Prawo ruchu układu:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Dla dowolnego układu **izolowanego**, **suma pędów** wszystkich elementów układu pozostaje **stała**.

Praca i energia

Energia potencjalna

Siła $\vec{F}(\vec{r})$ jest **zachowawcza** (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od **położenia** punktów początkowego (A) i końcowego (B)

⇒ można ją wyrazić przez zmianę **energii potencjalnej**

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Związek siły i energii potencjalnej:

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$$

Znajomość potencjału siły zachowawczej jest równoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany.

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$ pomiędzy A i B wyraża się przez energię potencjalną

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B$$

Z drugiej strony, praca siły działającej na ciało zmienia energię kinetyczną:

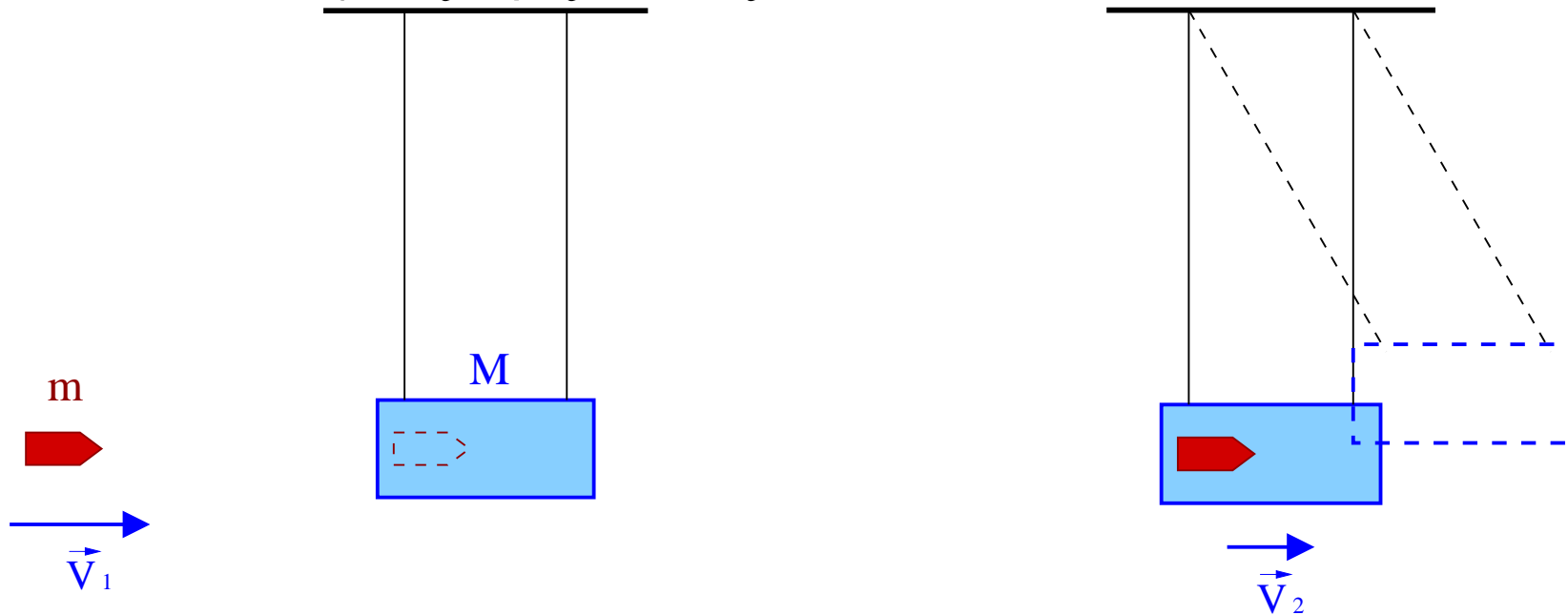
$$\begin{aligned} W_{AB} &= E_k^B - E_k^A \\ \Rightarrow E_k^B - E_k^A &= E_p^A - E_p^B \\ \Rightarrow E_k^B + E_p^B &= E_k^A + E_p^A \\ \Rightarrow E &= E_p + E_k = \text{const} \end{aligned}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

Zasada zachowania energii

Wahadło balistyczne

Pocisk o masie m wbija się z prędkością \vec{v}_1 w nieruchome wahadło o masie M



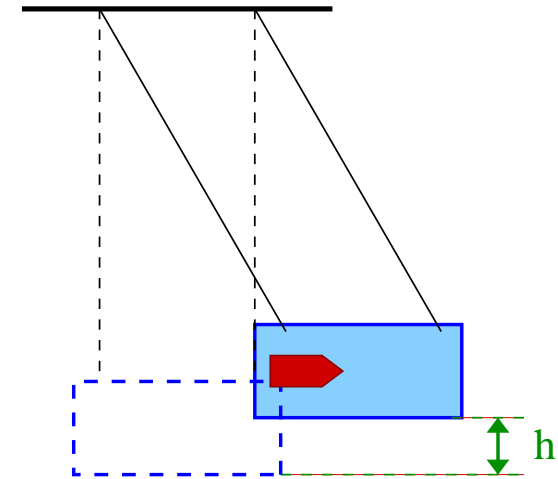
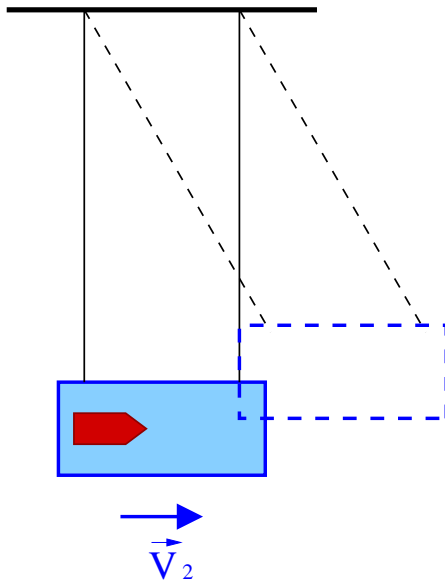
Prędkość jaką uzyska wahadło możemy wyznaczyć z zasady zachowania pędu (zderzenie całkowicie nieelastyczne)

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= m\vec{v}_1 = (m + M)\vec{v}_2 = \vec{p}_f \\ \Rightarrow \vec{v}_2 &= \frac{m \vec{v}_1}{m + M}\end{aligned}$$

Zasada zachowania energii

Wahadło balistyczne

Wahadło wychyliło się na wysokość h : energia kinetyczna zamienia się na potencjalną



Z zasady zachowania energii:

$$E_i = E_k = \frac{(M + m)v_2^2}{2}$$

(przyjmujemy, że w położeniu początkowym $E_p = 0$)

$$= E_f = E_p = (M + m)gh \quad E_k = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g}$$

Początkowa energia kinetyczna wahadła NIE jest równa energii kinetycznej pocisku!!!

Zasada zachowania momentu pędu

Siły centralne

Jeśli układ ciał (lub pojedyncze ciało) działa jakaś siła zewnętrzna $\vec{F}_{tot} \neq 0$ to pęd układu musi się zmieniać: $\sum \vec{p}_i \neq \text{const.}$

Siły które działają na układ często są

siłami centralnymi - działają w kierunku ustalonego źródła siły.

Jeśli położenie źródła przyjmiemy za środek układu $\Rightarrow \vec{F}_{tot} = F(r, \dots) \cdot \vec{i}_r$

Przykład:

- siła grawitacyjna $F(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
- siła kulombowska $F(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- siła sprężysta $F(r) = -k \cdot r$

Czy można coś “uratować” z zasady zachowania pędu ?...

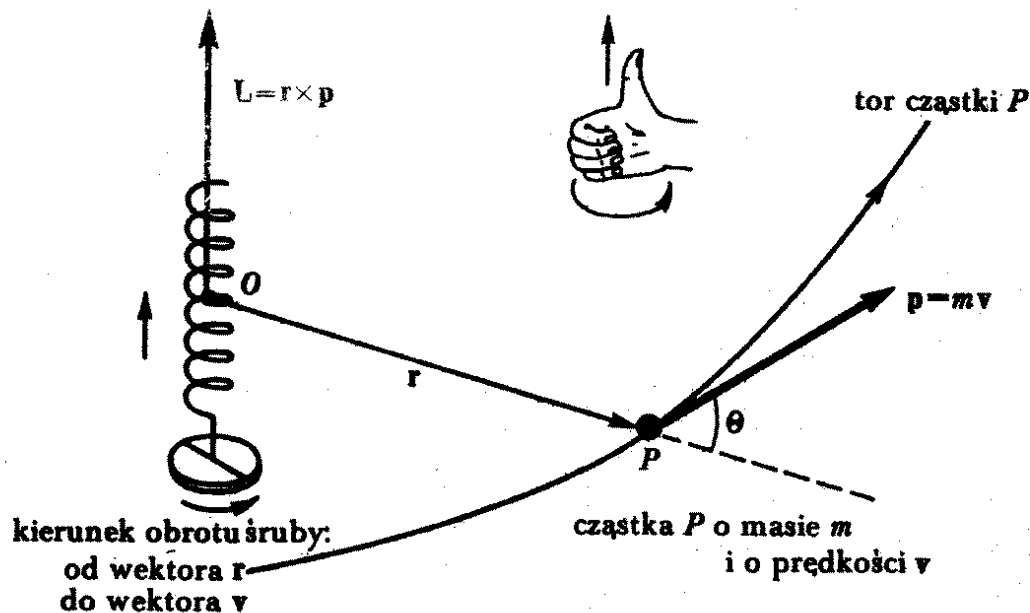
Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu

Zdefiniujemy dla punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

⇐ moment pędu **względem O**
zależy od wyboru początku układu



Dla $v \ll c$

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = m r v \sin \theta$$

Zasada zachowania momentu pędu

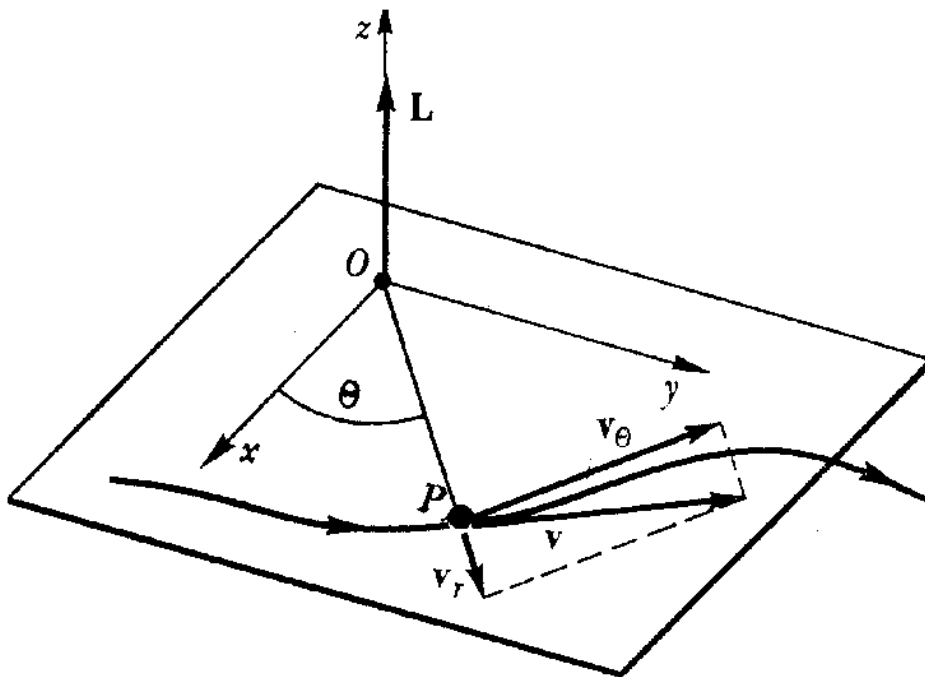
Moment pędu

Ruch po płaszczyźnie:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

$$L = m r v_\theta$$

$$\Rightarrow L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = m r^2 \omega$$



Przypadek szczególny:
ruch po okręgu - $r = \text{const}$

Moment bezwładności

$$I = m r^2$$

\Rightarrow moment pędu możemy przedstawić
w ogólnej postaci

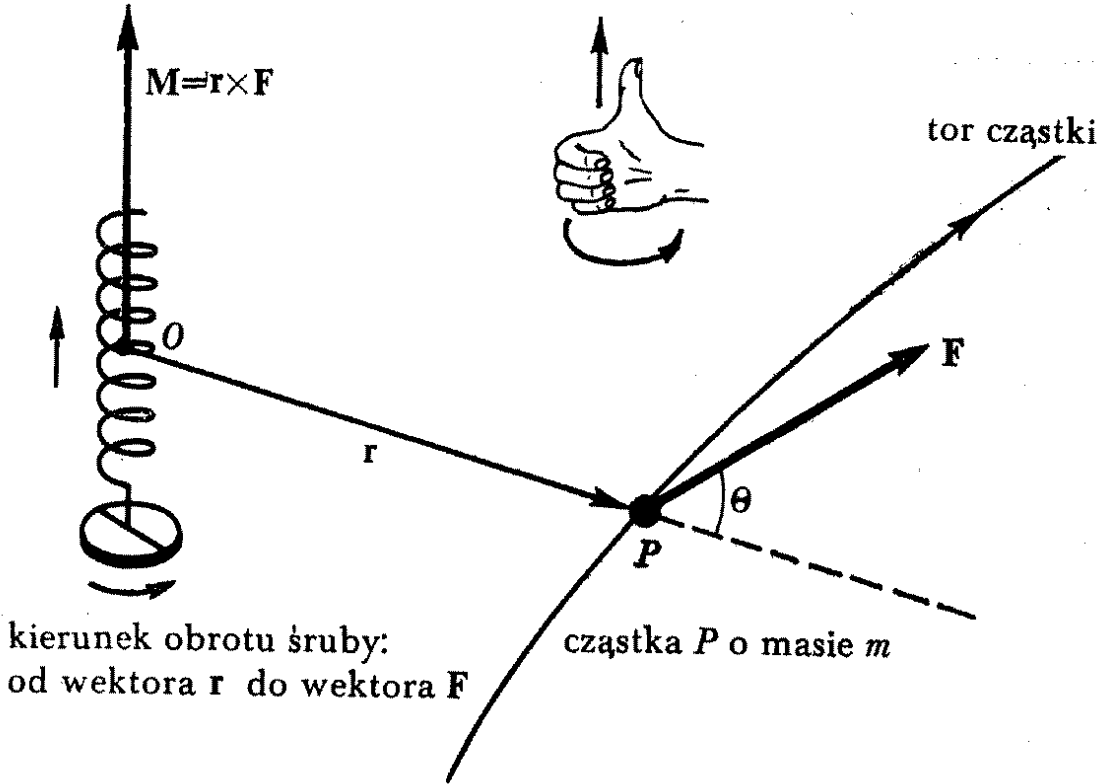
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Moment siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

← moment siły **względem O**



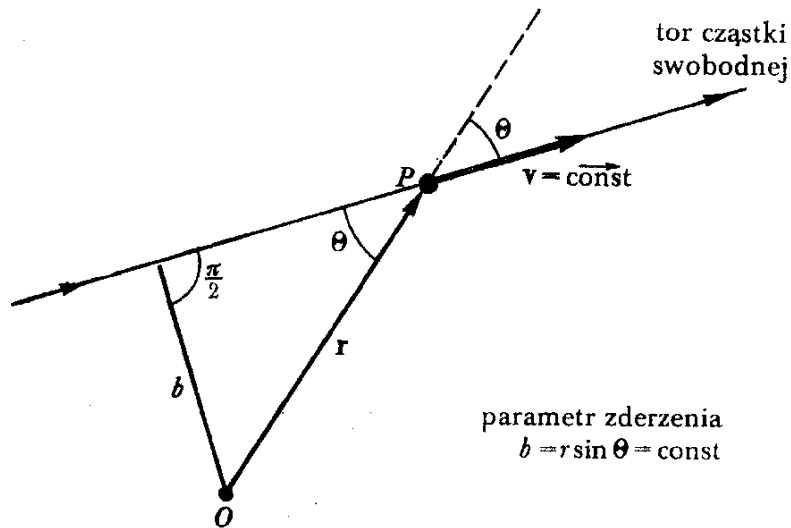
Równanie ruchu

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= 0 + \vec{M} \end{aligned}$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Cząstka swobodna



Moment pędu względem **dowolnego punktu O** pozostaje stały:

$$L = m v r \sin \theta = m v b = \text{const}$$

b - parametr zderzenia
odległość najmniejszego zbliżenia do O

Siła centralna

Moment siły: (względem źródła)

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{i}_r \cdot F(r, \dots) = 0 \end{aligned}$$

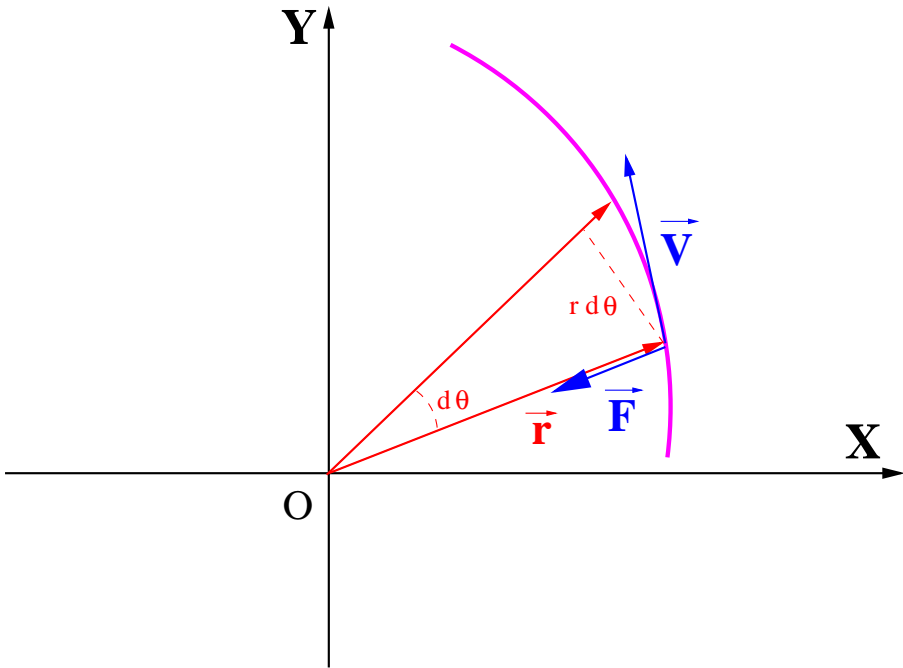
$$\vec{L} = \text{const}$$

Moment pędu, liczony **względem źródła** siły centralnej pozostaje stały.

Zasada zachowania momentu pędu

Prędkość polowa

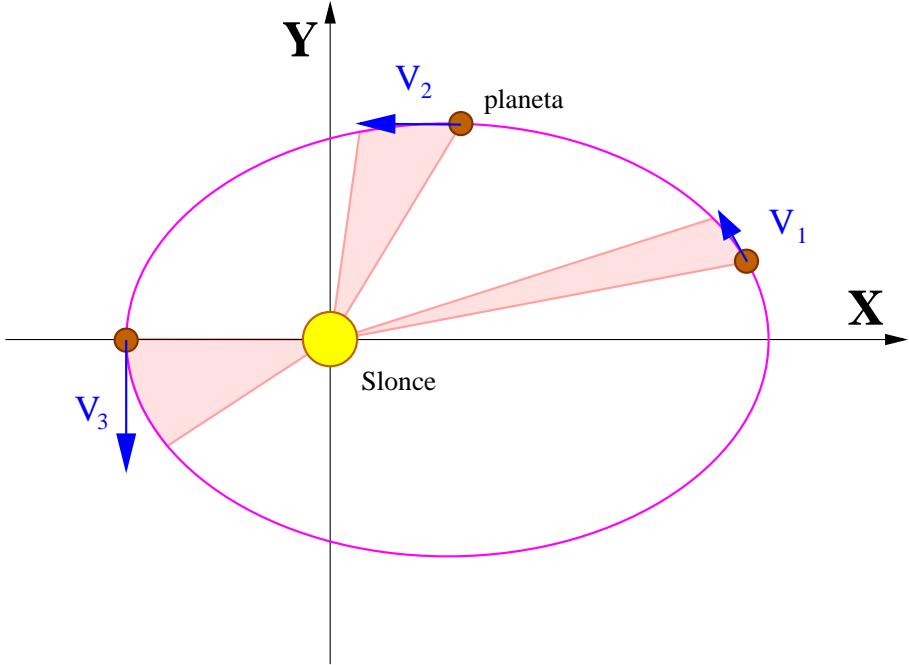
Pole jakie wektor wodzący punktu zakreśla w jednostce czasu: $\frac{dS}{dt}$



$$dS = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

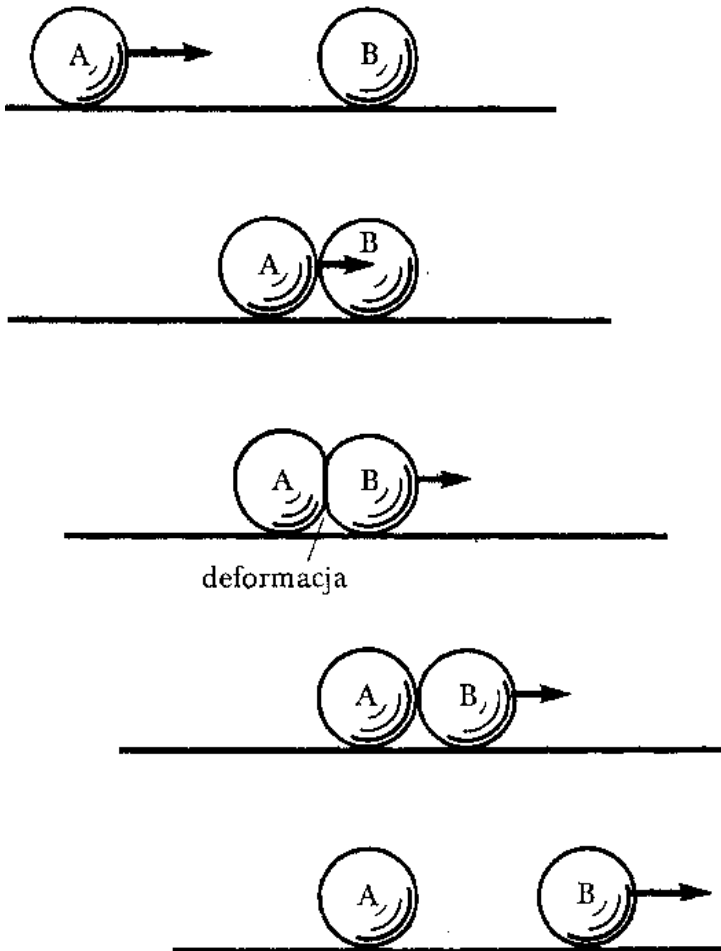
II prawo Keplera

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{L}{2m} = \text{const}$$



W ruchu pod działaniem sił centralnych prędkość polowa jest stała.

Zderzenia



Poprzednio rozpatrywaliśmy zderzenia ciał z punktu widzenia **zasady zachowania pędu** (i momentu pędu) **zasada zachowania pędu jest zawsze bezwzględnie spełniona**

Czy zachowana jest energia kinetyczna ?

TAK

- jeśli działające siły mają charakter zachowawczy
siły kulombowskie, siły sprężystości

$$\Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_k = 0$$

NIE

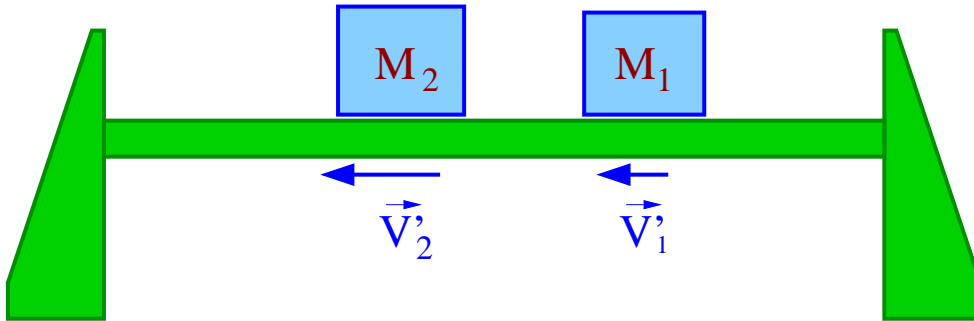
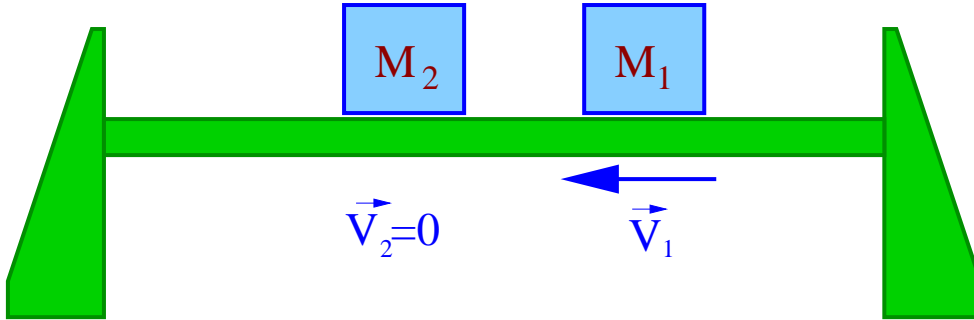
- jeśli mamy wkład sił niezachowawczych
w wyniku zderzenia następują trwałe zmiany (np. odkształcenia) w zderzających się ciałach

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Z zasad zachowania:

Przypadek jednowymiarowy:



$$p: \quad m_1 V_1' + m_2 V_2' = m_1 V_1$$
$$E: \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Przekształcamy:

$$p: \quad m_2 V_2' = m_1 (V_1 - V_1')$$
$$E: \quad m_2 V_2'^2 = m_1 (V_1^2 - V_1'^2)$$
$$= m_1 (V_1 - V_1')(V_1 + V_1')$$

$$\Rightarrow V_2' = V_1 + V_1' \Rightarrow V_2' - V_1' = V_1$$

wartość bezwzględna prędkości względnej przed i po zderzeniu jest taka sama

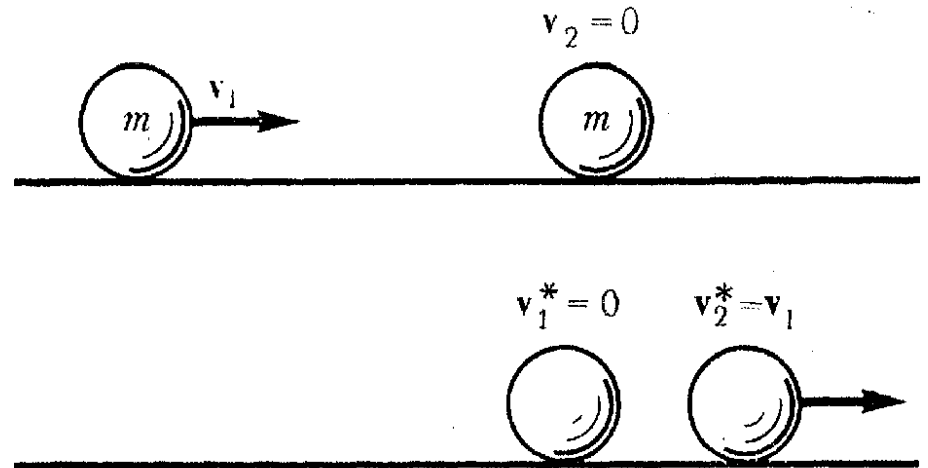
Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przekształcając dalej otrzymujemy:

$$m_2 (V_1 + V_1') = m_1 (V_1 - V_1')$$

$$\Rightarrow V_1' (m_1 + m_2) = V_1 (m_1 - m_2)$$



Ostatecznie:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

$$V_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

Przypadek szczególny: $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} V_1' &= V_2 = 0 \\ V_2' &= V_1 \end{aligned}$$

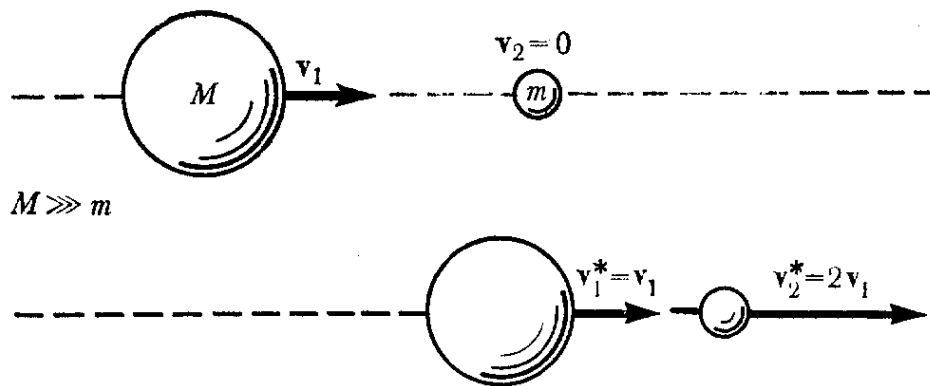
Zderzające się ciała “wymieniają się” prędkościami; rozwiązanie słuszne także w przypadku $\vec{v}_2 \neq 0$

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$$m_1 > m_2$$

Masa “pocisku” większa od masy “tarczy”:



Przypadek graniczny: $m_1 \gg m_2$

$$\Rightarrow V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 = V_1$$

$$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 = 2 \cdot V_1$$

“Pocisk” nie zauważa zderzenia

“Tarcza” uzyskuje prędkość $2 \cdot V_1$

Otrzymujemy: $V_2' > V_1' > 0$

Po zderzeniu oba ciała poruszają się w tą samą stronę.

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$$m_1 < m_2$$

Masa “pocisku” mniejsza od masy “tarczy”:

Otrzymujemy:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 < 0$$

$$V_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_1 > 0$$

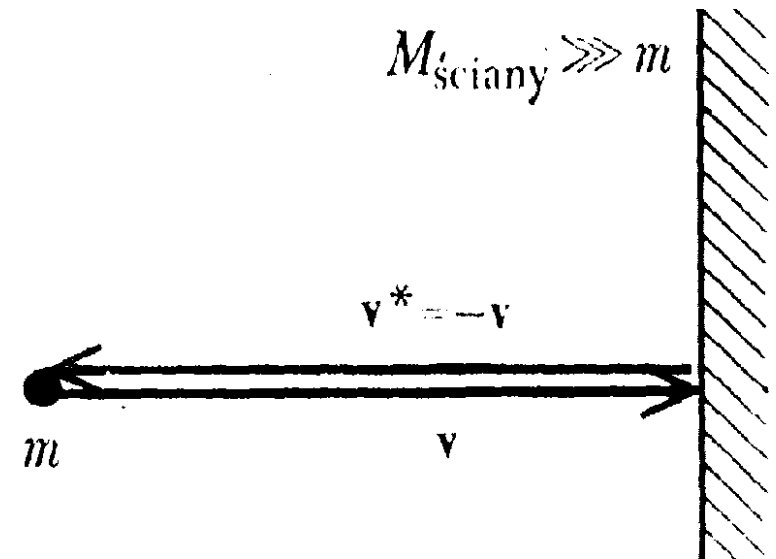
Prędkość “pocisku” zmienia znak

⇒ “pocisk” odbija się od “tarczy”

Przypadek graniczny: $m_1 \ll m_2$

$$\Rightarrow V_1' = -V_1$$

$$V_2' = 0$$

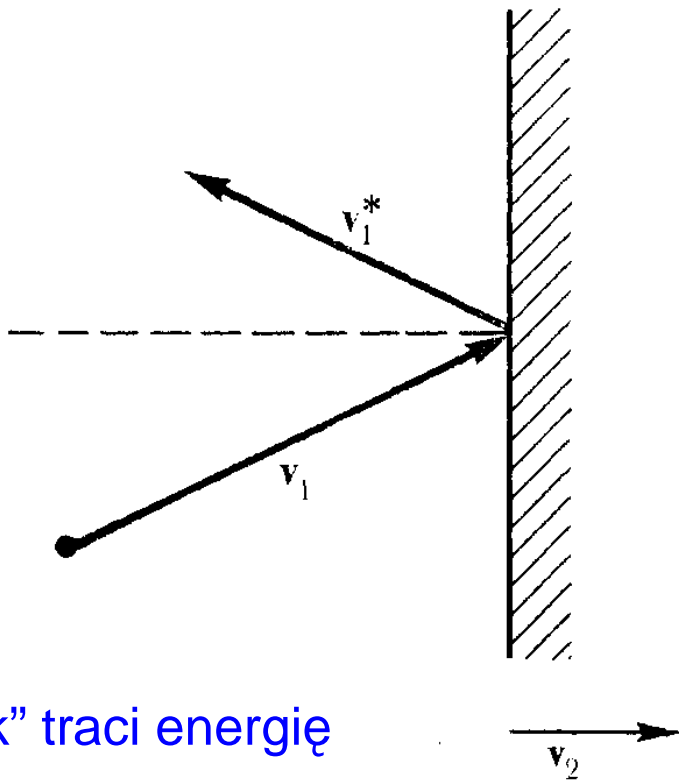


Sprężyste odbicie od
nieruchomej “ściany”

Zderzenia

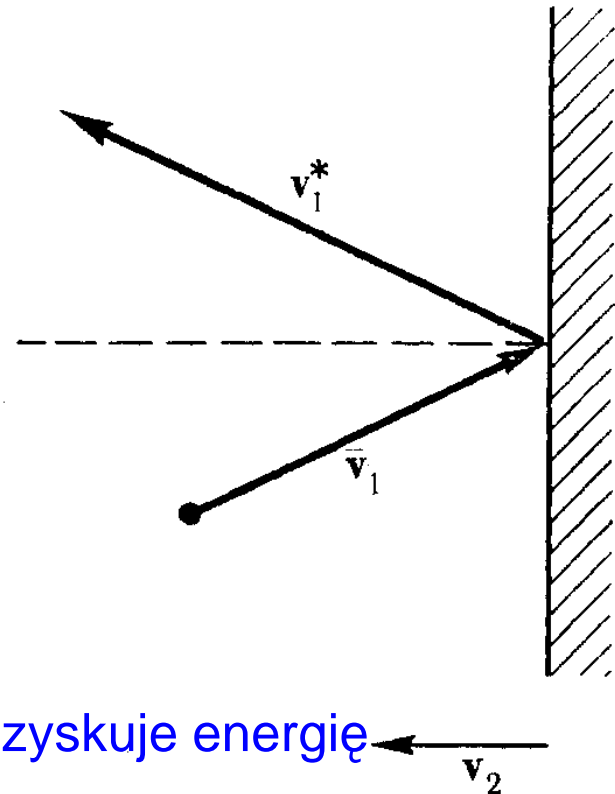
$$\underline{m_1 \ll m_2}$$

“Tarcza” oddala się od “pocisku”
 (“ściana”)



“pocisk” traci energię

“Tarcza” przybliża się do “pocisku”
 (“ściana”)



“pocisk” zyskuje energię

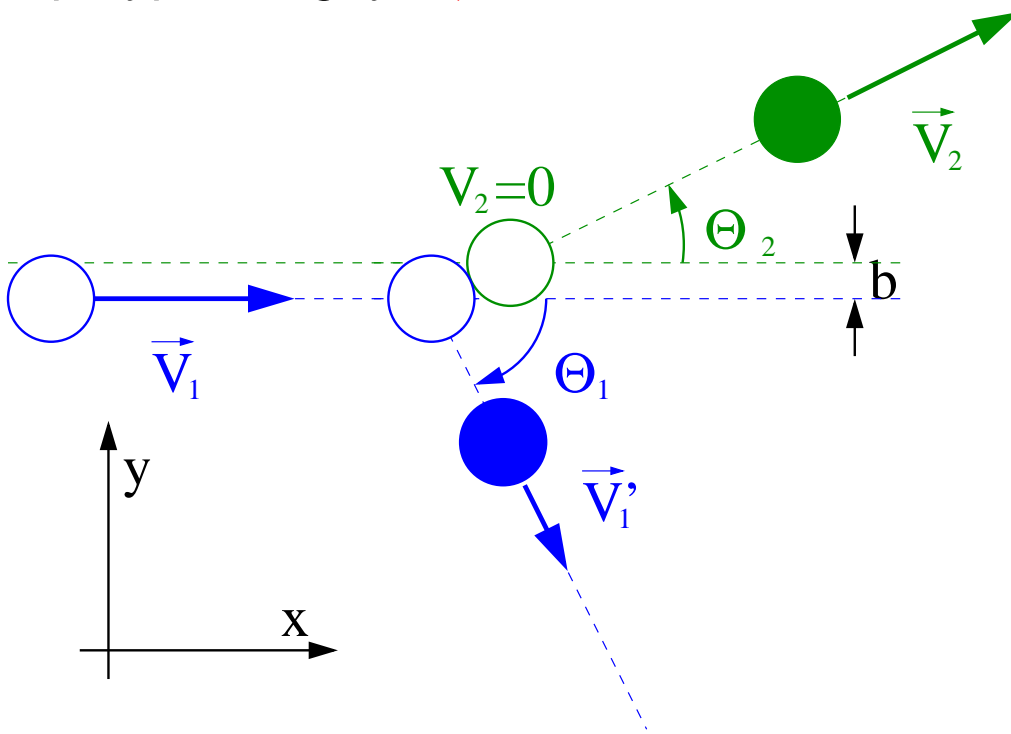
Mikroskopowy obraz ochładzania (ogrzewania) się gazu przy rozprężaniu (sprężaniu)

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Do tej pory rozpatrywaliśmy tzw. **zderzenia centralne**, dla których **parametr zderzenia $b = 0$** “pocisk” trafia w sam środek “tarczy”

W przypadku gdy $b \neq 0$ zderzenie trzeba rozpatrywać w dwóch wymiarach:



Zasada zachowania pędu:

$$\begin{aligned} p_x : \quad & \text{po zderzeniu} & \text{przed} \\ & m_2 V_2' \cos \theta_2 + m_1 V_1' \cos \theta_1 & = m_1 V_1 \\ p_y : \quad & m_2 V_2' \sin \theta_2 - m_1 V_1' \sin \theta_1 & = 0 \end{aligned}$$

Dla zderzeń spężystych:

$$E_k : \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Znajomość m_1 , m_2 i V_1 ($V_2 = 0$) nie wystarcza do wyznaczenia pełnej kinematyki zderzenia (V_1' , V_2' , θ_1 i θ_2) !

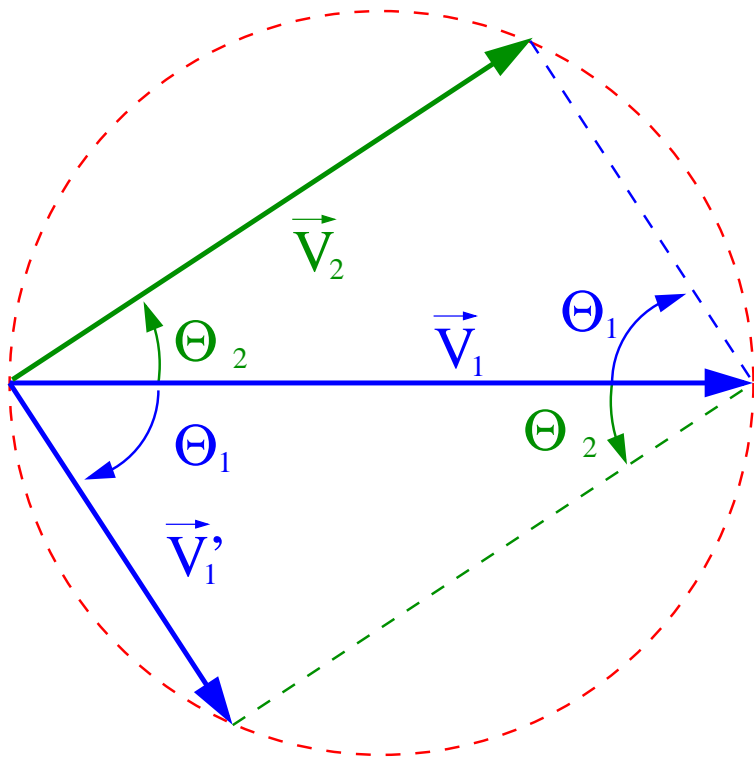
\Rightarrow musimy ustalić b albo jeden z parametrów rozproszenia (np. kąt θ_1).

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Jeśli masy zderzających się sprężyste ciał są równe

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ zagadnienie bardzo się upraszcza



Z zasad zachowania:

$$\vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 = \vec{V}_1$$

$$V_1'^2 + V_2'^2 = V_1^2$$

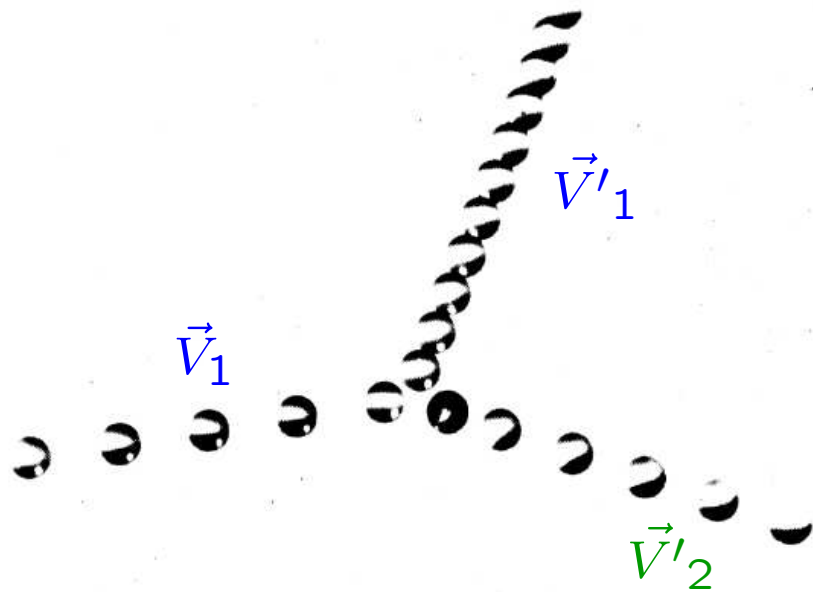
\Rightarrow wektory \vec{V}_1 , \vec{V}'_1 i \vec{V}'_2 tworzą trójkąt prostokątny.

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

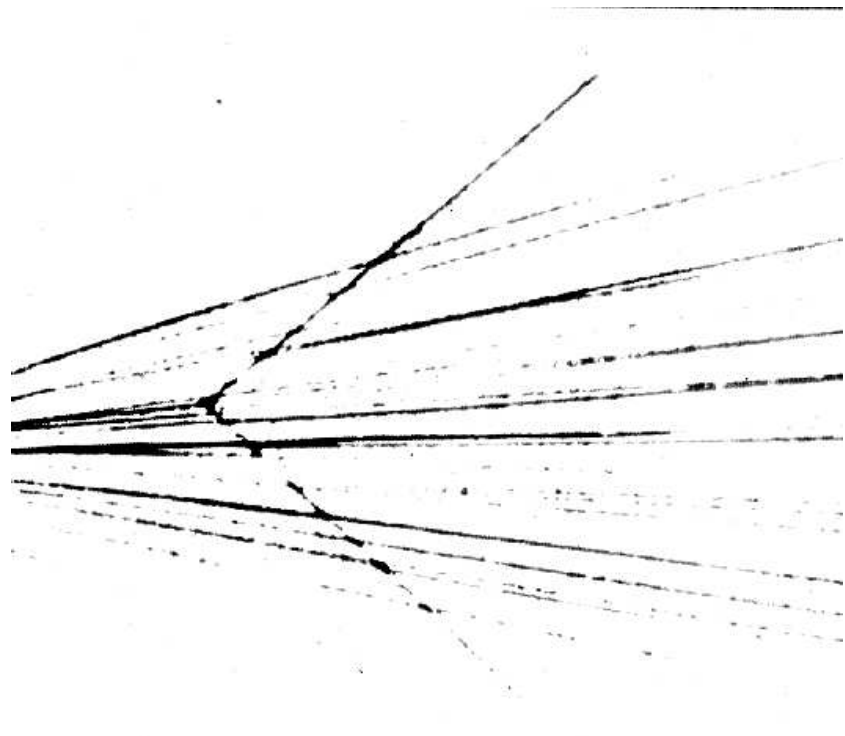
Zderzenia

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Fotografia zderzających się kul:



Zderzenie proton-proton w komorze pęcherzykowej:

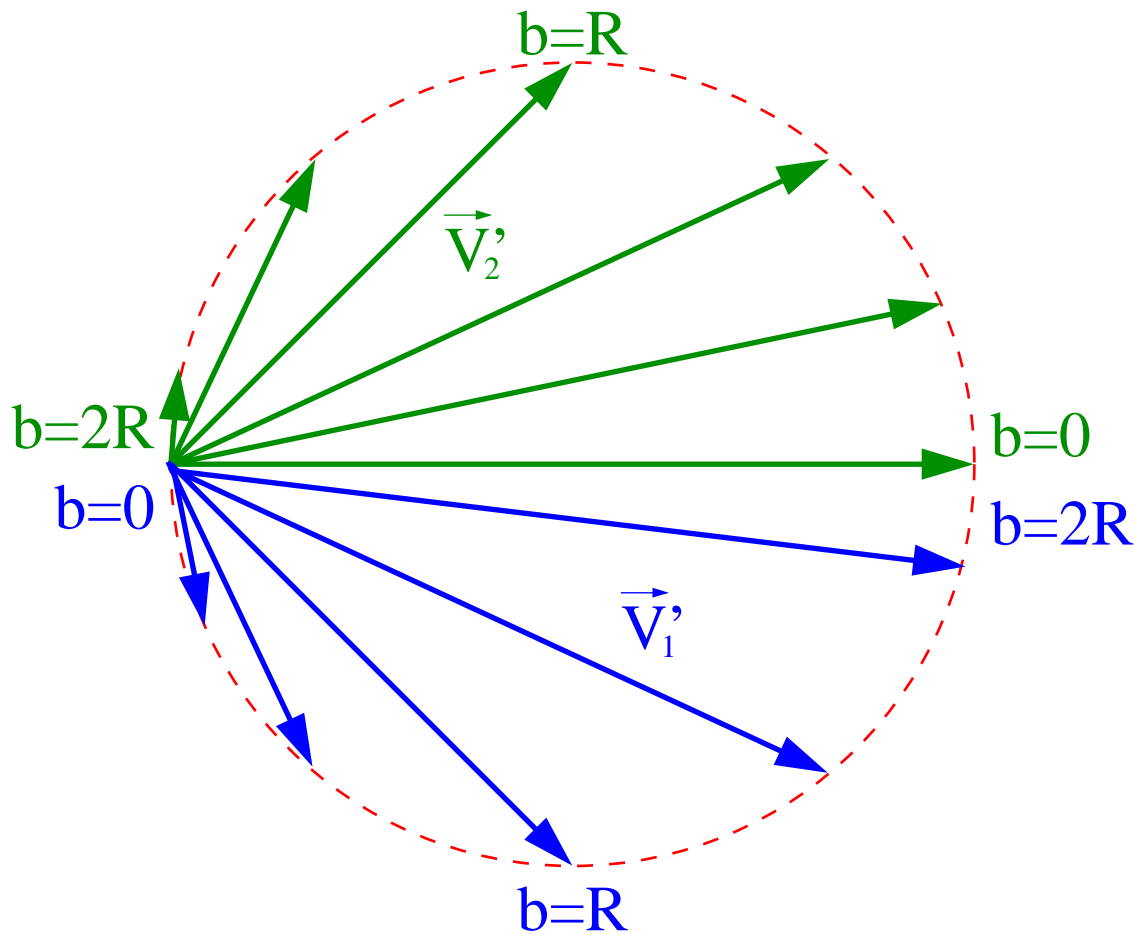


niska energia padającej wiązki

⇒ dynamika nierelatywistyczna

Zderzenia

$$\underline{m_1 = m_2}$$



Stan końcowy zależy od parametru zderzenia b

- $b = 0 \Rightarrow$ zderzenie centralne

$$\begin{aligned}\vec{V}'_2 &= \vec{V}_1 \\ \vec{V}'_1 &= 0\end{aligned}$$

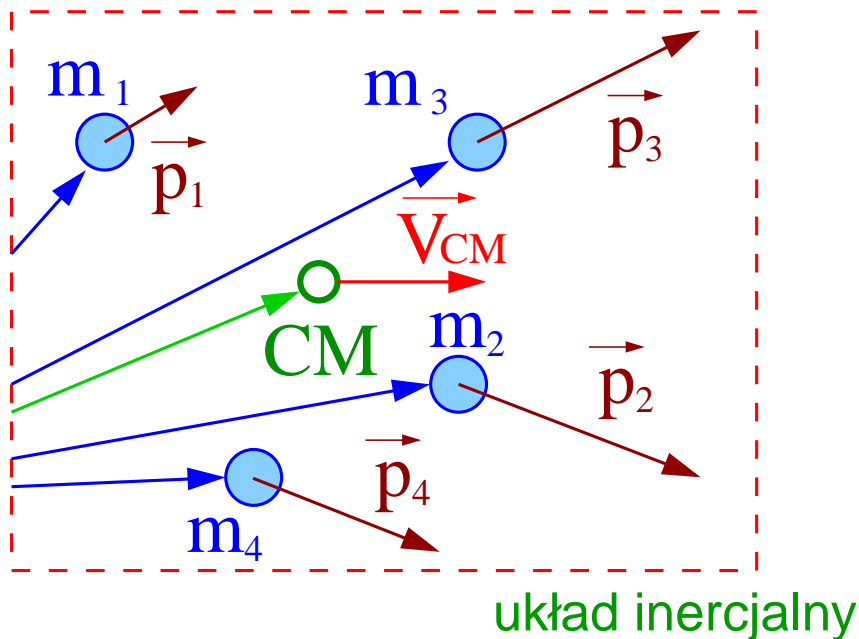
- $b \geq 2R \Rightarrow$ brak zderzenia (kule mijają się)

$$\begin{aligned}\vec{V}'_2 &= 0 \\ \vec{V}'_1 &= \vec{V}_1\end{aligned}$$

Układ środka masy

Układ izolowany

Izolowany układ wielu ciał:



Zasada zachowania pędu:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Środek masy

Klasyczna definicja położenia środka masy:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

⇒ średnia ważona z \vec{r}_i (z wagami $w_i = m_i$)

Ruch środka masy: $m_i = \text{const}$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{\sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_i m_i \right) \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M \vec{V}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

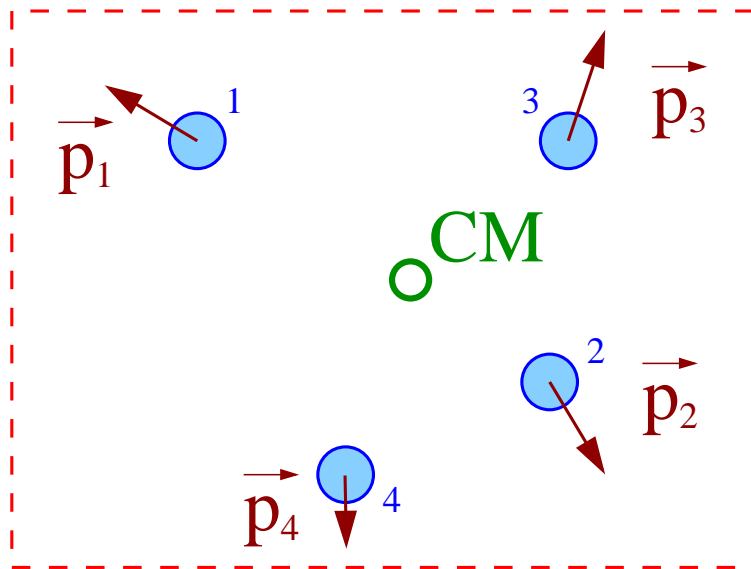
pęd układu możemy związać z ruchem środka masy

Układ środka masy

Prędkość środka masy: (klasycznie)

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Zawsze możemy tak zmienić układ odniesienia, żeby **środek masy spoczywał**



⇒ układ środka masy (CMS)

Układ środka masy

Układ środka masy jest w wielu przypadkach najwygodniejszym układem odniesienia

⇒ szereg relacji bardzo się upraszcza

Zasada zachowania pędu w CMS:
(zmiennne w CMS oznaczamy *)

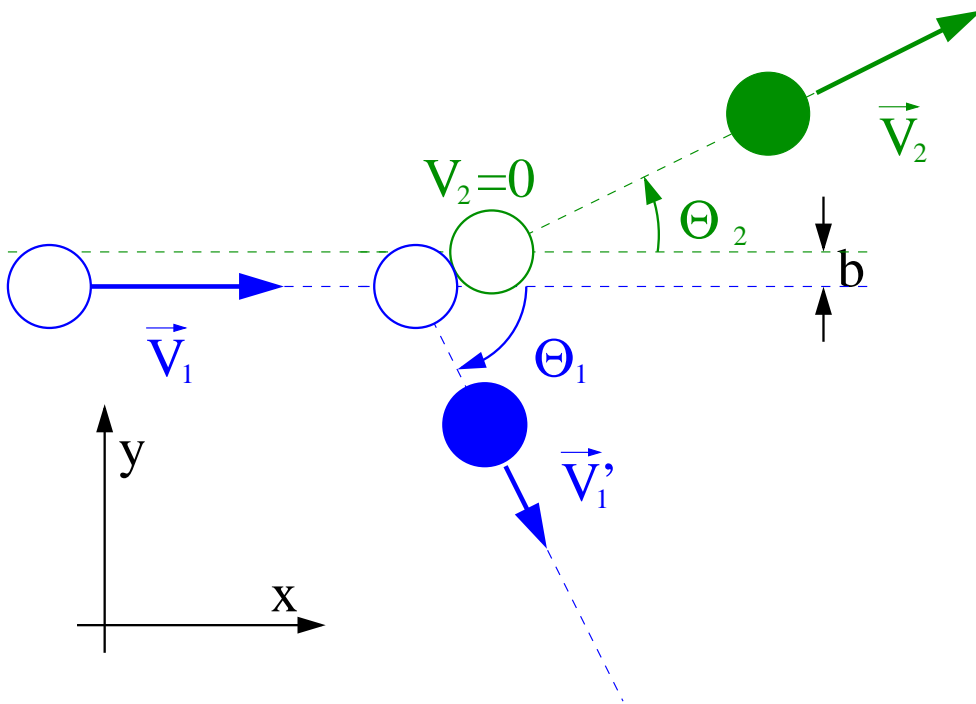
$$\vec{P}^* = \sum_i \vec{p}_i^* = 0$$

ogólna definicja układu środka masy
słuszna także w przypadku $v \sim c$

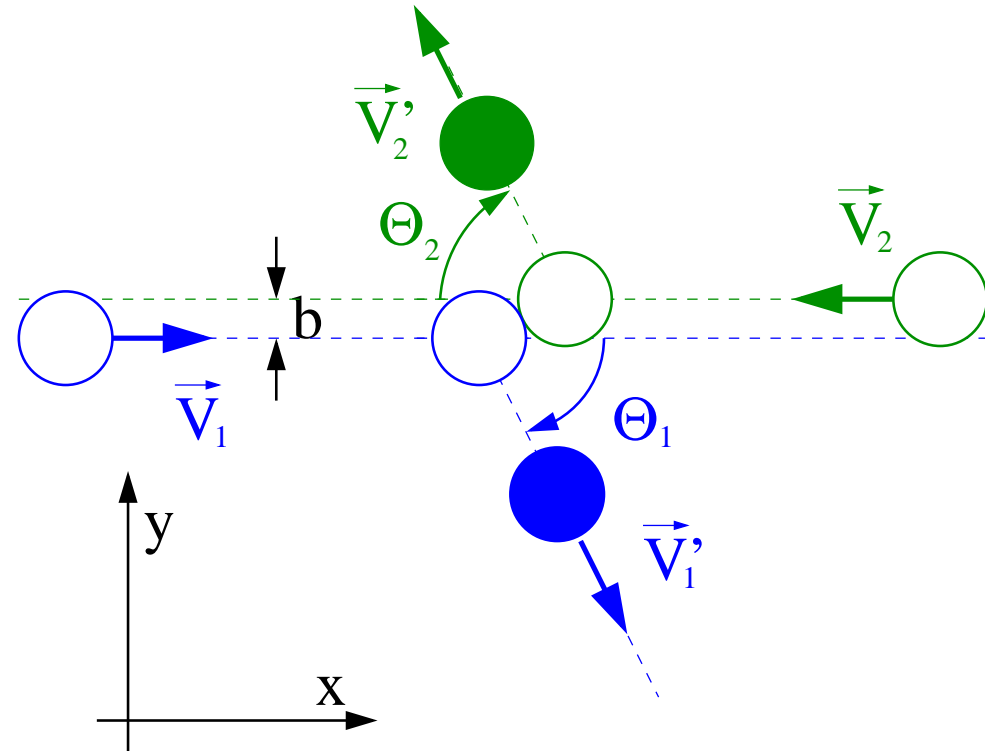
Układ środka masy

Zderzenia nie centralne

Układ laboratoryjny:



Układ środka masy:



Zasada zachowania pędu: $\vec{P}^* = 0$

Skomplikowane wyrażenia na prędkości końcowe w funkcji np. kąta rozproszenia θ_1 .

Łatwiej jeśli $m_1 = m_2$

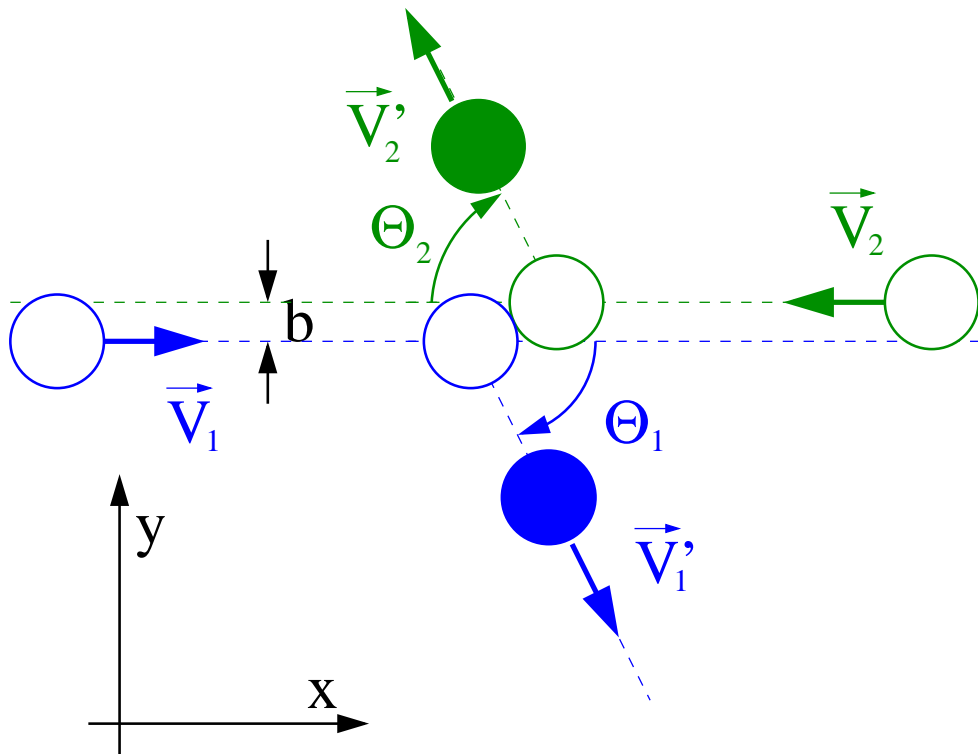
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

Układ środka masy

Zderzenia sprężyste

Układ środka masy:



Zasada zachowania energii: $V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}$$

$$\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1'^2$$

$$\Rightarrow V_1' = V_1 \quad V_2' = V_2$$

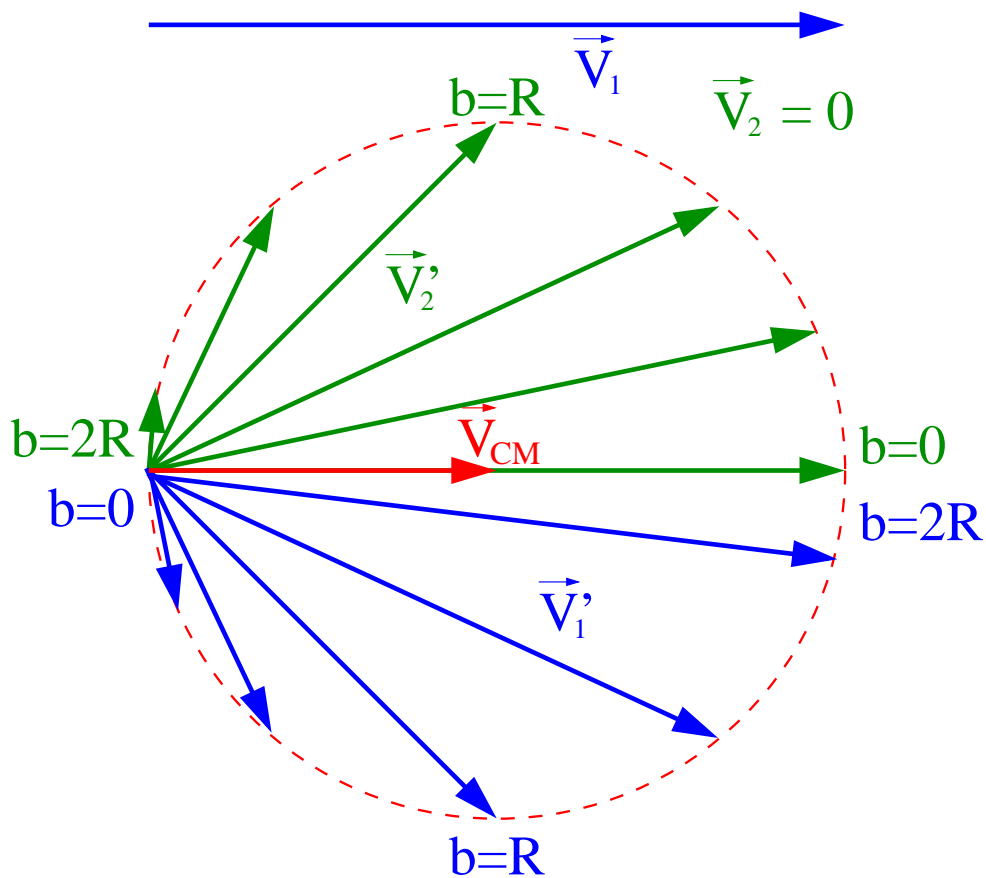
Niezależnie od mas zderzających się ciał, wartości ich prędkości przed i po zderzeniu sprężystym są takie same.

W układzie środka masy !

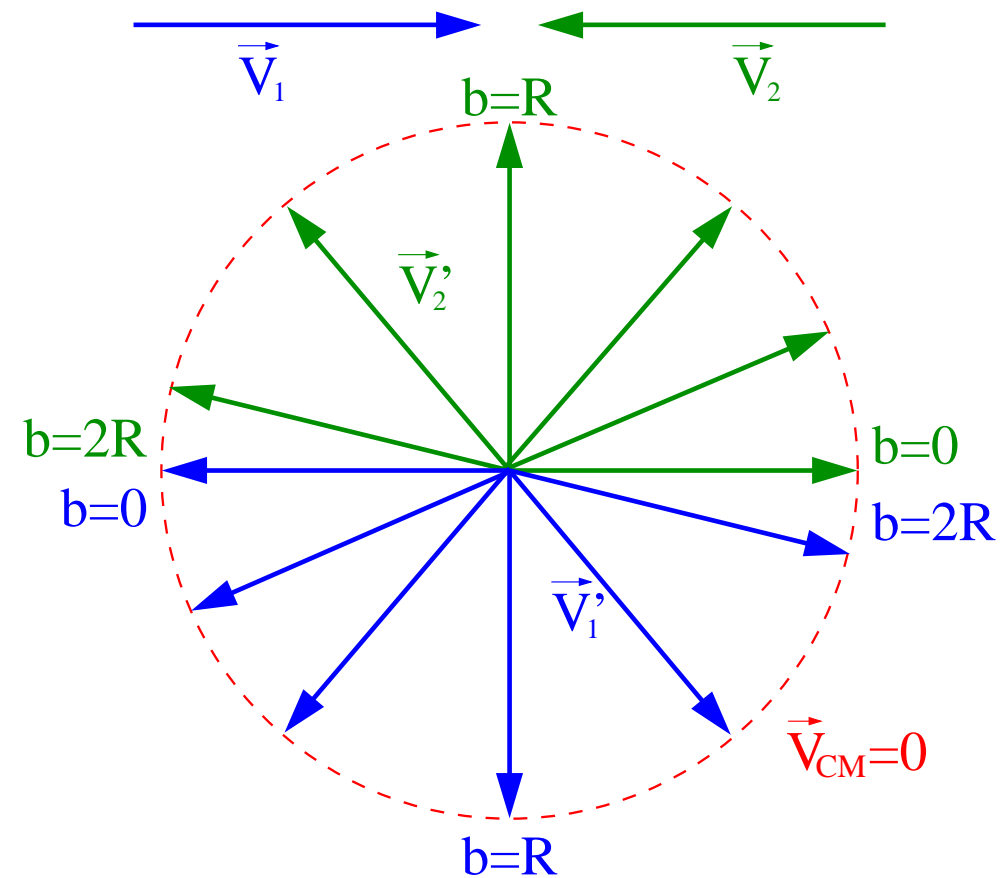
Układ środka masy

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Układ laboratoryjny:



Układ środka masy:

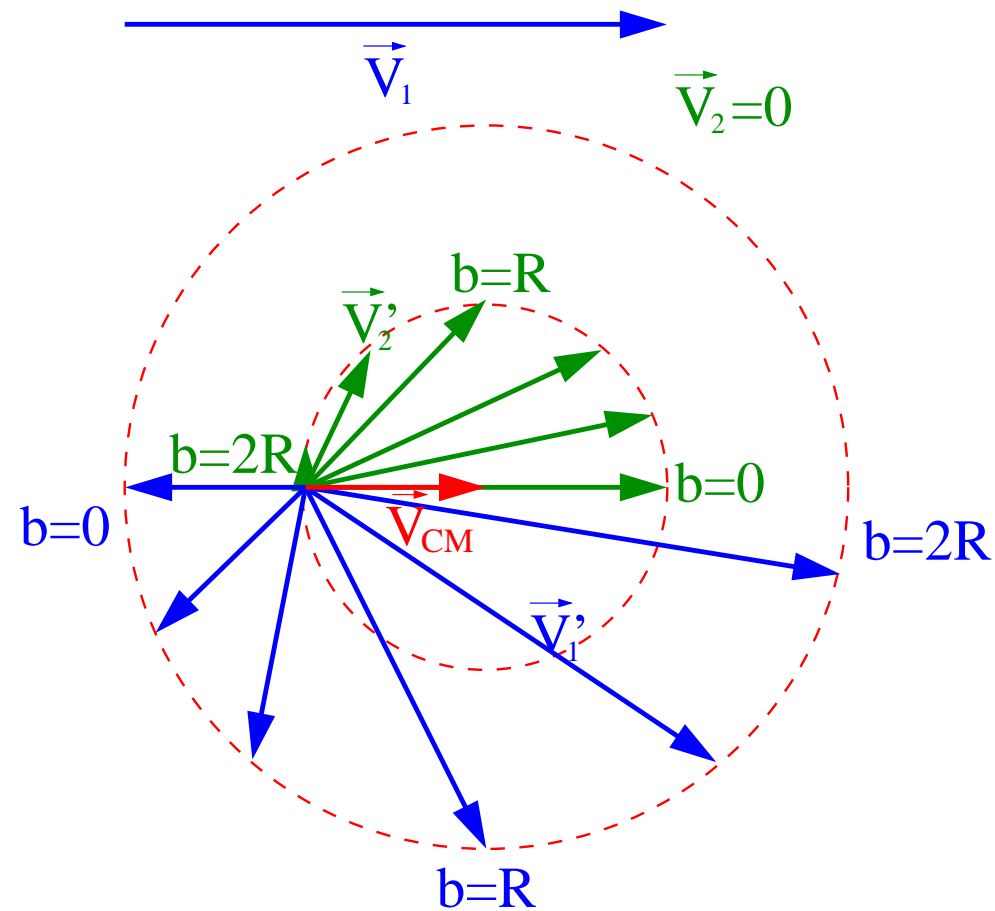
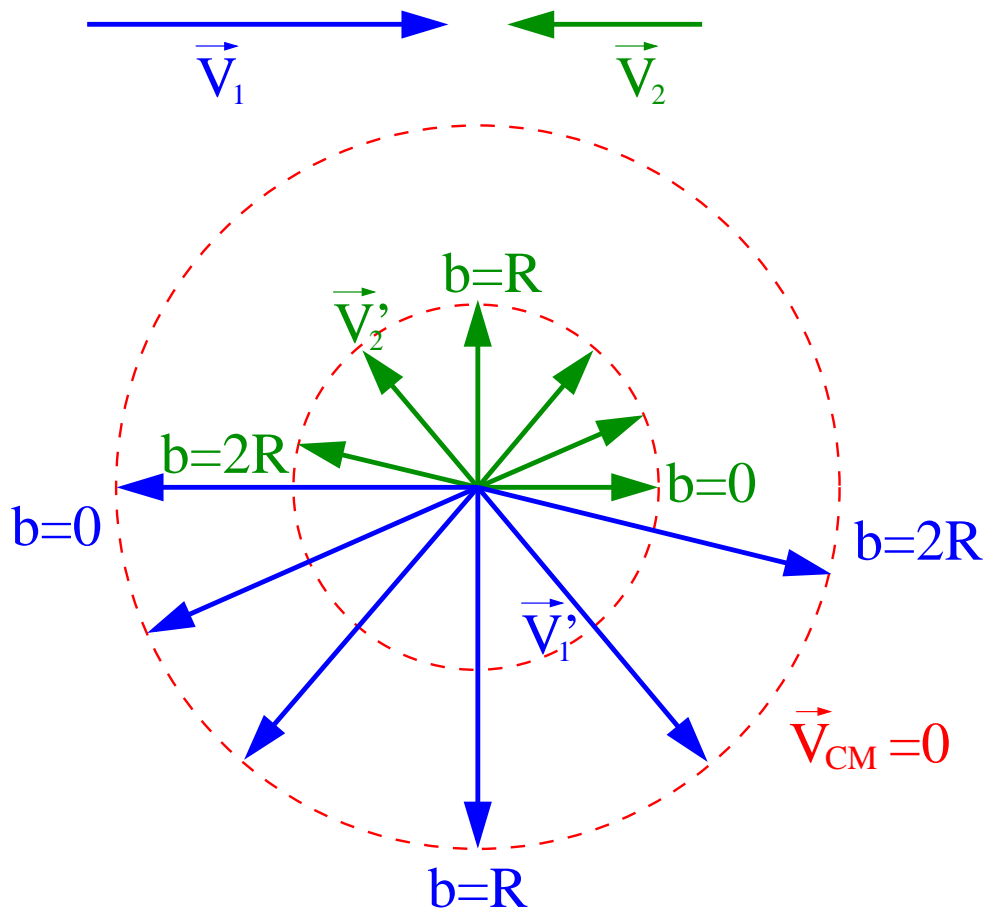


Układ środka masy

$m_1 < m_2$

Układ środka masy:

Układ laboratoryjny



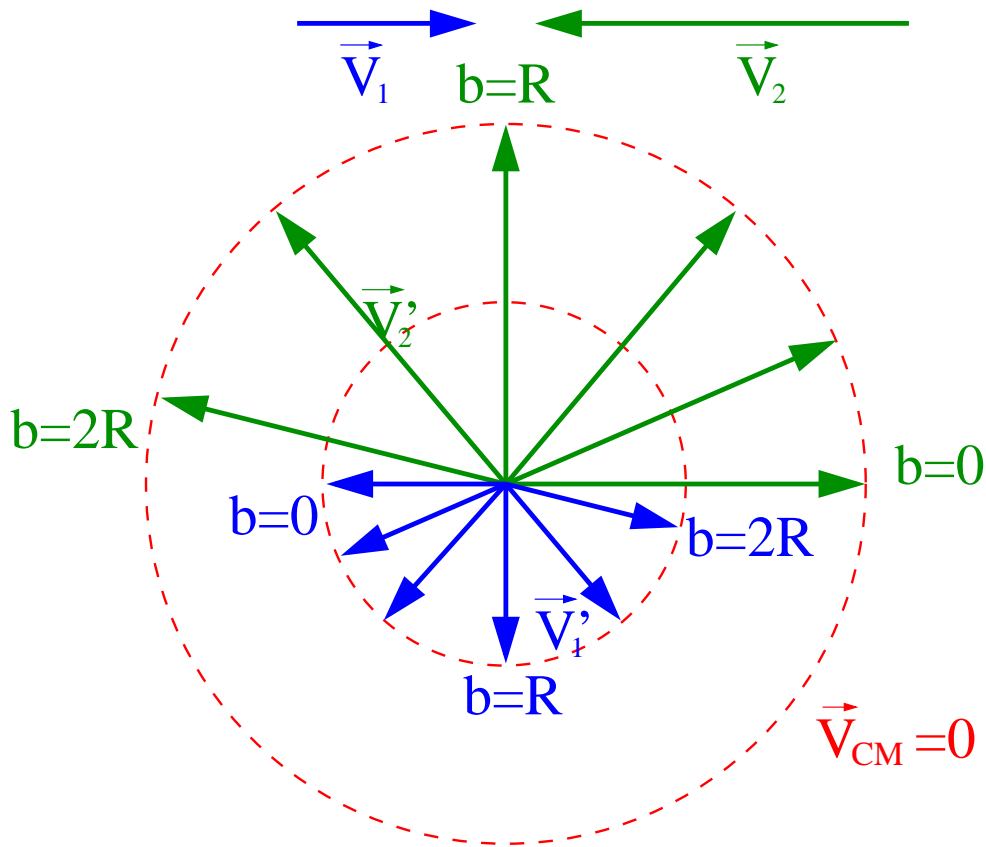
Dla $m_1 = \frac{1}{2}m_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$

$V_{CM} = \frac{1}{3}V_1$

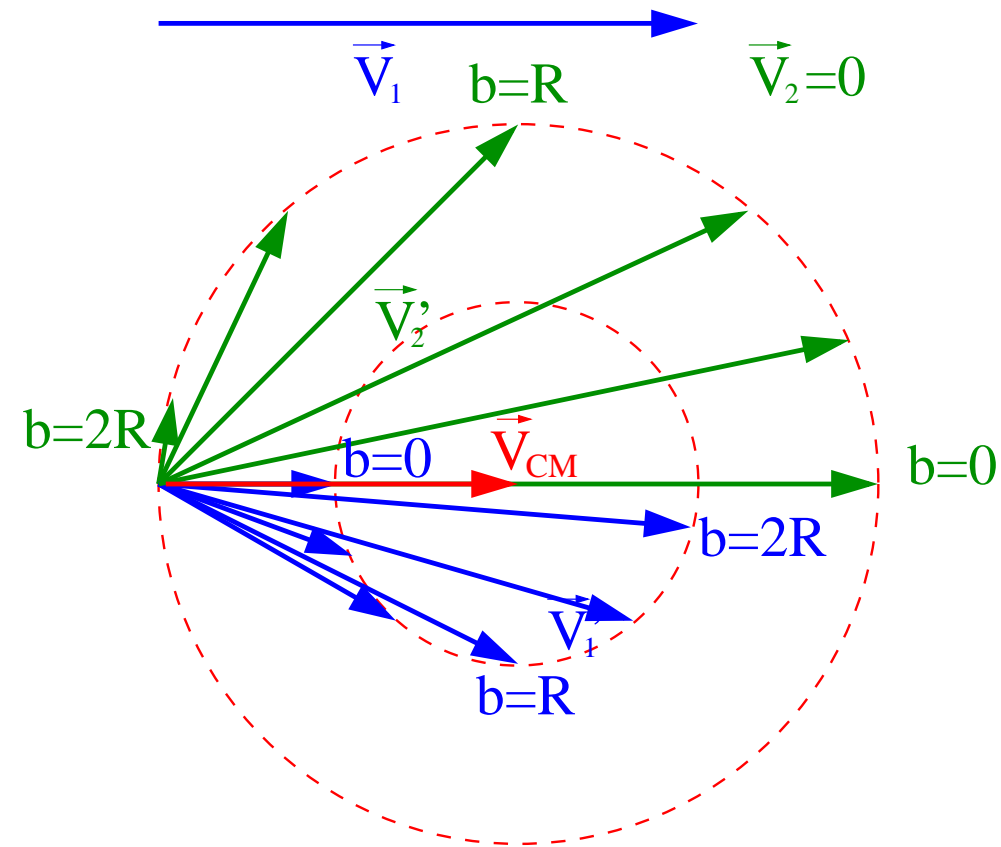
Układ środka masy

$m_1 > m_2$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny:



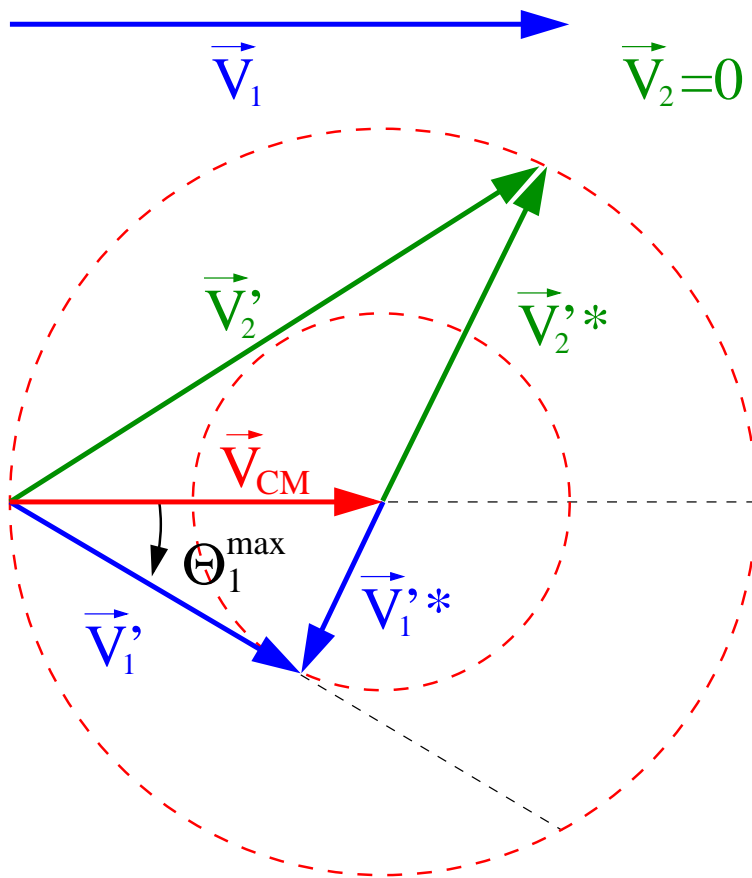
Dla $m_1 = 2 m_2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2} v_2$

$V_{CM} = \frac{2}{3} V_1$

Układ środka masy

$$\underline{m_1 > m_2}$$

Układ laboratoryjny:



Związek między prędkościami:

$$V_{CM} = v_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

$$v_1^* = \frac{m_2}{m_1} v_2^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

Maksymalny kąt rozproszenia “pocisku”:

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{v_1^*}{V_{CM}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Dla “tarczy” ograniczenie nie zależy od stosunku mas:

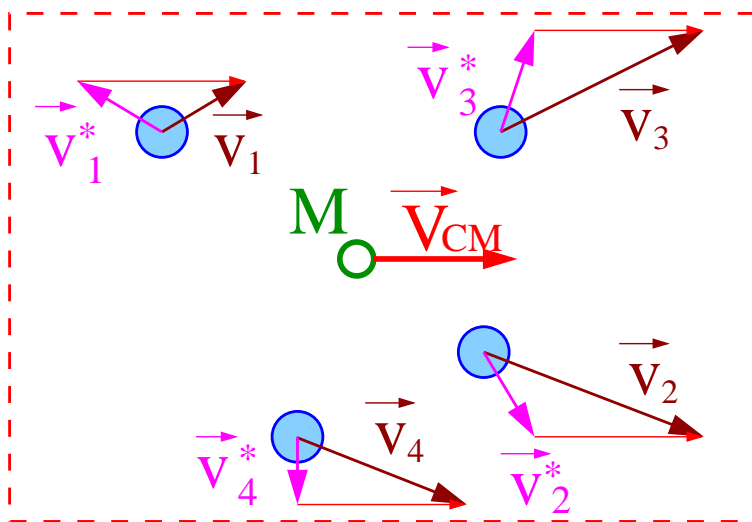
$$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

Układ środka masy

Energia układu

Transformacja prędkości:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}$$



Energia kinetyczna układu:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i |\vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}|^2}{2} \\ &= \sum_i \left(\frac{m_i (v_i^*)^2}{2} + 2 \frac{m_i \vec{v}_i^* \vec{V}_{CM}}{2} + \frac{m_i V_{CM}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Z zasady zachowania pędu:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^* \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM} \sum_i m_i \vec{v}_i^* = \vec{V}_{CM} \vec{P}^* = 0$$

Ostatecznie:

$$E_k = E_k^* + \frac{M V_{CM}^2}{2}$$

Energia kinetyczna układu jest sumą energii “wewnętrznej” (E_k^*) i energii kinetycznej układu jako całości.

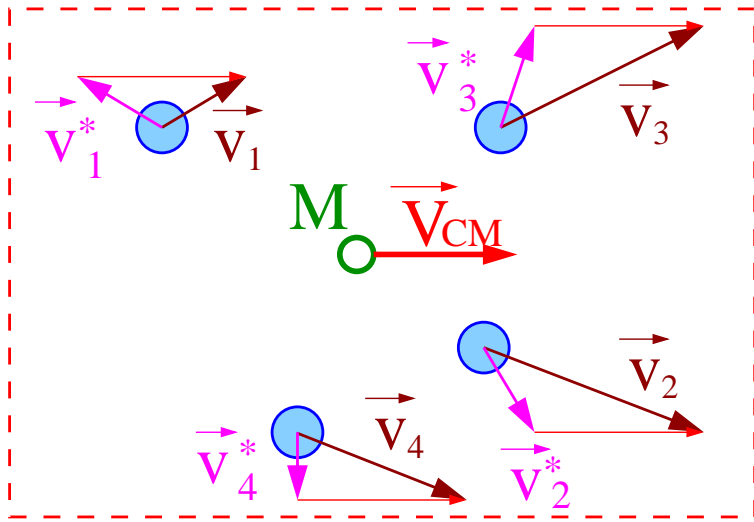
Układ środka masy

Moment pędu układu

Transformacja galileusza:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^* + \vec{R}_{CM}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}$$



Całkowity moment pędu względem początku układu

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^*) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^*) \\ &= \left[\sum_i m_i \right] \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i^* \\ &\quad + \left[\sum_i m_i \vec{r}_i^* \right] \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{v}_i^* \end{aligned}$$

Z definicji CMS: $\sum m_i \vec{v}_i^* = \sum m_i \vec{r}_i^* = 0$

⇒ otrzymujemy:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^*$$

Moment pędu układu jest sumą “wewnętrznego” momentu pędu (\vec{L}_{CM}^*) (względem CM) i momentu pędu układu jako całości.

Układ środka masy

Ruch środka masy

Dla układu izolowanego

$$\vec{P} = \text{const}$$

środek masy pozostaje w spoczynku
lub porusza się ruchem jednostajnym
prostoliniowym I Zasada Dynamiki

Pod działaniem sił zewnętrznych:

$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw}$$

zmiana pędu układu:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{zw} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}^{zw} \end{aligned}$$

II Zasada Dynamiki

W oparciu o pojęcie **środek masy** możemy opisać **ruch układu** jako całości
stosując równania ruchu **punktu materialnego**.

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Dla ciała, poruszającego się w polu sił centralnych, zachowana(y) jest
 A energia potencjalna B moment pędu C energia kinetyczna D pęd
2. Dla ciała, poruszającego się w polu sił zachowawczych, zachowana(y) jest
 A moment pędu B pęd C energia kinetyczna D energia całkowita
3. Ciało A spuszczone swobodnie z wysokości cztery razy większej niż ciało B : $h_A = 4h_B$. Uzyskane prędkości
 A $v_A = 2 v_B$ B $v_A = \sqrt{2} v_B$ C $v_A = 4 v_B$ D $v_A = 2\sqrt{2} v_B$
4. Pocisk uderza centralnie z prędkością \vec{v} w nieruchomą tarczę o takiej samej masie. Zakładając, że zderzenie jest elastyczne, prędkość pocisku po zderzeniu wyniesie
 A $\vec{v}' = -\vec{v}$ B $\vec{v}' = 0$ C $\vec{v}' = -\frac{1}{2}\vec{v}$ D $\vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{v}$
5. W zderzeniu sprężystym pocisku o masie m z nieruchomą tarczę o masie M suma kątów rozproszenia pocisku i tarczy była większa od 90° . Można na tej podstawie wnioskować, że
 A $m \gg M$ B $m > M$ C $m < M$ D $m \ll M$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego