



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Grawitacja

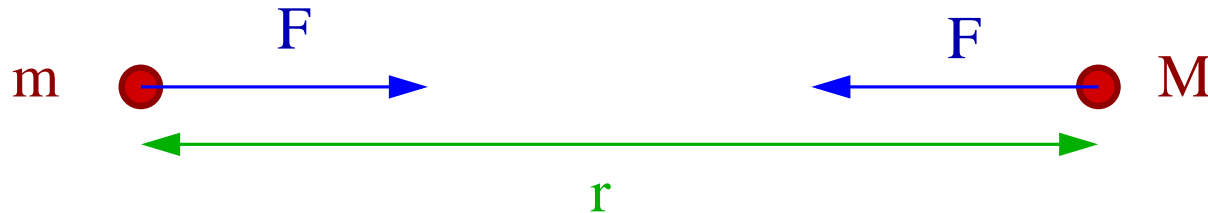
Fizyka I (Mechanika)

Wykład VIII:

- Prawo powszechnego ciążenia
- Ruch w polu siły centralnej
- Prawa Keplera
- Pole odpychające
- Doświadczenie Rutherforda
- Masa zredukowana

Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia **Newtona** (1687):

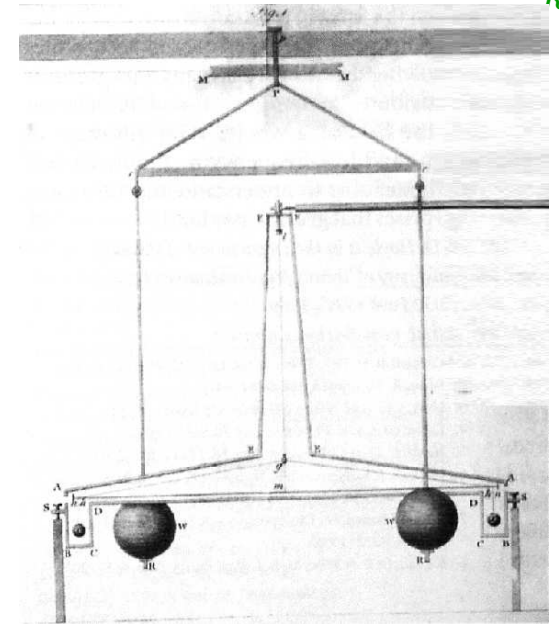
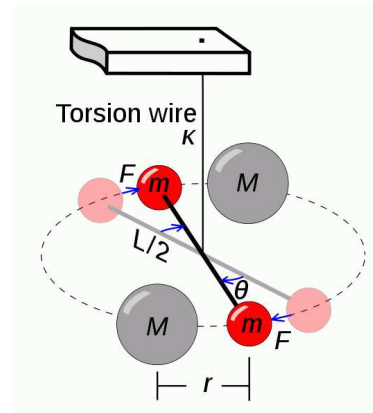


$$F = G \frac{m M}{r^2}$$

Opisuje zarówno spadanie jabłka z drzewa jak i ruchy Księżyca i planet.

Grawitacja jest opisywana przez jeden parametr, stałą Newtona: $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

W warunkach laboratoryjnych potwierdzona przez doświadczenie **Cavendisha** (1798), w którym zmierzył oddziaływanie kul ołowianych masach $m = 0.73 \text{ kg}$ i $M = 158 \text{ kg}$.

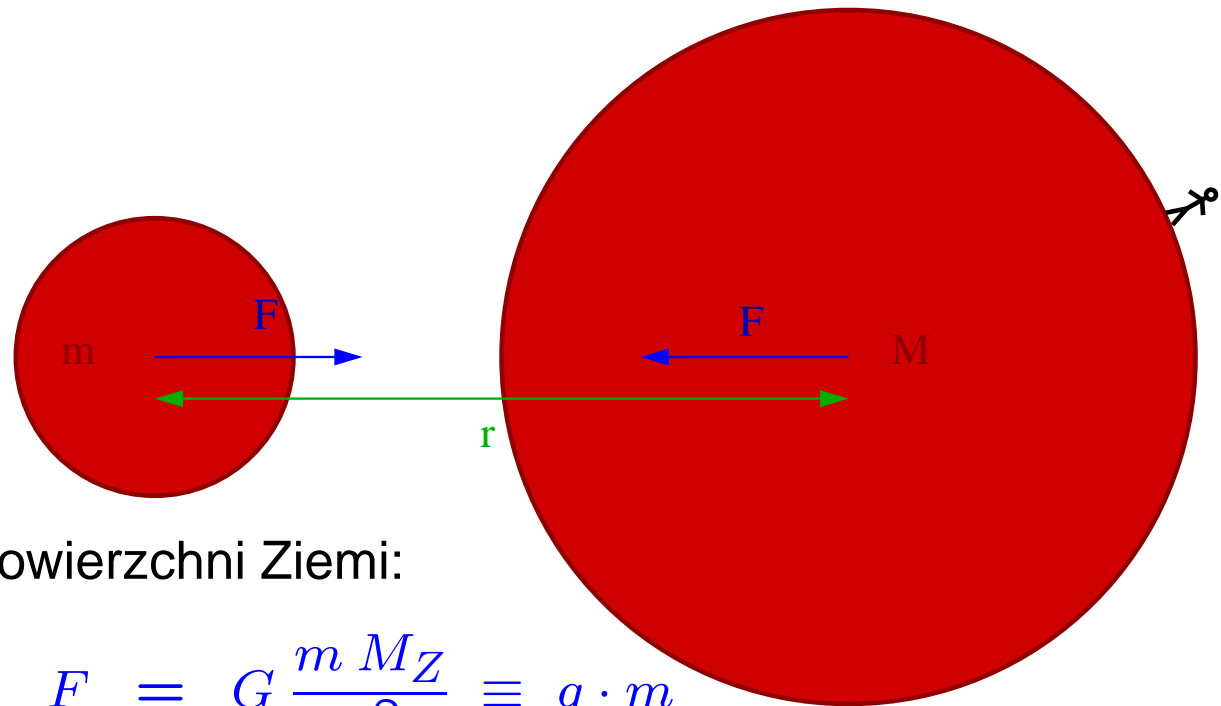


Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia sformułowane zostało dla mas punktowych.

Ale stosuje się także dla oddziaływań ciał sferycznie symetrycznych

$$F = G \frac{m M}{r^2}$$

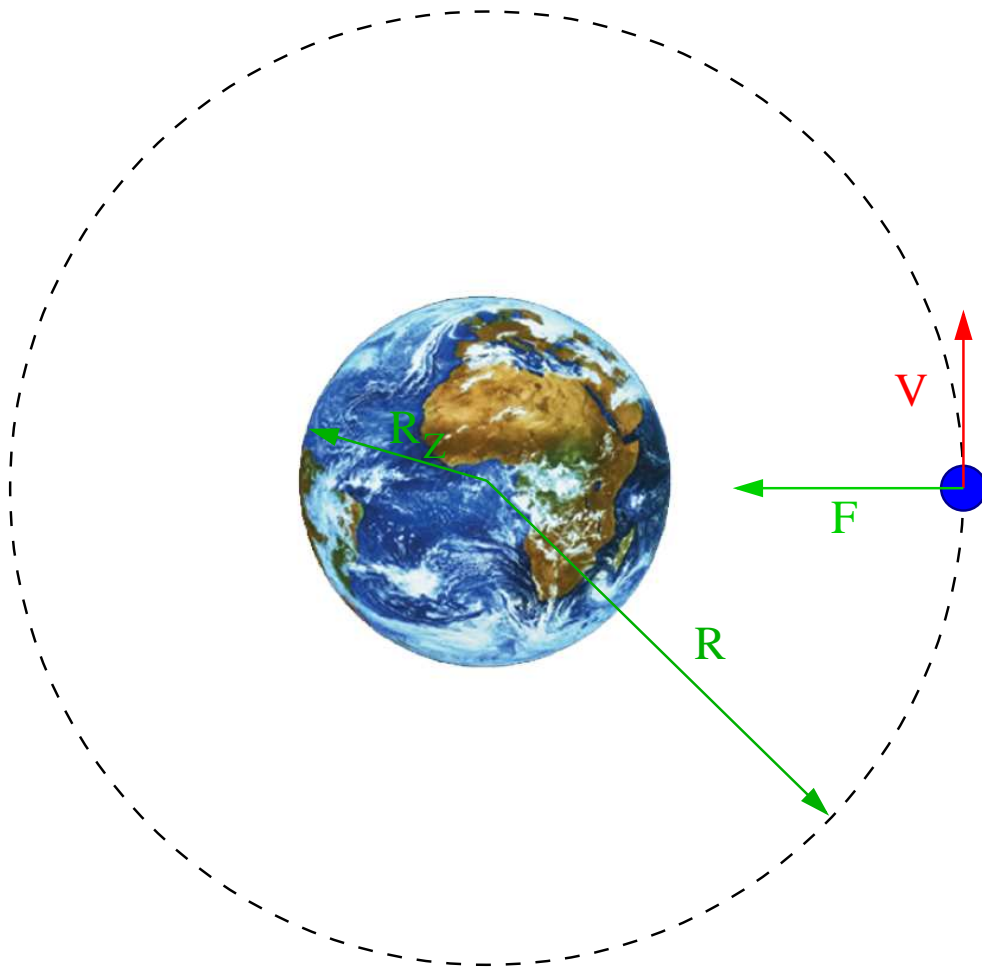


Siła ciążenia dla ciała przy powierzchni Ziemi:

$$F = G \frac{m M_Z}{R_Z^2} \equiv g \cdot m$$

$$\Rightarrow g = \frac{G M_Z}{R_Z^2}$$

Ruch satelity



Satelita na orbicie kołowej o promieniu R .
Siła grawitacji

$$F = G \frac{m M_Z}{R^2}$$

jest siłą dośrodkową, konieczną do utrzymania satelity na orbicie:

$$G \frac{m M_Z}{R^2} = m \frac{V^2}{R}$$
$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{G M_Z}{R}}$$

Pierwsza prędkość kosmiczna ($R = R_Z$):

$$V_1 = 7.91 \text{ km/s}$$

prędkość pozioma konieczna do “oderwania” od Ziemi (zaniedbując jej ruch wirowy)

Ruch satelity

Okres obiegu dookoła Ziemi:

$$T = \frac{2\pi R}{V}$$

Podstawiając wyrażenie na prędkość:

$$T = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{G M_Z}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{G M_Z}}$$

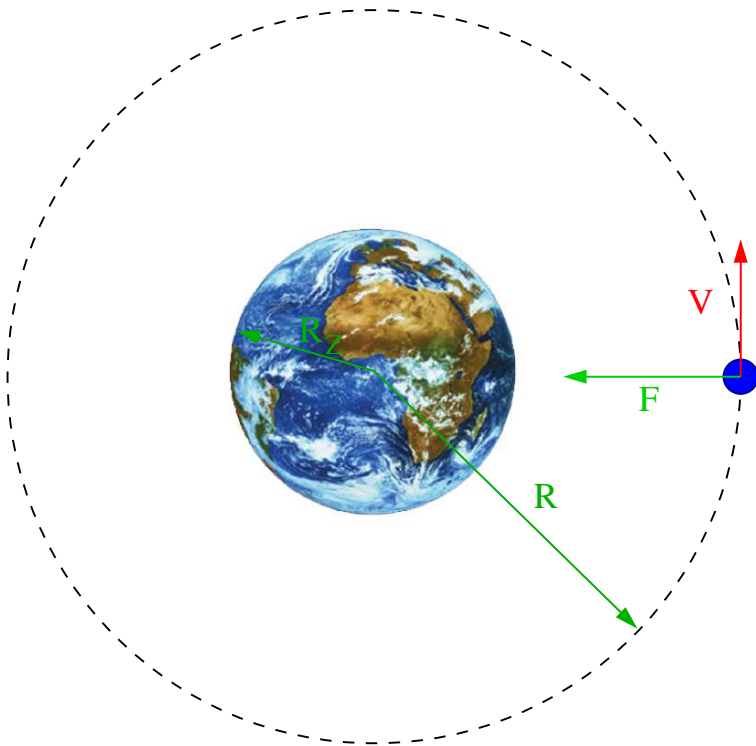
Im wyższa orbita tym dłuższy okres obiegu...

Odwracając tą zależność:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G M_Z T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{g R_Z^2 T^2}{4\pi^2}}$$

Dla okresu obiegu równego okresowi obrotu Ziemi ($23^h 56^m 4.09^s$):

$$R = 42\,164 \text{ km} \quad \text{satelita geostacjonarny}$$



Prawo powszechnego ciążenia

Siła grawitacji (jak każda siła centralna) jest zachowawcza:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} -F(r) \cdot dr = -\Delta E_p$$

$$\Rightarrow \Delta E_p = \int_{r_A}^{r_B} G \frac{M m}{r^2} \cdot dr = \left[-\frac{G M m}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

Energia potencjalna masy m w polu grawitacyjnym masy M :

$$E_p(r) = -\frac{G M m}{r} + C$$

określona z dokładnością do stałej.

Zwyczajowo przyjmuje się $C = 0$, co jest równoważne ustaleniu

$$E_p(\infty) = 0$$

Siła centralna

Rozważmy przypadek ogólny ruchu punktu materialnego o masie m

w polu centralnej siły zachowawczej $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$

⇒ zasada zachowania energii: $E = \frac{mv^2}{2} + E_p(r) = const$

⇒ zasada zachowania momentu pędu: $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = const$

Zachowanie momentu pędu ⇒ ruch płaski (w płaszczyźnie \vec{r} i \vec{v})

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{i}_r \cdot \frac{dr}{dt} + \vec{i}_\theta \cdot r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \omega^2$$
$$L = m r^2 \omega \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2$$

Wstawiając do wyrażenia na energię kinetyczną

$$E = E_k + E_p = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r) = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{eff}(r)$$

⇒ równanie różniczkowe dla składowej radialnej ⇒ problem jednowymiarowy

Siła centralna

Energia efektywna

“Efektywna” energia potencjalna w polu siły centralnej:

$$E_p^{eff}(r) = \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

“energia odśrodkowa”

Jeśli $L \neq 0$ to zasada **zachowania momentu pędu**

“przeciwstawia się” zbliżeniu ciała do źródła siły ($r = 0$).

bariera centryfugalna

“energia odśrodkowa” \Leftrightarrow siła odśrodkowa

$$F_o = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2 m r^2} \right) = \frac{L^2}{m r^3} = m r \omega^2 = m r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Siła centralna

Ruch radialny

Jednowymiarowe zagadnienie ruchu radialnego:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}$$

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r'))}}$$

$$E_p^{eff}(r) = \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

Ruch może się odbywać tylko w obszarze $E - E_p^{eff}(r) \geq 0$

⇒ dla $L \neq 0$ istnieje ograniczenie na odległość najmniejszego zbliżenia: $r \geq r_{min}$

teoretycznie można wymyśleć siłę centralną silniejszą od siły odśrodkowej

⇒ jeśli $E < E_p^{eff}(\infty)$ to ciało nie może dowolnie oddalić się od centrum siły: $r \leq r_{max}$

⇒ ruch w ograniczonym obszarze

Siła centralna

Ruch kątowy

Zachowany moment pędu: $L = m r^2 \omega$

$$\Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{L}{m r^2} dt'$$

Możemy wyprowadzić równanie na tor ciała porównując zależności od czasu:

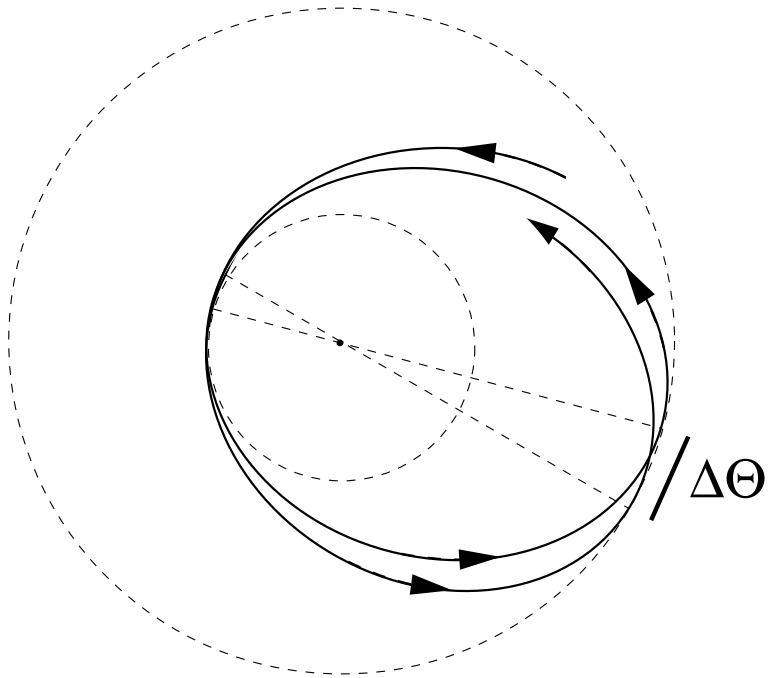
$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}} = \frac{m r^2}{L} d\theta$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \int \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}}$$

równanie toru we współrzędnych biegunowych

Siła centralna

Ruch kątowy



Zmiana kąta biegunowego przy przejściu ciała od r_{min} do r_{max}

$$\Delta\theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}}$$

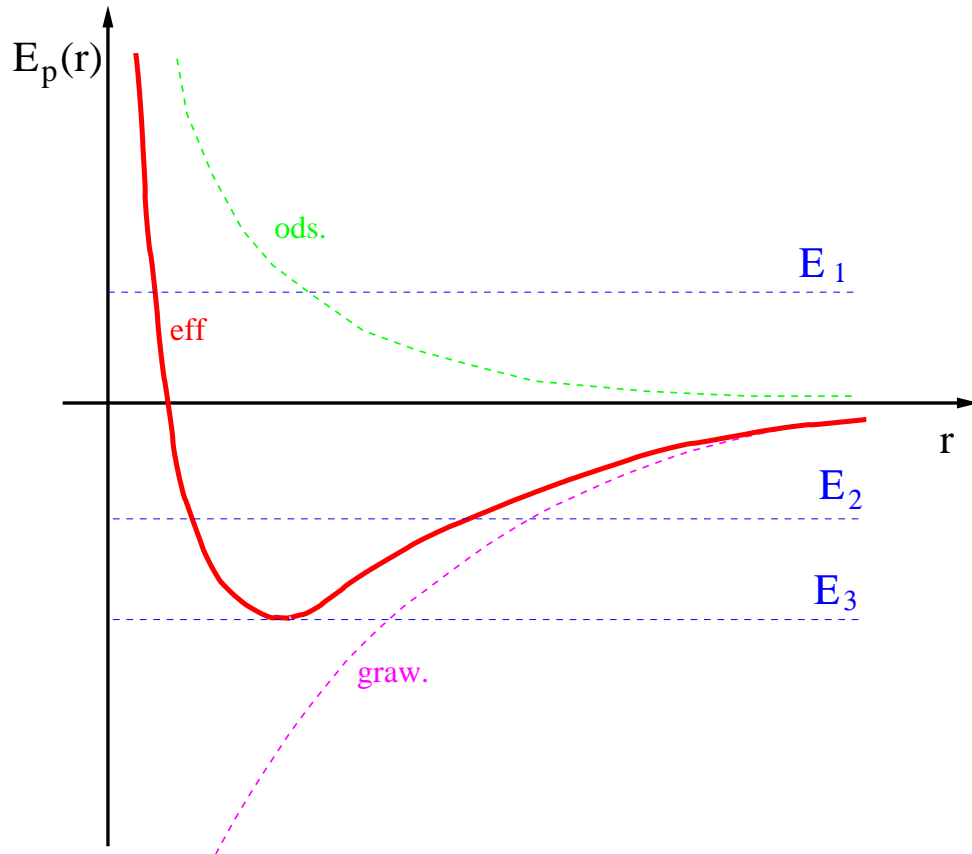
Tor będzie krzywą zamkniętą, jeśli $\Delta\theta = 2\pi \frac{m}{n}$
 m, n - liczby całkowite

Warunek ten spełniony jest tylko dla dwóch pól:
(niezależnie od warunków początkowych)

- $E_p(r) \sim \frac{1}{r}$ - siła grawitacyjna, siła kulombowska
($\Delta\theta = \pi$)
- $E_p(r) \sim r^2$ - siły sprężystości ($\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$)

Ruch w polu grawitacyjnym

energia efektywna



Pole grawitacyjne

Ogólne wyrażenie na energię potencjalną:

$$E_p(r) = -\frac{k}{r}$$

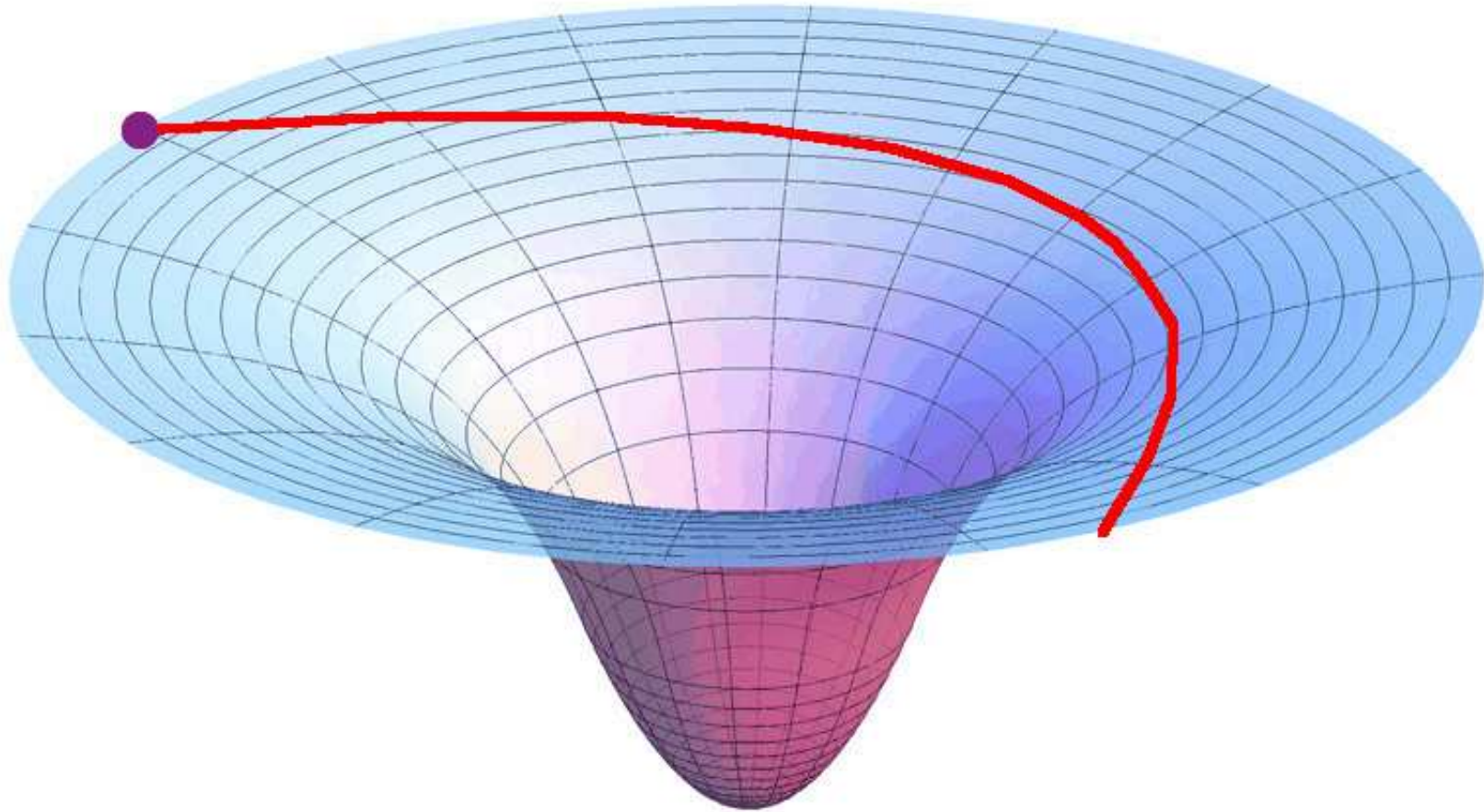
$k > 0 \Rightarrow$ siła przyciągająca
wybieramy $E_p(\infty) = 0$

Charakter ruchu zależy od energii całkowitej:

- $E_1 > 0$ - tor otwarty
- $E_2 < 0$ - tor zamknięty
- $E_3 = E_{min}$ - ruch po okręgu

Ruch w polu grawitacyjnym

Model



Dwuwymiarowy ruch ciała po zakrzywionej powierzchni.

Profil wysokości odpowiada energii potencjalnej pola: $h(x, y) \sim E_p(r)$

Ruch w polu grawitacyjnym

Równanie toru

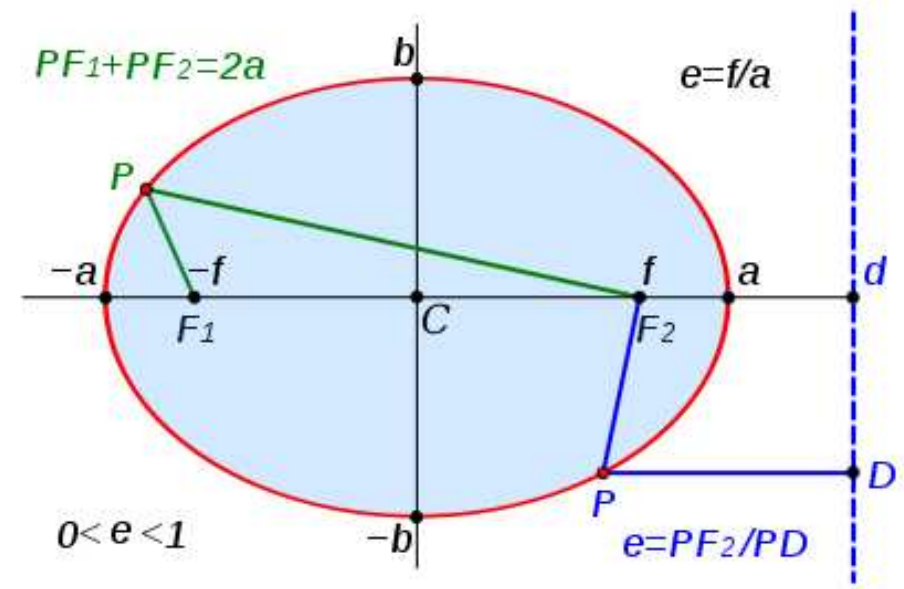
Rozwiązaniem są tzw. **krzywe stożkowe** postaci (we współrzędnych biegunowych)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

ε - mimośród orbity

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \quad p = \frac{L^2}{mk}$$

- $\varepsilon = 0$ - ruch po **okręgu** o promieniu p
- $\varepsilon < 1$ - ruch po **elipsie** $E < 0$
- $\varepsilon = 1$ - ruch po **paraboli** $E = 0$
- $\varepsilon > 1$ - ruch po **hiperboli** $E > 0$

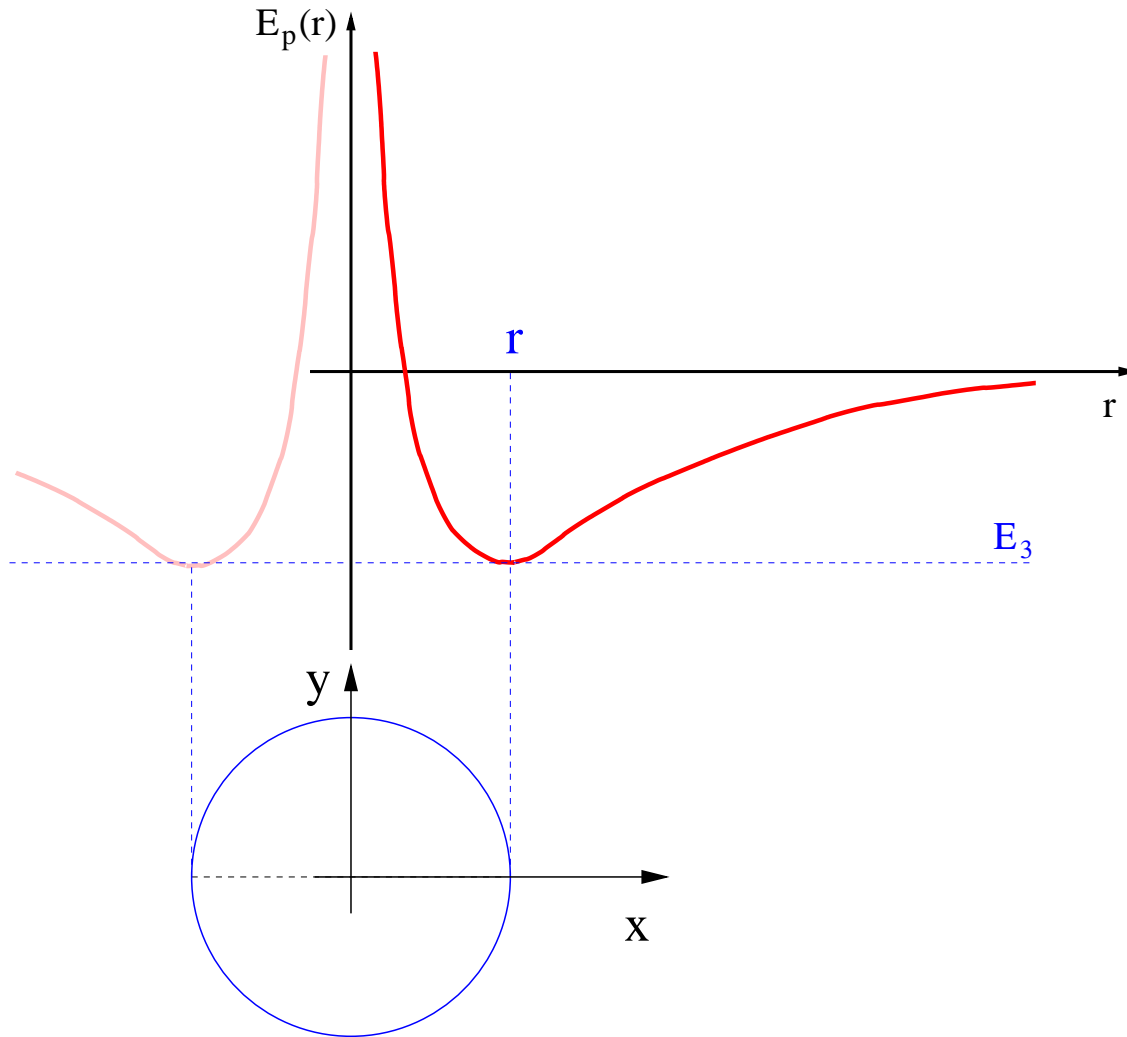


Osie elipsy:

- $2a = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$
- zależy tylko od energii
- $2b = \frac{2p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$
- zależy także od momentu pędu

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po okręgu



Przypadek szczególny: $\varepsilon = 0$

$$E = E_{min} = -\frac{m k^2}{2 L^2}$$

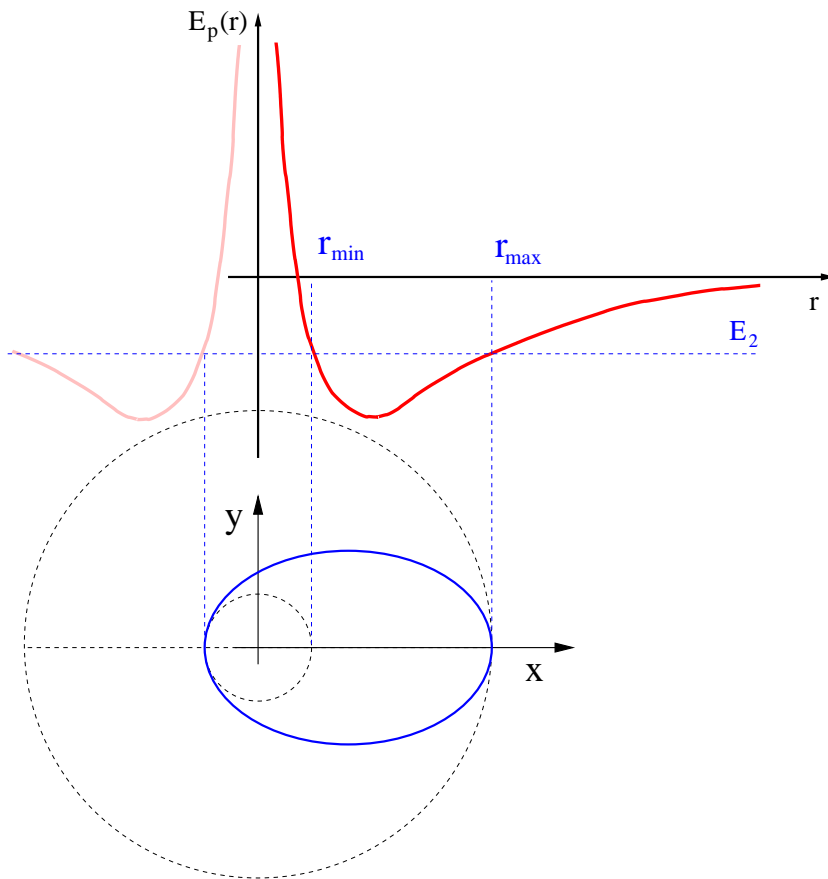
minimalna energia całkowita
przy ustalonym L

Inny przypadek szczególny:

Dla $L = 0$ mamy ruch po odcinku
o długości $2a = \frac{k}{2|E|}$; $b = 0$

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po elipsie

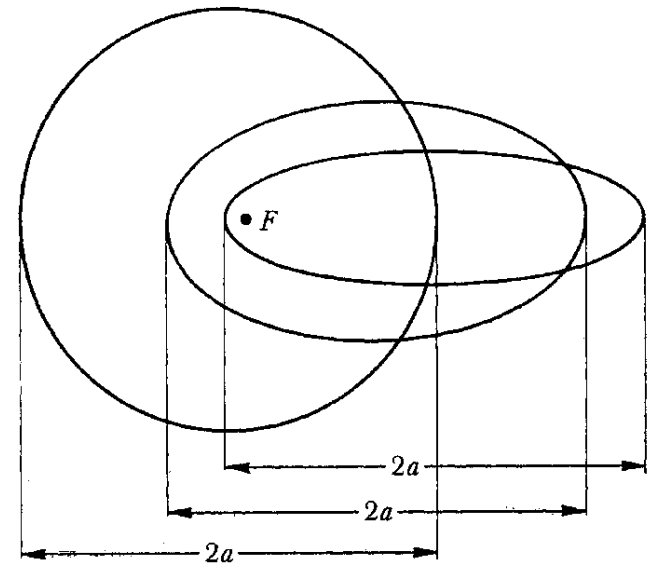


Warunek: $E_{min} < E < 0$

Ruch ograniczony do: $r_{min} < r < r_{max}$
 $E_p^{eff}(r_{min}) = E_p^{eff}(r_{max}) = E$

Źródło siły znajduje się w jednym z ognisk elipsy.

Długa półoś zależy wyłącznie od energii;
“spłaszczenie” zależy od momentu pędu



Ruch w polu grawitacyjnym

Prawa Keplera

- I. Każda planeta krąży po elipsie ze Słońcem w jednym z jej ognisk
- II. Promień wodzący każdej planety zakreśla równe pola w równych czasach
- III. Kwadrat okresu obiegu każdej planety wokół Słońca jest proporcjonalny do sześciangu półosi wielkiej elipsy

Okres obiegu możemy wyznaczyć z prędkości polowej $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$, $2a = \frac{k}{2|E|}$, $2b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$

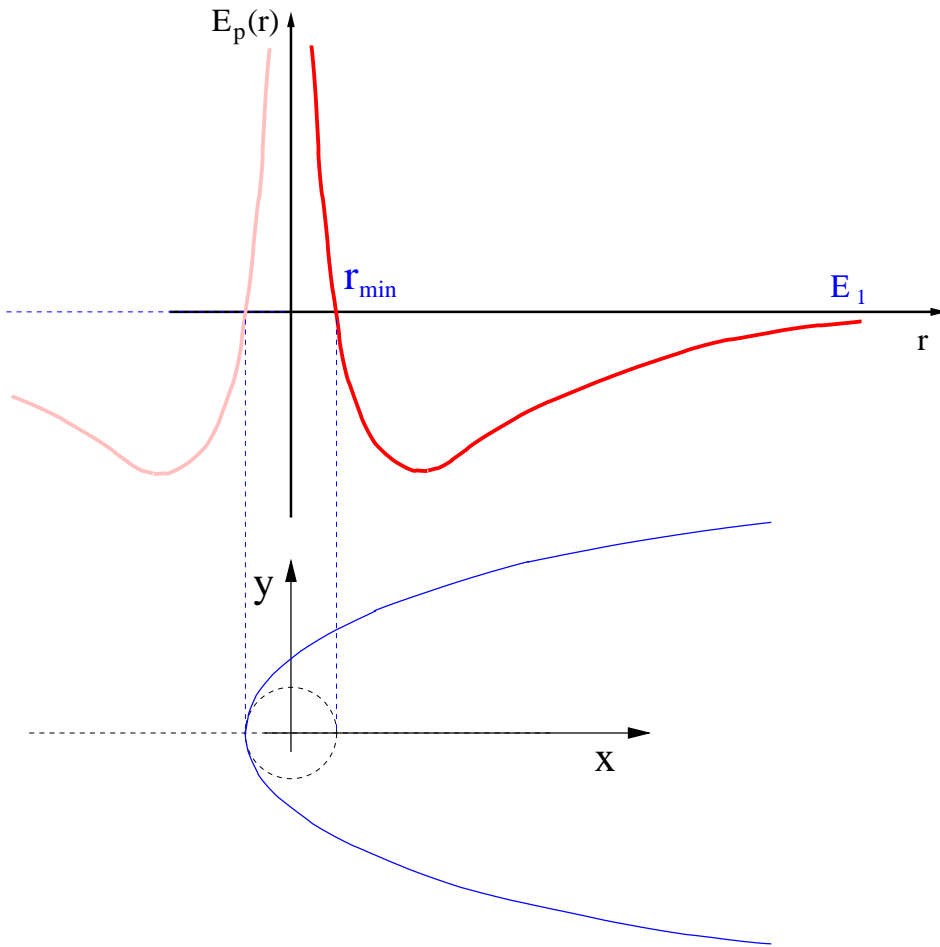
$$T = \frac{S}{\left(\frac{dS}{dt}\right)} = \frac{\pi a b}{\frac{L}{2m}} = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Podnosząc do kwadratu

$$T^2 = \frac{\pi^2 k^2 m}{2|E|^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} \cdot a^3$$

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po paraboli



Przypadek szczególny: $E = 0$

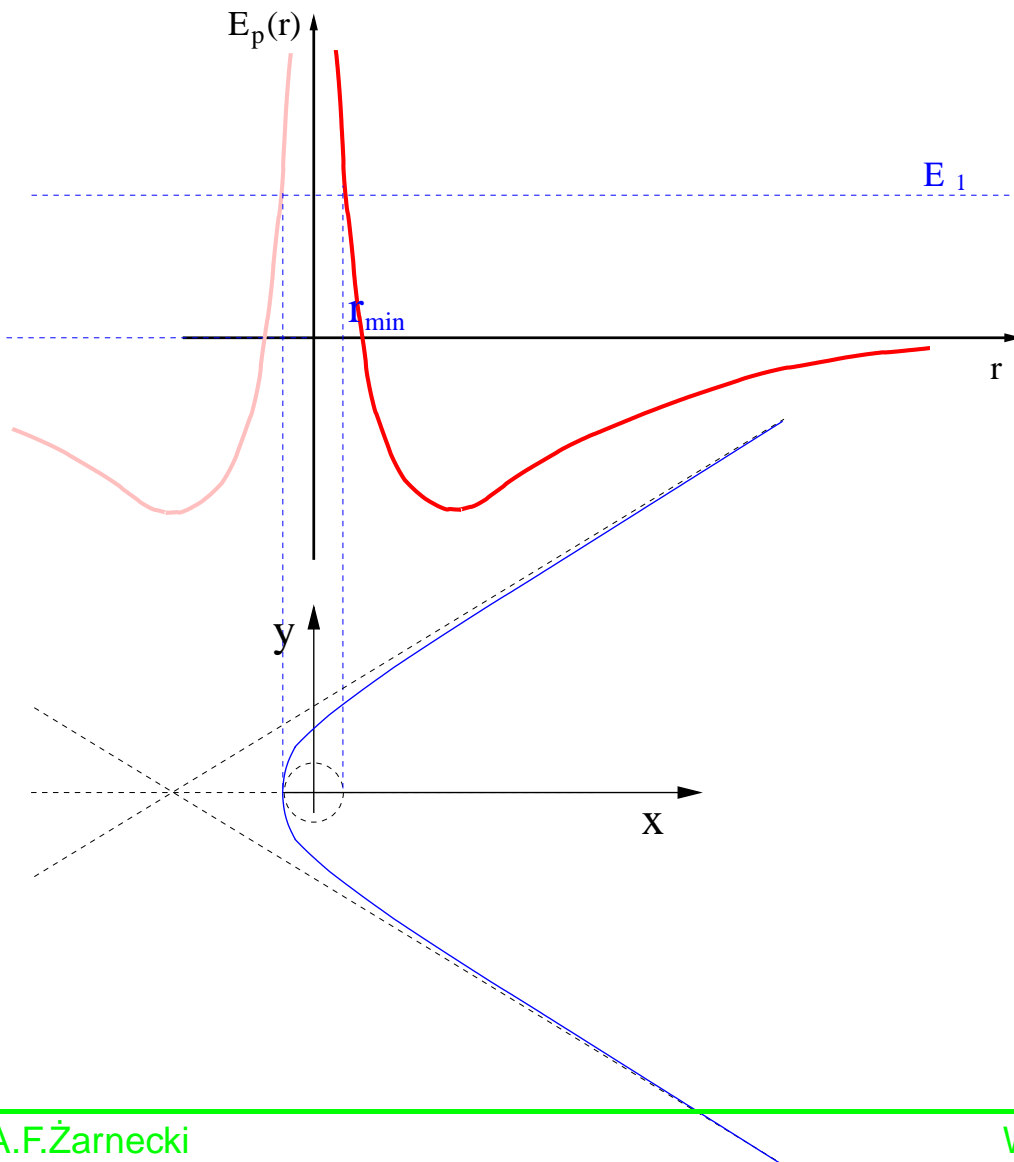
Ruch jest nieskończony,
ciało nie jest związane przez centrum siły.

Jednak oddalając się do nieskończoności
ciało będzie poruszać się coraz wolniej.

Asymptotycznie zatrzyma się.

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po hiperboli



Dla $E > 0$

Ruch jest nieskończony.

Asymptotycznie prędkość ciała dąży do

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2E}{m}} > 0$$

orbity komet nieperiodycznych

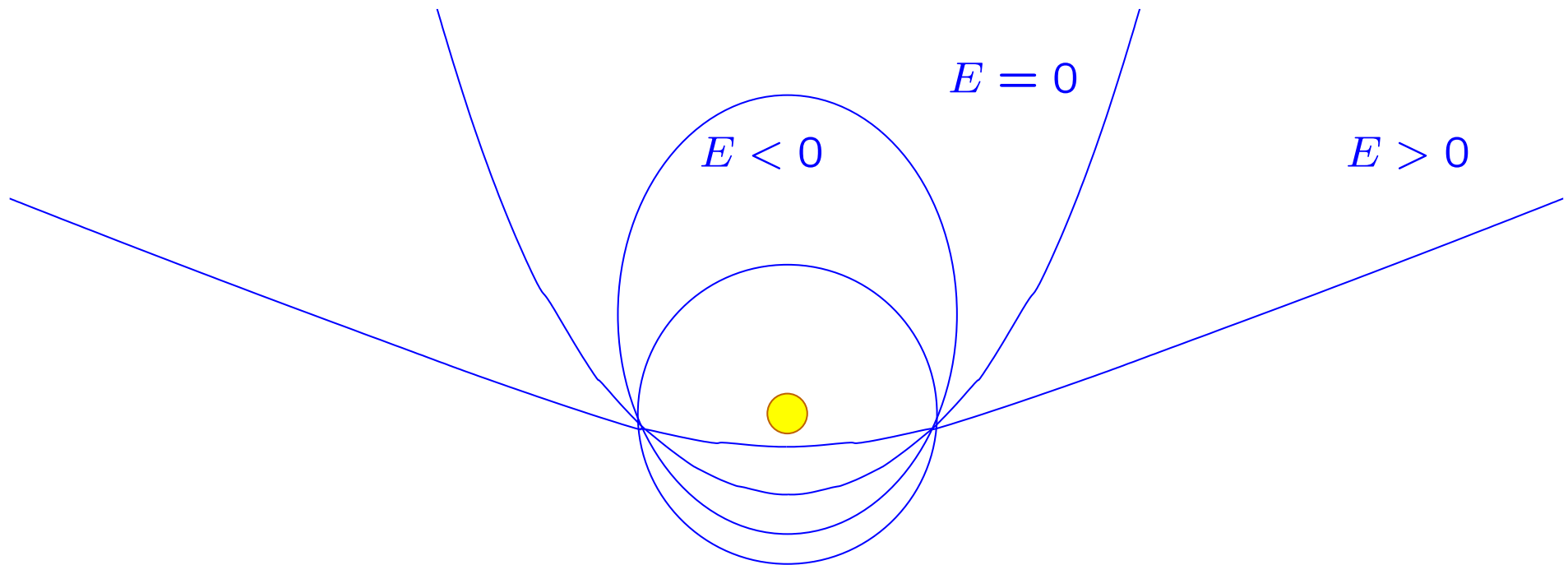
Im mniejsze L
tym mniejsza odległość zbliżenia r_{min}

Ruch w polu grawitacyjnym

Rodzaje orbit

Kształt orbity zależy od energii całkowitej E i momentu pędu ciała L

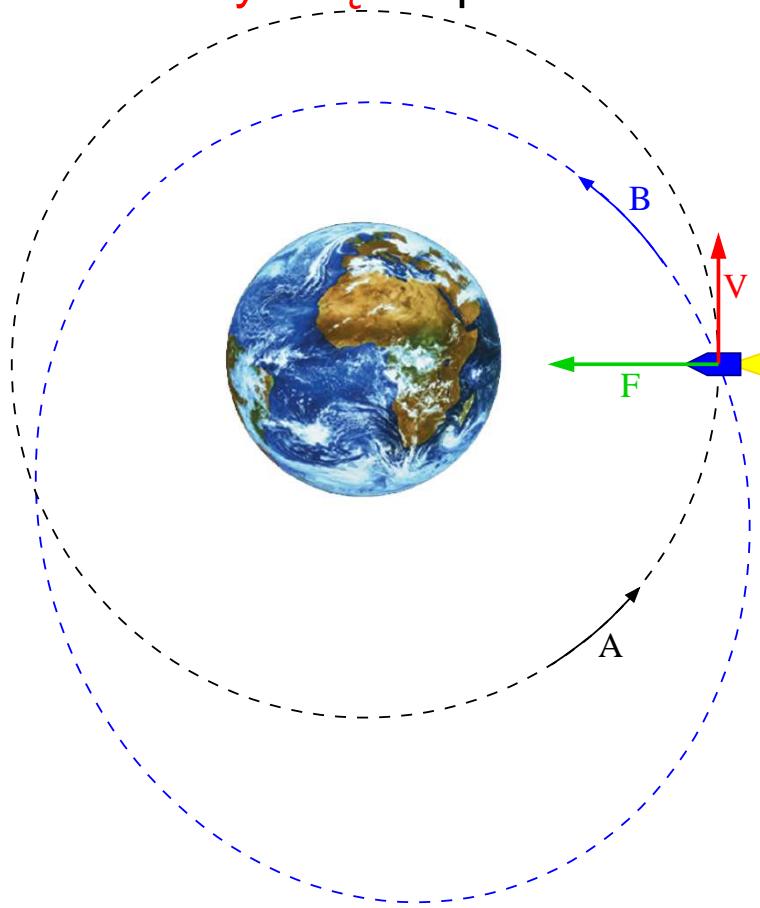
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$



Orbity o tej samej wartości L , lecz o różnych wartościach E

Ruch satelity

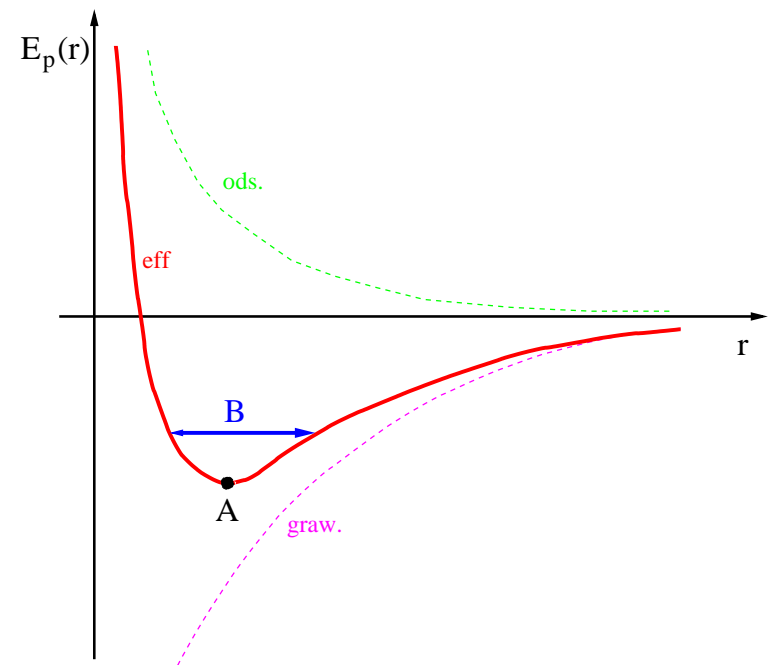
Jak powinien się zachować kosmonauta w rakiecie na orbicie kołowej, jeśli chce zbliżyć się do powierzchni Ziemi?



Odpalenie silników w kierunku Ziemi daje efekt przeciwny do zamierzonego!

$L = const$, E rośnie

\Rightarrow Średnia odległość od Ziemi rośnie!

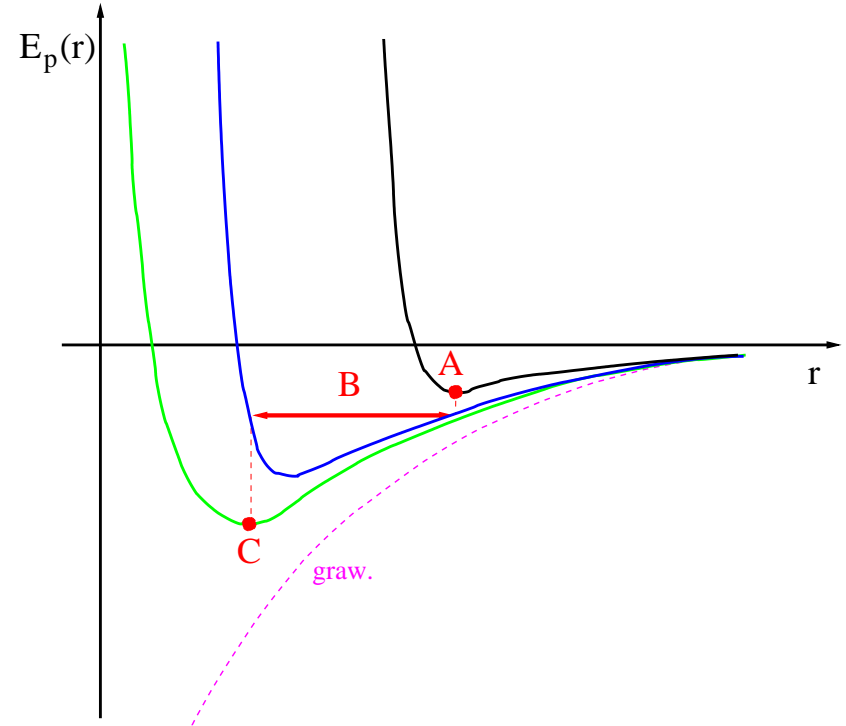
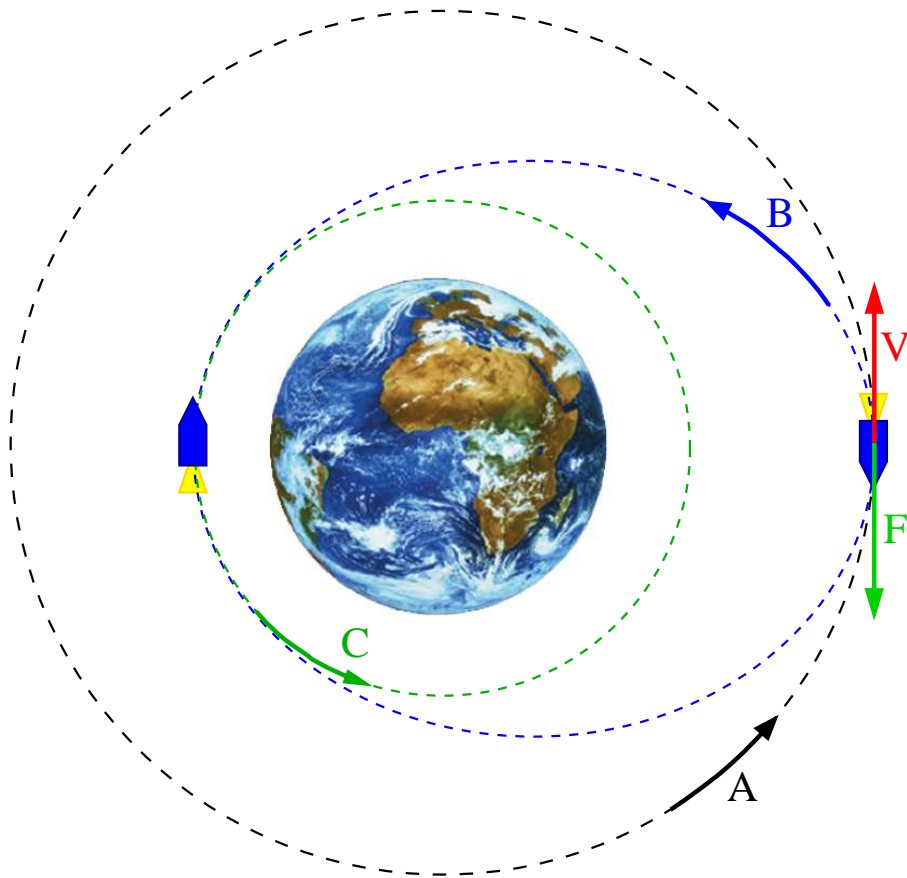


Ruch satelity

Lepszym sposobem na przejście na niższą orbitę jest włączenie silników **hamujących**

L maleje, *E* maleje

⇒ Średnia odległość od Ziemi maleje



Powtórne hamowanie po połowie obiegu umożliwia przejście na niższą orbitę kołową.

Ruch w polu sił

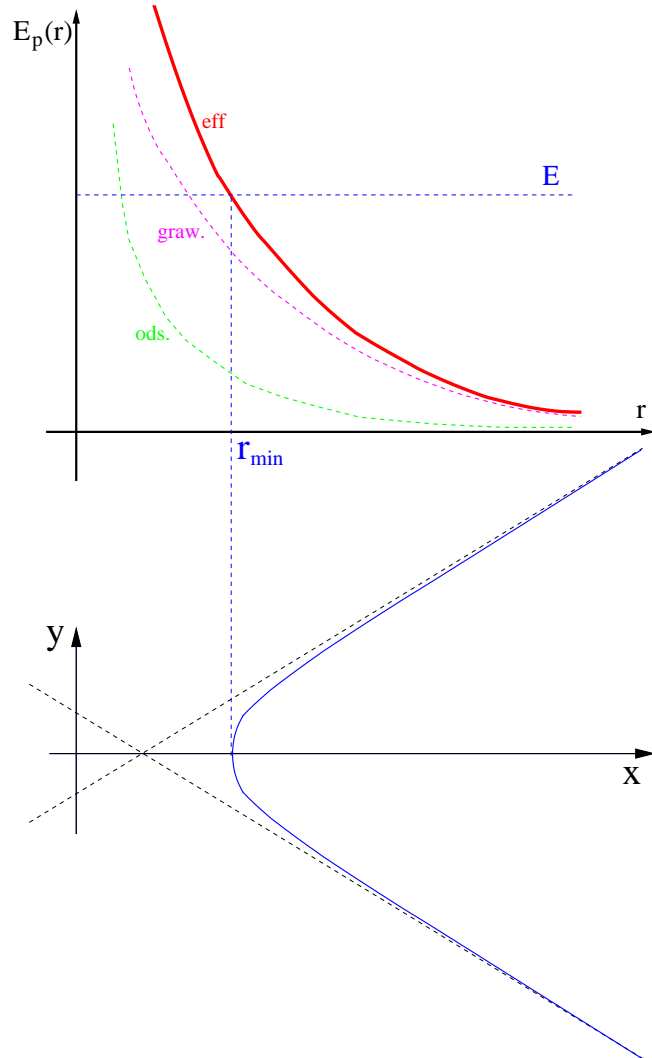
Potencjał odpychający

$$E_p(r) = +\frac{k}{r} \quad k > 0$$



Ruch w polu sił

Potencjał odpychający



Uzyskane rozwiązanie pozostaje słuszne, z dokładnością do zmiany znaku $k \Rightarrow$ zmiana znaku p

$$r(\theta) = \frac{p}{\varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

Jak poprzednio $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

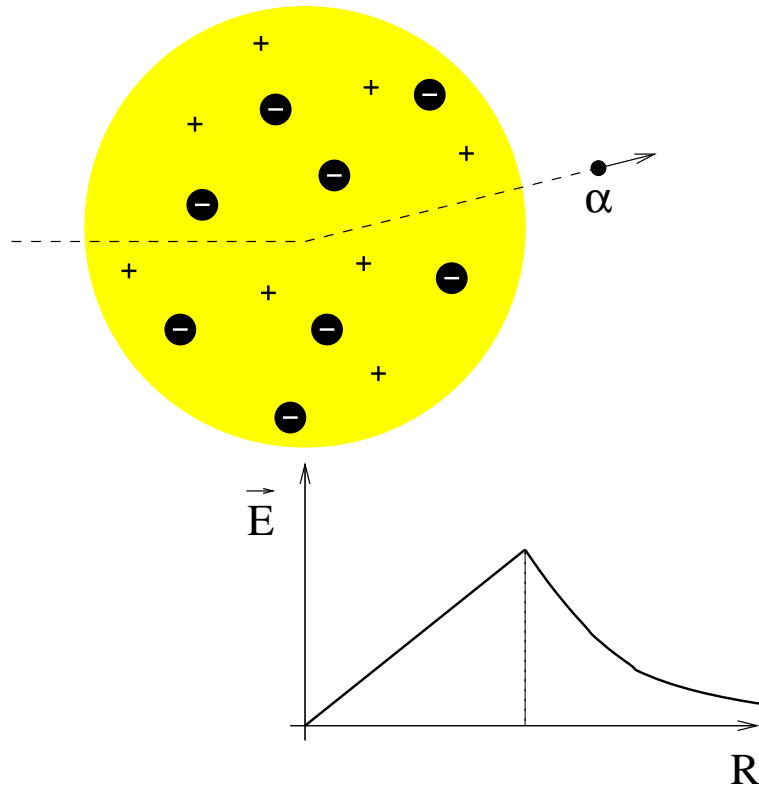
Teraz jednak zawsze $E > 0$

Im większe ε , tym większy kąt rozwarcia hiperboli

Doświadczenie Rutherforda

Model Thomson

Po odkryciu elektronu (1897), J.J.Thomson zaproponował model atomu w postaci “ciastka z rodzynkami”.



Cała **objętość** atomu była jednorodnie **naładowana dodatnio** (“ciastko”), a wewnątrz “pływały” **elektrony** (“rodzynki”).

Ponieważ ładunek był rozłożony **równomiernie** w dużej objętości, nie powinien silnie zakłócać ruchu przechodzący cząstek α .

Oczekujemy jedynie niewielkich odchyień toru...

Wpływ elektronów można zaniedbać ze względu na małą masę.

Doświadczenie Rutherforda

W modelu Thomsona można było oszacować maksymalny kąt rozproszenia cząstki α i był on mały $\theta^{max} \ll \pi$.

Odpowiada to sytuacji rozproszenia “pocisku” na dużo lżejszej “tarczy”.

Masa przypadająca na jednostkę “rozmytego” ładunku atomu wynosiła ok. $\frac{1}{8}$ masy cząstki α .

Doświadczenie Rutherforda

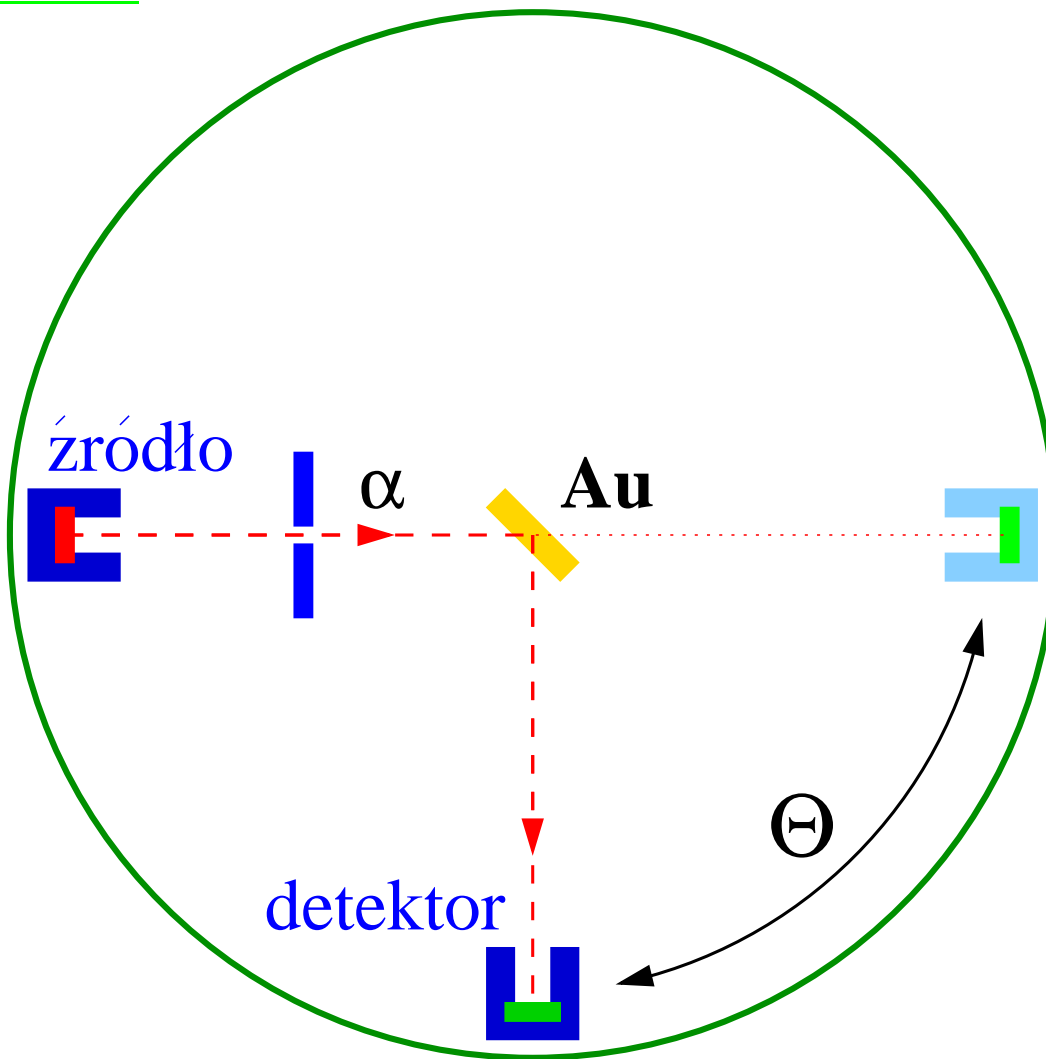
Rozpraszanie cząstek α na cienkiej złotej folii



Obserwowano błyski wywoływane przez padające cząstki na ekranie scyntylacyjnym

Doświadczenie Rutherforda

Pokaz



Przed wsunięciem tarczy cząstki α obserwujemy tylko dla $\Theta \approx 0$.

Wiązka cząstek ze źródła jest dobrze skolimowana.

Oddziaływanie z tarczą zmniejsza strumień cząstek lecących “do przodu” ($\Theta \approx 0$)

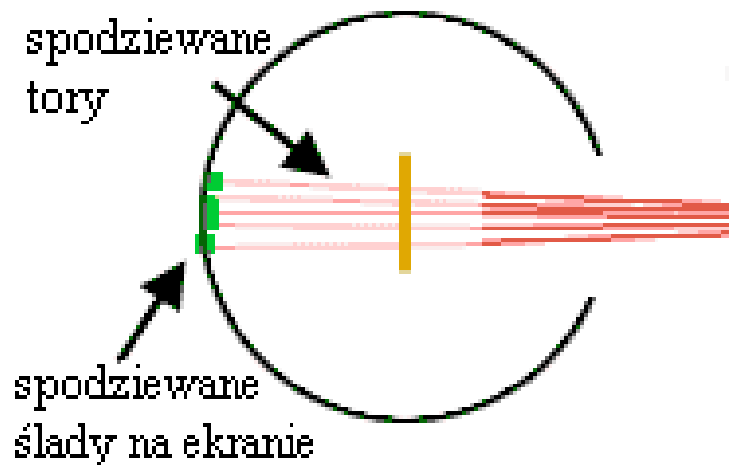
Rozproszone cząstki α obserwujemy w szerokim zakresie kątów rozproszenia, także dla $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

Doświadczenie Rutherforda

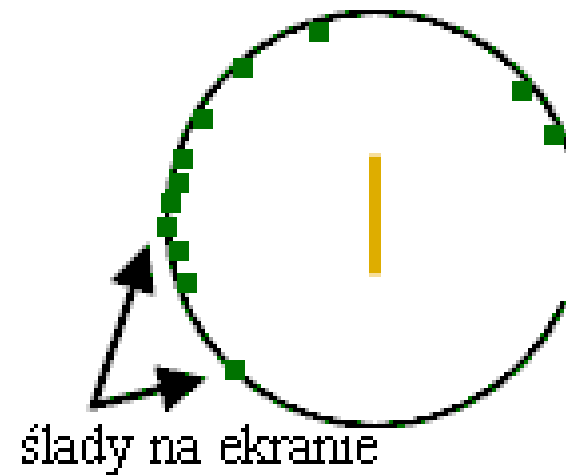
Wyniki pomiarów

Przeprowadzonych przez H.Geigera i E.Marsdena (1911):

Oczekiwane



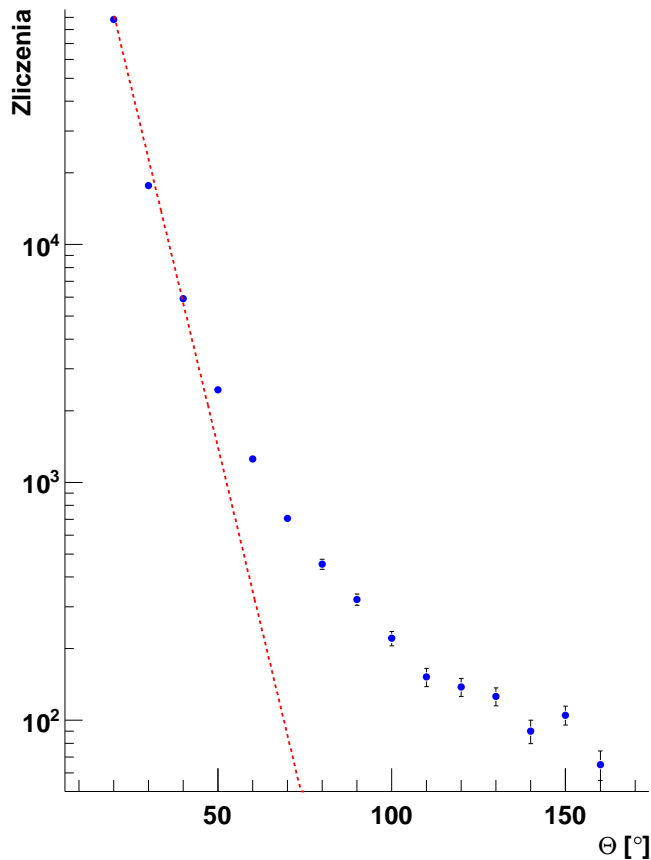
Uzyskane



Doświadczenie Rutherforda

Wyniki pomiarów

Przeprowadzonych przez
H.Geigera i E.Marsdena:



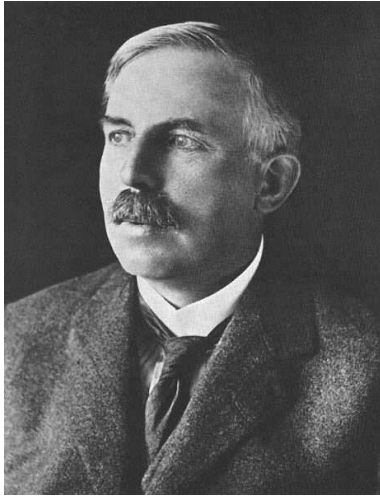
Zaobserwowano rozproszenia cząstek α pod bardzo dużymi kątami, $\theta \gg \theta_{Th}^{max}$, czego nie można było wyjaśnić w modelu Thomsona

“To było tak jakbyście wystrzelili piętnastocalowy pocisk w kierunku kawałka bibułki, a on odbił się i was uderzył.”

E. Rutherford

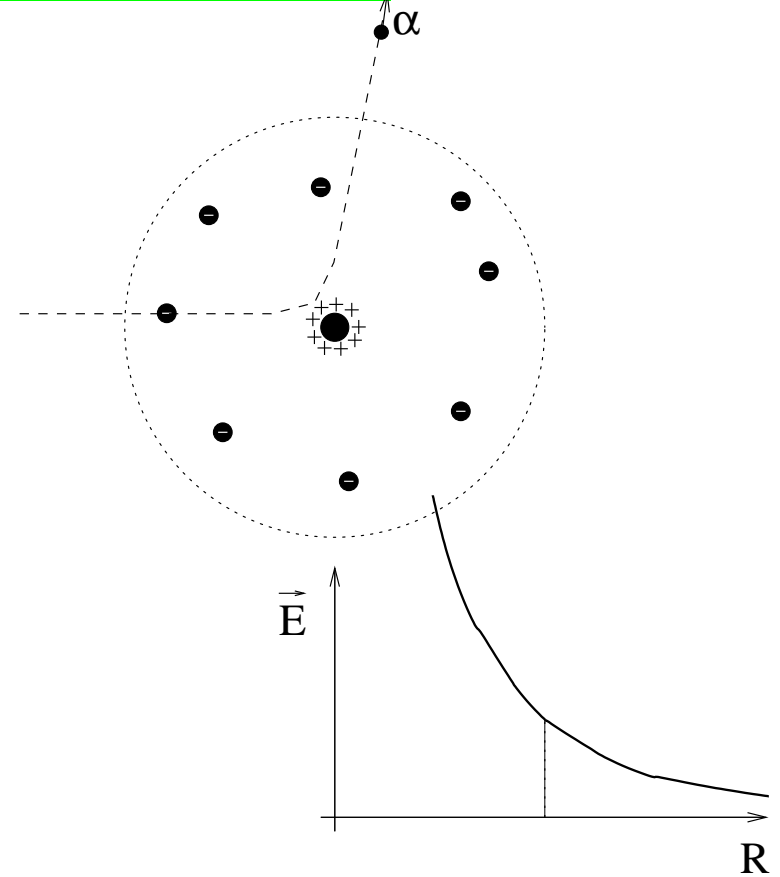
Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda



Rutherford zaproponował
jądrowy model atomu.

Cały dodatni ładunek atomu (10^{-10} m)
skupiony jest w praktycznie **punktowym**
(10^{-14} m) **jądrze**



Przechodząca cząstka zawsze czuje cały
ładunek dodatni \Rightarrow kąty rozproszenia są
dużo większe.

Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda

Ponieważ cząstka α rozprasza się na jądrze jako całości, a masa jądra $M_{Au} \gg M_{\alpha}$

⇒ brak ograniczeń na kąt rozproszenia cząstki α

możliwe nawet (choć mało prawdopodobne) rozproszenie o $\theta > \pi/2$.

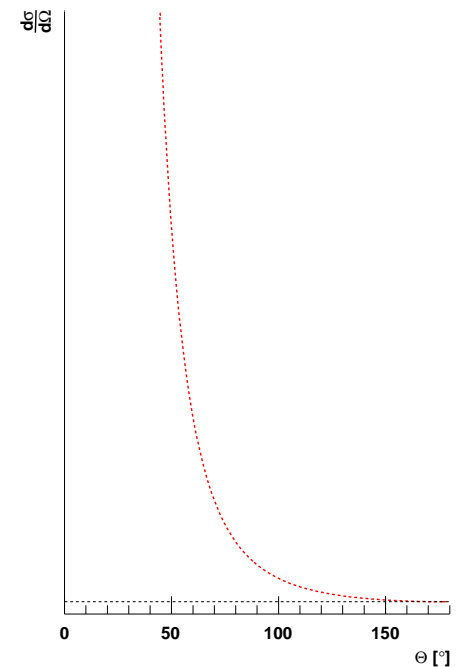
Rozkład kątowy

Obserwowany rozkład kątowy rozproszonych cząstek α
proporcjonalna do tzw. różniczkowego przekroju czynnego

$$N(\theta) \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Wzór Rutherforda

Skończone prawdopodobieństwo rozproszenia $\theta = \pi$!



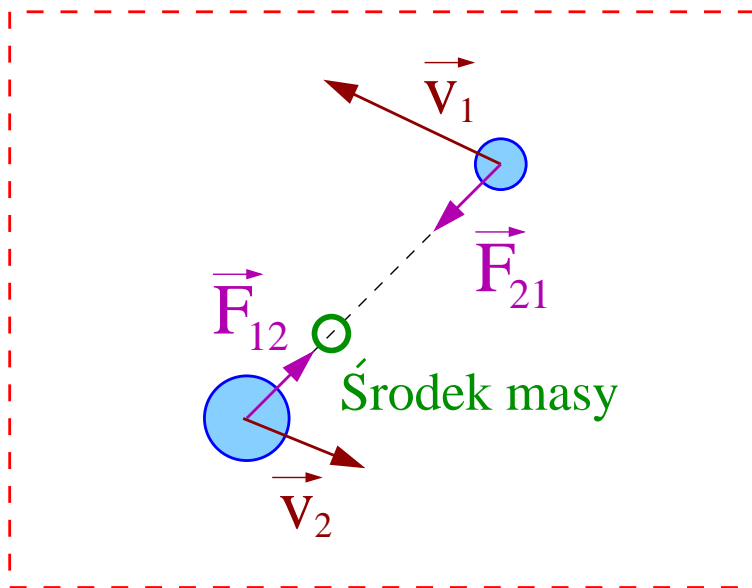
Oddziaływanie dwóch ciał

Ruch względny

Dotychczasowe rozważania prowadziliśmy przyjmując, że centrum siły jest nieruchome. Odpowiada to założeniu, że

$$M_{S\text{lonca}} \gg M_{Ziemi} \quad \text{lub} \quad M_{Ziemi} \gg M_{S\text{atelity}}$$

Układ izolowany + III zasada dynamiki $\Rightarrow m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$



Względne położenie (np. ciała 2 względem 1):

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Względna prędkość:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt}$$

Przyspieszenie względne:

$$\vec{a}_{12} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \frac{m_2}{m_1} \vec{a}_2$$

Oddziaływanie dwóch ciał

Masa zredukowana

Przyspieszenie w ruchu względnym:

$$\vec{a}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{a}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{\vec{F}_{12}}{m_2}$$

Możemy sprowadzić równania ruchu do postaci:

$$\mu \vec{a}_{12} = \mu \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$$

gdzie $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - masa zredukowana $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

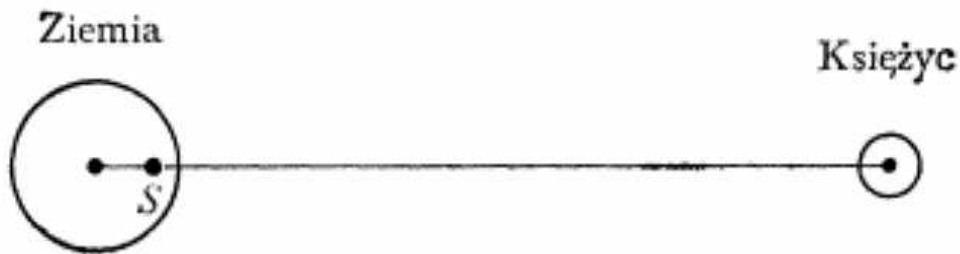
Problem względnego ruchu dwóch oddziałujących ciał możemy sprowadzić do problemu ruchu jednego ciała o masie μ w polu siły $\vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$

Ściśle w przypadku klasycznym (nierelatywistycznym) dla układu izolowanego.

Prawa Keplera pozostają słuszne także gdy nie zaniedbujemy masy planety/satelity!

Oddziaływanie dwóch ciał

Przykład



Układ Ziemia-Księżyc

$$m_K : m_Z \approx 1 : 81$$

$$\mu \approx 0.988 m_K$$

Ziemia i Księżyc krążą wokół wspólnego środka masy, który znajduje się ok. 4700 km od środka Ziemi.

Częstość obiegu jest $\sqrt{\frac{m_K}{\mu}}$ raza większa niż gdyby Ziemia była “nieruchoma” (0.6%)

przy danych masach i odległości Ziemia-Księżyc : $\mu \omega^2 r_{12} = F(r_{12})$

Ruch Ziemi dookoła Słońca: $m_Z : m_S \approx 1 : 335\,000$

Ruch w polu grawitacyjnym

Uzupełnienie

Rozwiązanie równania toru dla pola grawitacyjnego: $E_p(r) = -\frac{k}{r}$

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \int \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}} = \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2m}{L^2} \left(E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}}\end{aligned}$$

Gdzie wprowadziliśmy parametry: $p = \frac{L^2}{mk}$ oraz $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

Otrzymaliśmy całkę postaci:

$$- \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos(x) \quad \implies \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Pierwsza prędkość kosmiczna to prędkość przy której ciało
 A może wejść na orbitę dookoła Słońca B krąży na orbicie geostacjonarnej
 C porusza się tuż nad powierzchnią Ziemi D może odlecieć do nieskończoności
2. W centralnym polu grawitacyjnym, najwyższym wartościom energii całkowitej odpowiada ruch po
 A okręgu B hiperboli C elipsie D paraboli
3. Satelita krąży na orbicie kołowej. Po włączeniu na krótki czas silników hamujących przejdzie na orbitę
 A paraboliczną B hiperboliczną C eliptyczną D kołową o mniejszym promieniu
4. Satelita krąży po orbicie eliptycznej takiej, że jego najmniejsza i największa odległość od Ziemi $r_{apo} = 4r_{per}$. Prędkości satelity w tych punktach
 A $v_{apo} = \frac{1}{2} v_{per}$ B $v_{apo} = 2 v_{per}$ C $v_{apo} = \frac{1}{4} v_{per}$ D $v_{apo} = 4 v_{per}$
5. Maksymalny kąt rozproszenia cząstek α na jądrach Au (doświadczenie Rutherforda) wynosi
 A 2π B $\pi/4$ C π D $\pi/2$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego