



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Mechanika ośrodków ciągłych

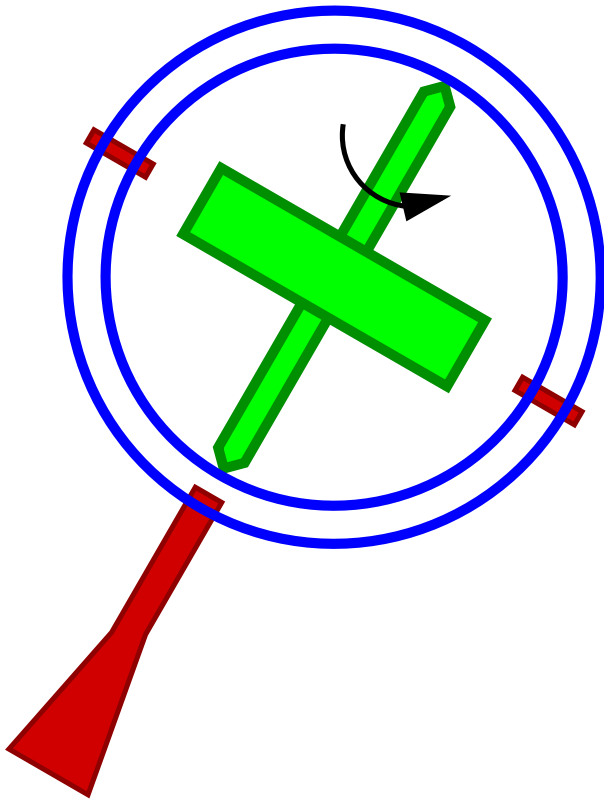
Fizyka I (Mechanika)

Wykład X:

- Bryła sztywna
 - precesja
 - tensor momentu bezwładności
- Statyka cieczy
- Prawo Bernoulliego
- Opory ośrodka

Żyroskop

Efekt żyroskopowy



Zasada zachowania momentu pędu

Jeśli poprzez specjalne zamocowanie zapewnimy **znikanie momentów sił** to **kierunek** momentu pędu pozostanie **stały** niezależnie od działających sił zewnętrznych i ruchu postępowego

⇒ efekt żyroskopowy

Momenty działających sił są równe zero

⇒ moment pędu jest stały

⇒ orientacja osi obrotu jest stała

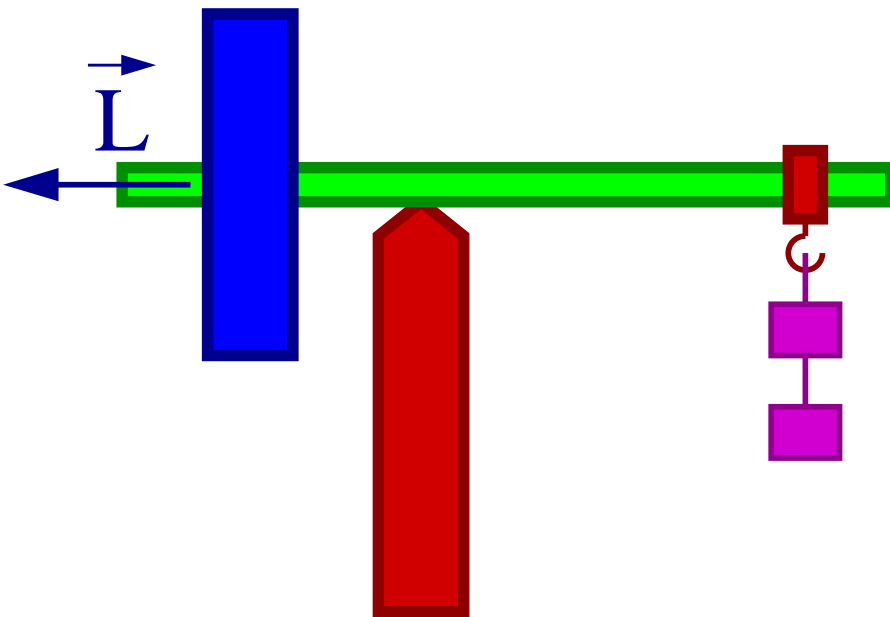
$$\vec{L} = \vec{\omega} I = \text{const}$$

Rozkręcony żyroskop utrzymuje **orientację swojej osi obrotu** w przestrzeni.

Żyroskop

Równowaga

Rozkręcony żyroskop utrzymuje orientację swojej osi obrotu w przestrzeni, pod warunkiem, że momenty sił się równoważą!



Ciężar żyroskopu jest zrównoważona przez odpowiednio dobrane ciężarki

Jeśli żyroskop jest w równowadze przy $\vec{L} = 0$ to będzie także w równowadze dla $\vec{L} \neq 0$

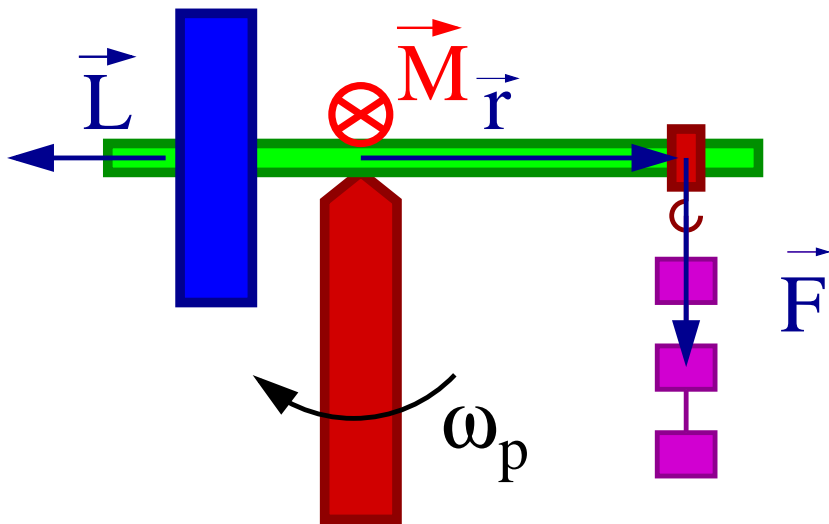
Orientacja żyroskopu pozostaje stała

Jak zachowa się żyroskop gdy zwiększymy lub zmniejszymy “przeciwwagę” ?

Żyroskop

Precesja

zwiększone obciążenie



Niezerównoważony moment siły ciężkości względem punktu podparcia O:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$M = mgr$$

Pojawia się **moment siły** \vec{M} skierowany prostopadle pionu (\vec{g}) i do osi żyroskopu (\vec{r})

Wektor momentu pędu $\vec{L} \perp \vec{M}$

\Rightarrow wartość momentu pędu nie ulega zmianie

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

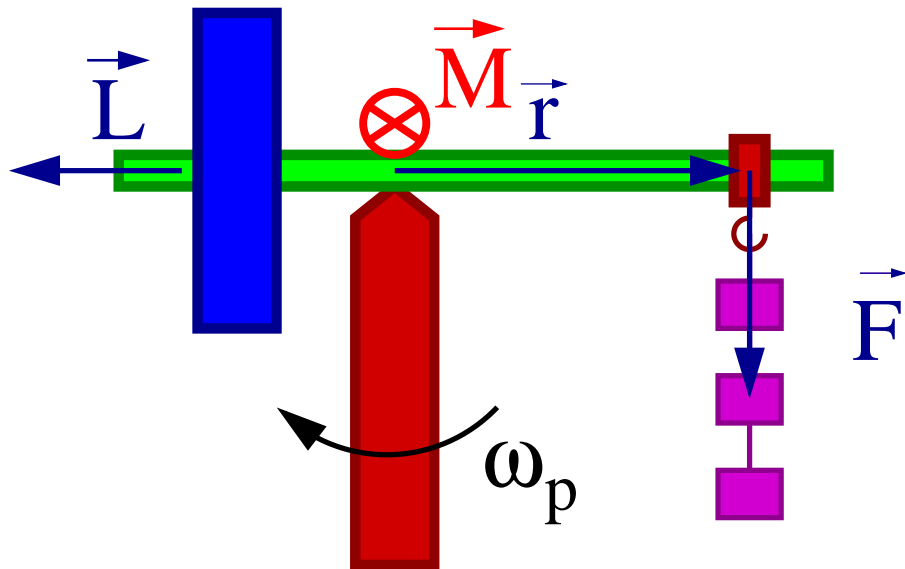
\Rightarrow kierunek momentu pędu zmienia się \Rightarrow **precesja**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} = \vec{M} \Rightarrow \omega_p L = mgr$$

Żyroskop

Precesja

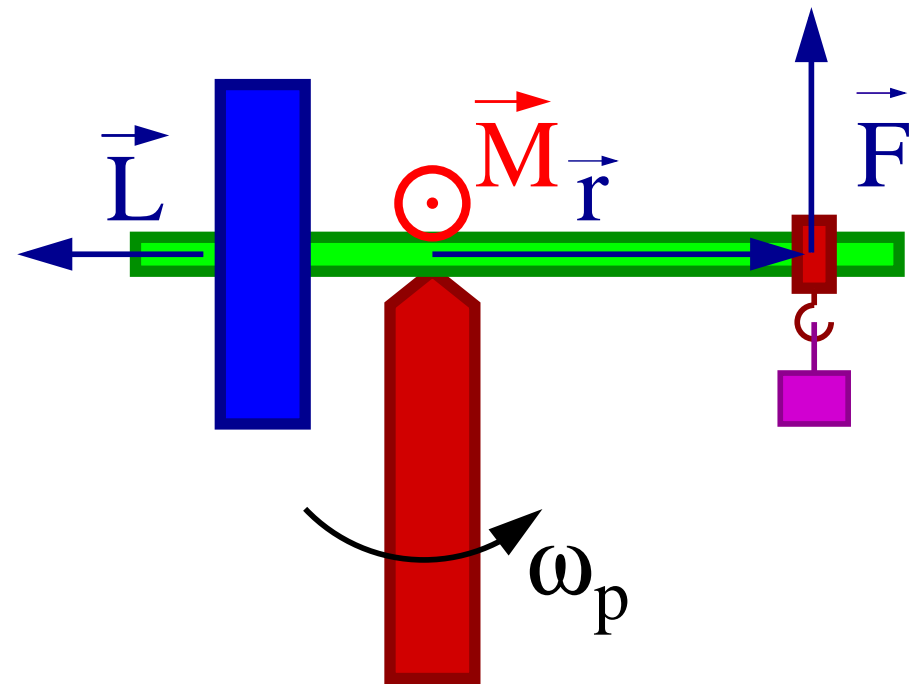
zwiększone obciążenie



zgodnie z ruchem wskazówek zegara
(patrząc os góry)

$$\text{Częstość precesji } \omega_p = \frac{mrg}{L}$$

zmniejszone obciążenie
(przypadek bąka)



przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

⇒ proporcjonalna do dodanej/brakującej masy

Żyroskop

Paradoks ?

Nie wirujący bąk wychylony z położenia równowagi $\vec{L} = 0$
lub nie zrównoważony żyroskop $\vec{L} = 0 \Rightarrow$ wywracają się

Natomiast jeśli $\vec{L} \neq 0$ to bąk i żyroskop podlegają precesji
 \Rightarrow nigdy się nie wywróca (zaniedbując siły tarcia).

Czy jest to słuszne dla dowolnie małych wartości \vec{L} ?

Z doświadczenia wiemy, że nie !

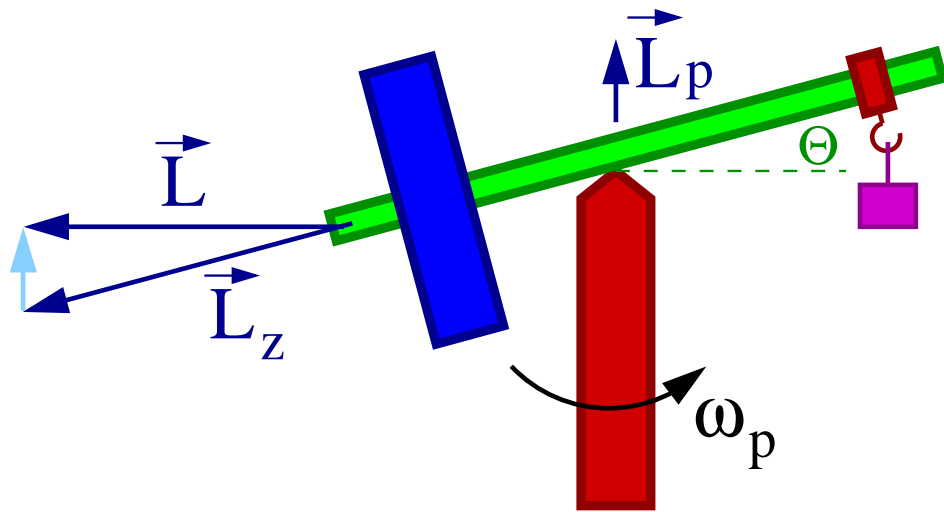
Wirujący bąk wywraca się zanim prędkość kątowna jego ruchu wirowego spadnie do zera.

Nasze rozważania precesji nie były ścisłe

\Rightarrow dla małych momentów pędu musimy uwzględnić dodatkowe efekty...

Żyroskop

Precesja



Niech moment pędu zrównoważonego żyroskopu wynosi \vec{L} .

Co się dzieje gdy zdejmujemy jeden ciężarek ?

Wartość całkowitego moment pędu nie ulega zmianie, gdyż moment siły ciężkości jest prostopadły do \vec{L} .

Obrót żyroskopu z częstością ω_p względem pionowej osi \Rightarrow moment pędu $\vec{L}_p = \omega_p I_p$.

Aby całkowity moment pędu nie uległ zmianie, oś żyroskopu musi się nachylić o kąt:

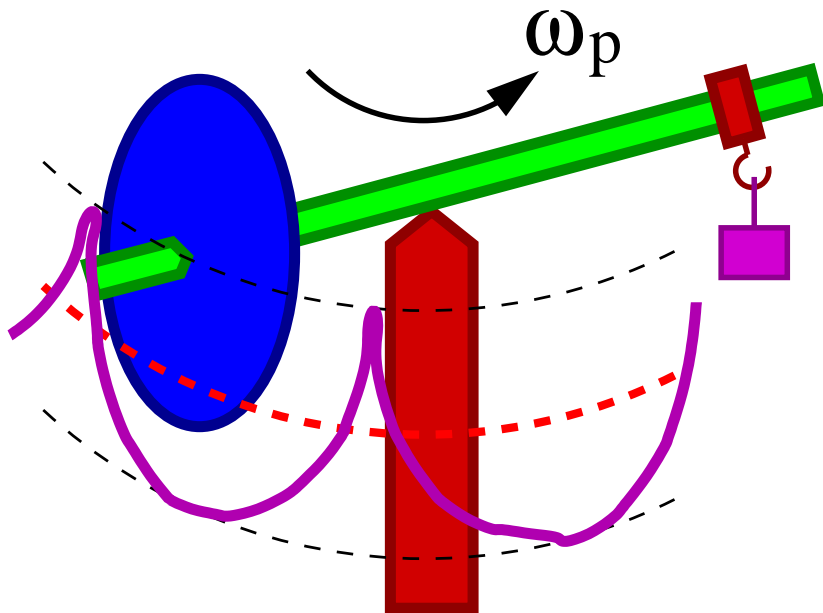
$$\theta \sim \frac{L_p}{L} = \frac{mrgI_p}{L^2}$$

Duże $L \Rightarrow \theta \rightarrow 0$ (L_p można pominąć)

Małe $L \Rightarrow$ żyroskop/bąk wywraca się...

Żyroskop

Nutacja



Idealna precesja, gdy koniec ramienia żyroskopu porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, zachodzi tylko przy **szczególnym** wyborze warunków początkowych.

W ogólnym przypadku na precesję nakładają się oscylacje ramienia żyroskopu wokół położenia “**stacjonarnej precesji**” \Rightarrow **nutacje**.

Charakter tych dodatkowych oscylacji zależy od warunków początkowych.

Zazwyczaj są mało widoczne i zanikają w czasie (**tłumienie**).

Ich amplituda rośnie dla małych wartości L

Moment pędu

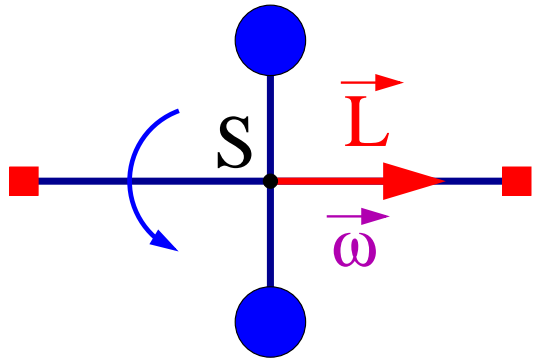
Do tej pory rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy względem ustalonej osi.

Na ogół była to oś symetrii bryły, lub oś do niej równoległa.

W ogólnym przypadku problem jest bardziej skomplikowany

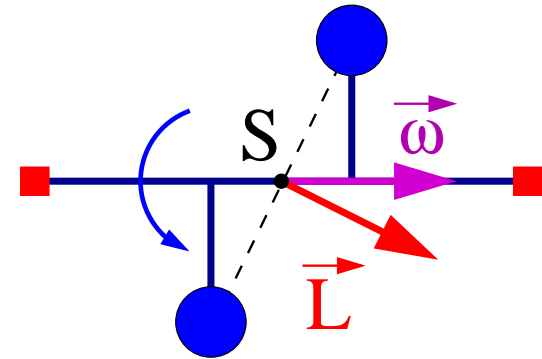
Przykład - dwa wirujące ciężarki

Ciężarki w jednej płaszczyźnie \perp osi



Oś obrotu jest osią symetrii $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Ciężarki rozsunięte wzdłuż osi obrotu



Oś obrotu nie jest osią symetrii $\Rightarrow \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

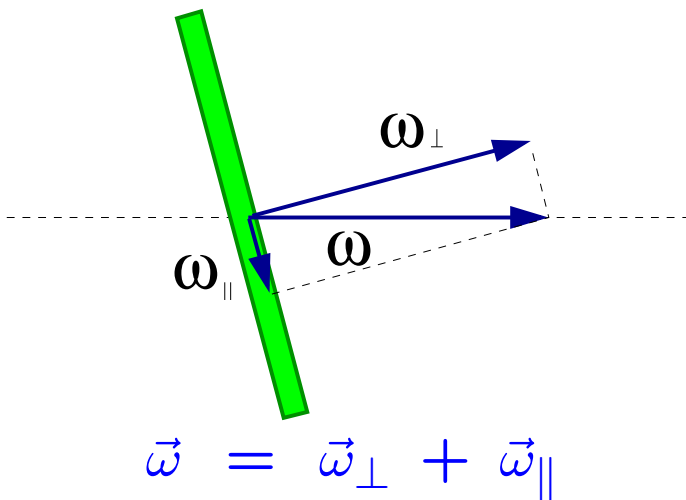
$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \perp \vec{r}_i$$

Moment pędu

Przykład II

Dysk wirujący wokół osi nachylonej do osi symetrii

Prędkość kątową możemy rozłożyć na składową równoległą i prostopadłą do osi symetrii

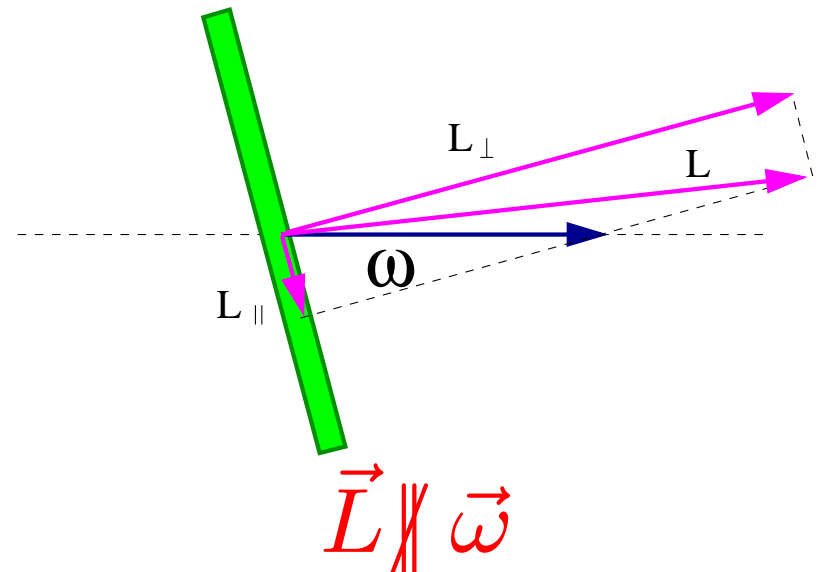


Moment bezwładności dysku: (wykład 9)

$$I_{\perp} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{\parallel} = \frac{1}{4}mr^2 = \frac{1}{2}I_{\perp}$$

Moment pędu dysku

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_{\parallel} \\ &= I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} + I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} \\ &= I_{\perp}\left(\vec{\omega}_{\perp} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{\parallel}\right)\end{aligned}$$



Moment pędu

W ogólnym przypadku bryła sztywna może nie mieć żadnej osi symetrii.

Jak wtedy wyznaczyć moment pędu, znając prędkość kątową $\vec{\omega}$?

Zdefinicji momentu pędu:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Z definicji bryły sztywnej:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Otrzymujemy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

korzystamy z tożsamości wektorowej: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

Kierunek \vec{L} zależy od kierunku $\vec{\omega}$ jak i położeń poszczególnych elementów bryły \vec{r}_i .

Moment pędu

Rozpisując na składowe:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_i \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

Otrzymujemy (na przykładzie L_x):

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] \\ &= \omega_x \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \cdot \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \cdot \sum_i m_i x_i z_i \end{aligned}$$

L_x zależy w ogólności od **wszystkich składowych** prędkości kątowej !

Podobnie:

$$\begin{aligned} L_y &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i y_i + \omega_y \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \cdot \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y \cdot \sum_i m_i y_i z_i + \omega_z \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{aligned}$$

Tensor momentu bezwładności

Wyrażenie na składowe \vec{L} możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

tensor momentu bezwładności

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

ogólna postać ($u, v = x, y, z$)

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{uv} = \sum m_i (\delta_{uv} r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

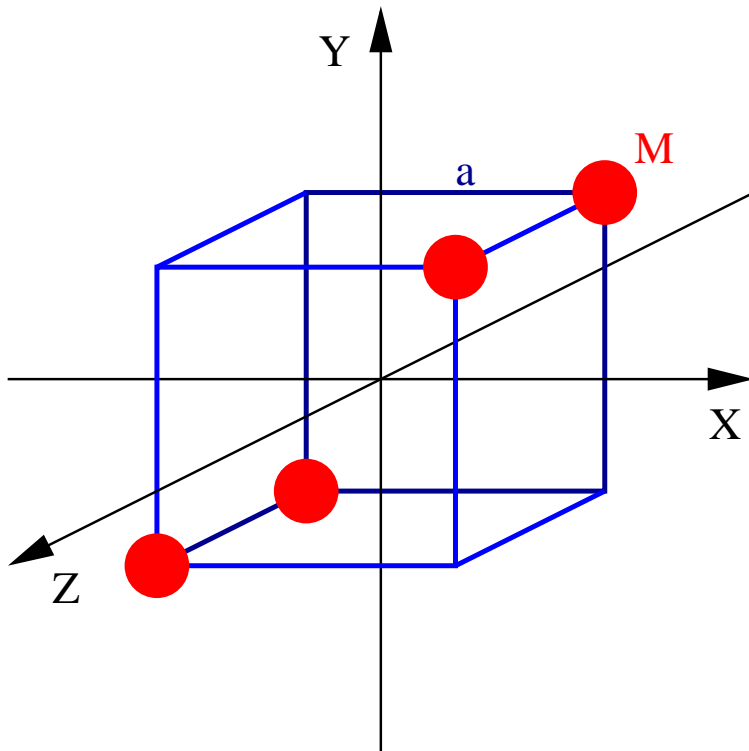
$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r}) (\delta_{uv} r^2 - u v)$$

delta Kroneckera: $\delta_{uv} = 1$ dla $u = v$ i 0 dla $u \neq v$

Tensor momentu bezwładności

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M a^2$$

Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera (tensor symetryczny \Rightarrow 6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak **obrócić osie układu** odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne zniknęły: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

\Rightarrow pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (wartości własne)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xx} \omega_x, I_{yy} \omega_y, I_{zz} \omega_z)$$

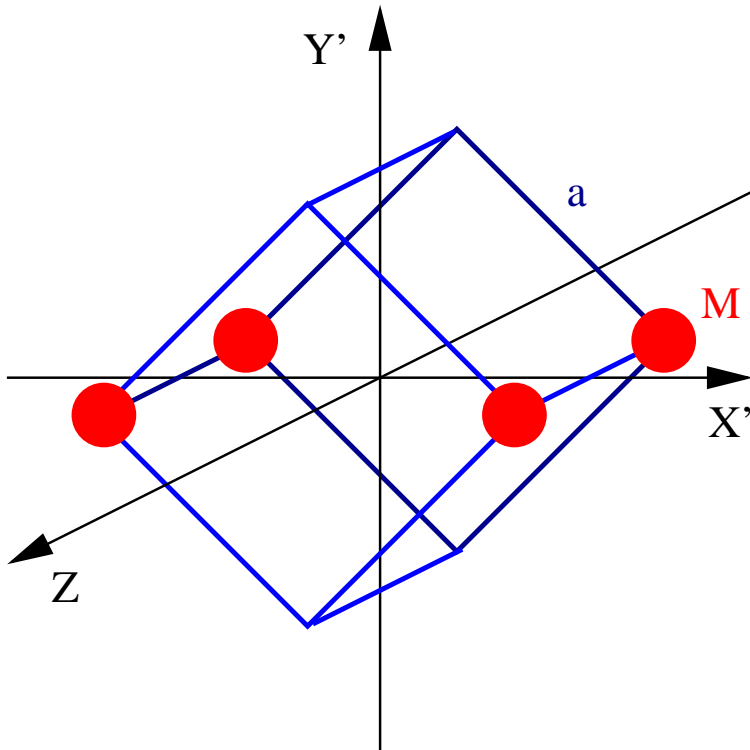
Dla obrotu wokół osi głównej $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$$\text{np. } \vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$$

Osie główne

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

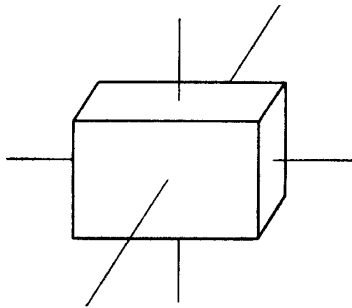
$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M a^2$$

Osie X', Y' i Z są osiami głównymi \hat{I} :

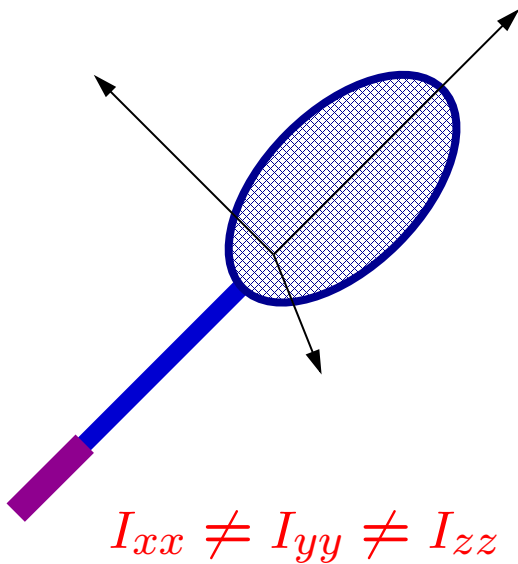
- oś X' - najmniejszy moment bezwładności
- oś Y' - największy moment bezwładności
- oś Z - pośredni moment bezwładności

Osie główne

Prostopadłościan

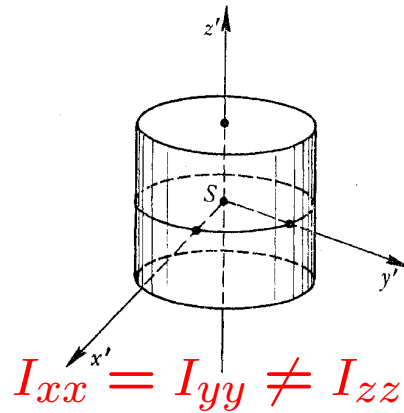


Rakieta tenisowa



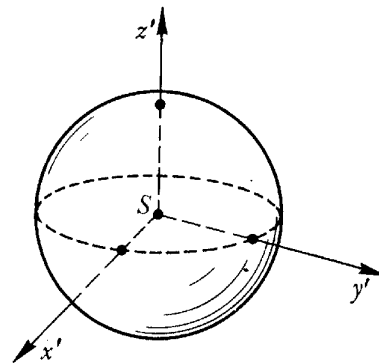
$$I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz}$$

Walec



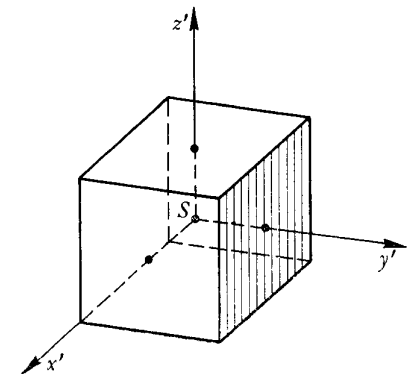
$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$$

Kula



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Sześcian



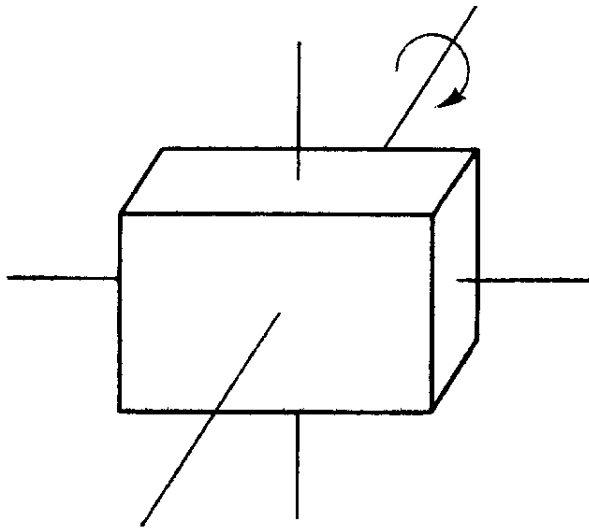
$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Tak jak dla kuli !

Osie główne

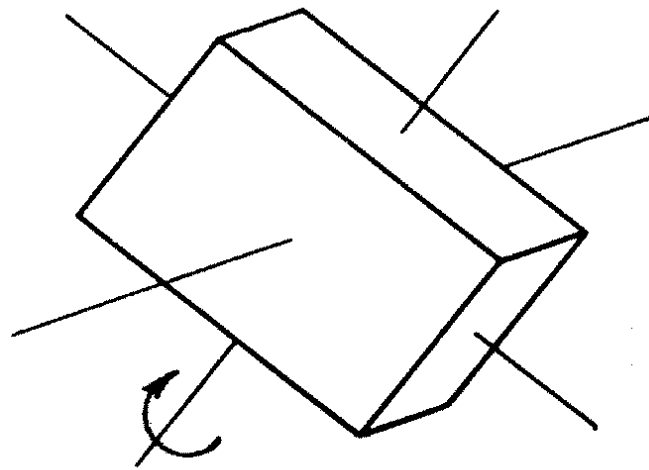
W przypadku bryły wirującej **swobodnie** (stała wartość \vec{L}) stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora $\vec{\omega}$) możliwy jest **tylko** wokół osi głównych o **największym** i **najmniejszym** momencie bezwładności

Oś o największym I



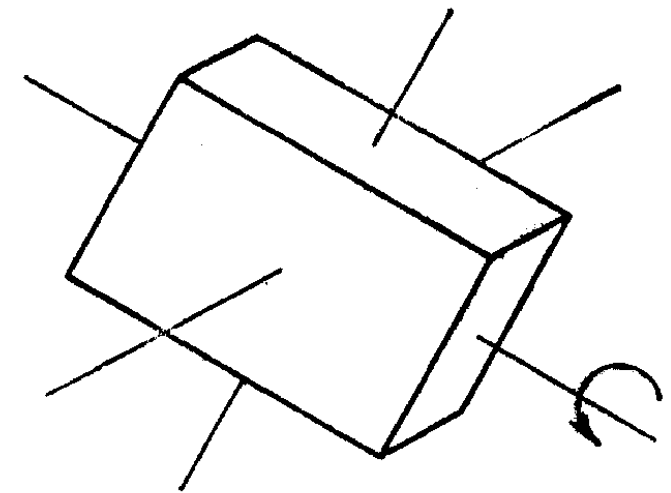
obrót stabilny

Oś o pośrednim I



obrót niestabilny

Oś o najmniejszym I



obrót stabilny

Osie główne

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

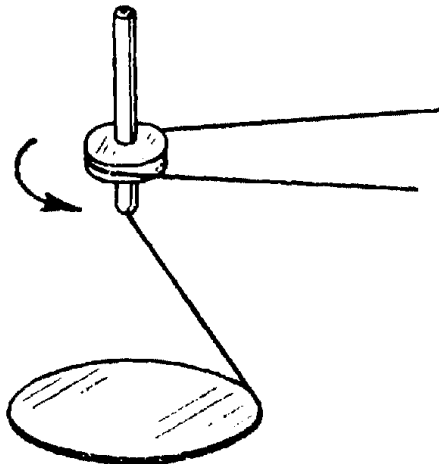
$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

Jeśli nałożymy **więzy** narzucające obrót ciała ze **stałą prędkością kątową** $\vec{\omega}$ to przyjmie ono ułożenie odpowiadające **maksymalnej energii kinetycznej**

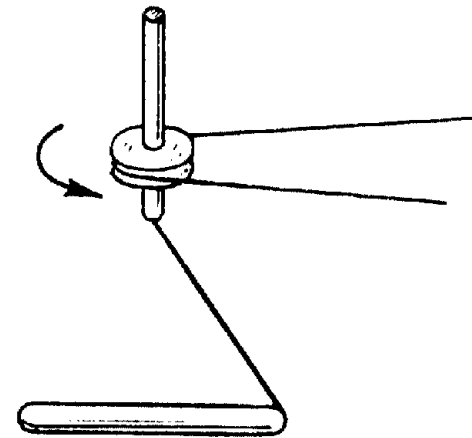
⇒ obrót wokół osi o **największym momencie bezwładności**

⇒ maksymalna wartość **momentu pędu**

Wirujący dysk



Wirujący pręt



Osie główne

Wirujący łańcuszek

- Przybiera kształt obręczy
odpowiadający **maksymalnemu momentowi bezwładności**
⇒ maksymalnej wartości momentu pędu
⇒ **maksymalnej energii kinetycznej**

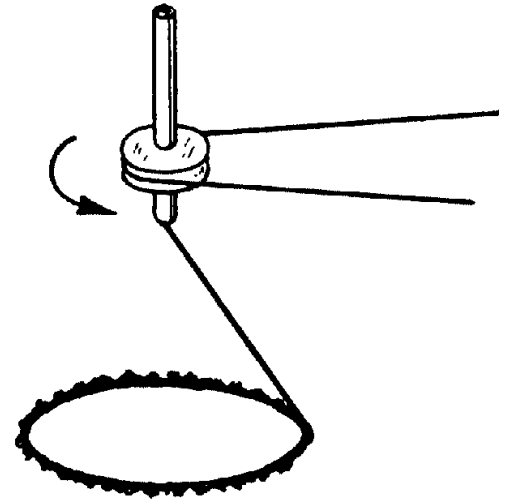
W układzie obracającym się

- Siła odśrodkowa dąży do rozmieszczenia masy jak najdalej od osi obrotu.
Stabilny jest stan odpowiadający minimum energii potencjalnej (siły odśrodkowej)

$$\vec{F}_i = m_i \omega^2 \vec{r}_{i\perp} \Rightarrow E_{p,i} = -\frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{\perp}^2$$
$$E_p = \sum_i E_{p,i} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_{\perp}^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 I = -E_k$$

Minimum energii potencjalnej odpowiada maksimu energii kinetycznej.

W układzie laboratoryjnym ⇒ masa “oddala się” od osi zgodnie z zasadą bezwładności



Mechanika płynów

Płyn

Substancja, która może **dowolnie zmieniać swój kształt** w zależności od naczynia, w którym się znajduje, a także **swobodnie się przemieszczać** (przepływać) pod wpływem przyłożonych sił (ciśnień).

W tej ogólnej definicji do płynów zaliczamy zarówno ciecze jak i gazy!

Mikroskopowo płynem nazwiemy substancje, której molekuly mogą swobodnie przemieszczać się względem siebie (w odróżnieniu od molekuł w kryształach).

Przy czym w cieczech molekuly pozostają związane wzajemnymi oddziaływaniami, a w gazie nie są ze sobą związane.

Płyn doskonały (idealny)

Płynem doskonałym nazwiemy ciecz nieściśliwą, w której nie występują opory ruchu (poza bezwładnością cieczy).

Pojęcia podstawowe

Gęstość

Definiujemy jako stosunek masy do objętości (tak jak dla ciał stałych):

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

W przypadku płynu doskonałego $\rho = \text{const.}$ W ogólnym przypadku $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

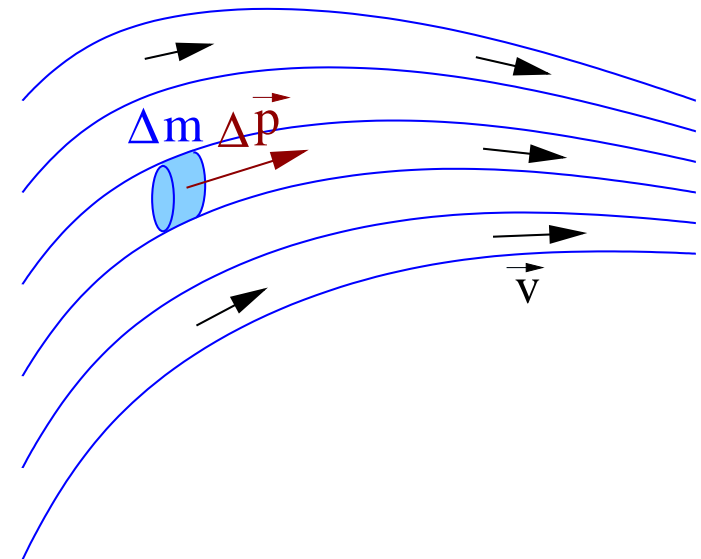
Prędkość przepływu

Definiujemy jako granicę średniej prędkości niewielkiej objętości płynu.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta m}$$

W ogólnym przypadku, także dla płynu doskonałego, zależy od położenia i czasu: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$.

Przepływ stacjonarny: niezależny od czasu, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$



Pojęcia podstawowe

Równanie ciągłości

W przypadku przepływu stacjonarnego, zmiana prędkości przepływu wzdłuż linii prądu wiąże się ze zmianą przekroju poprzecznego: przepływ masy przez kolejne powierzchnie musi być taki sam

$$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2$$

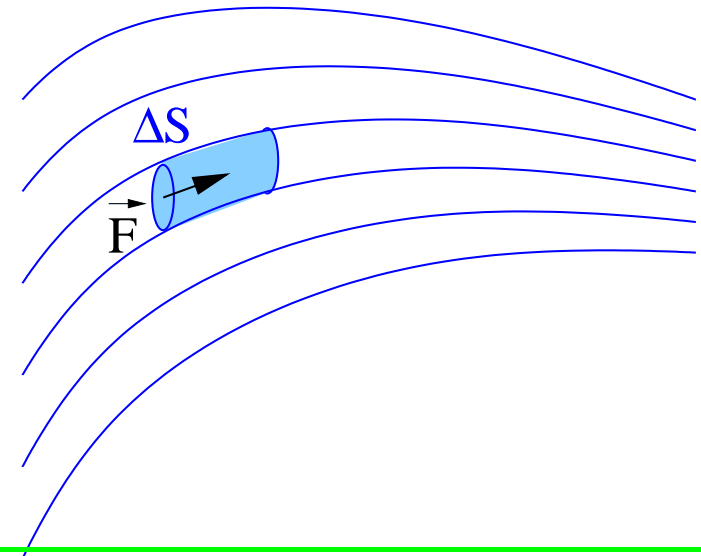
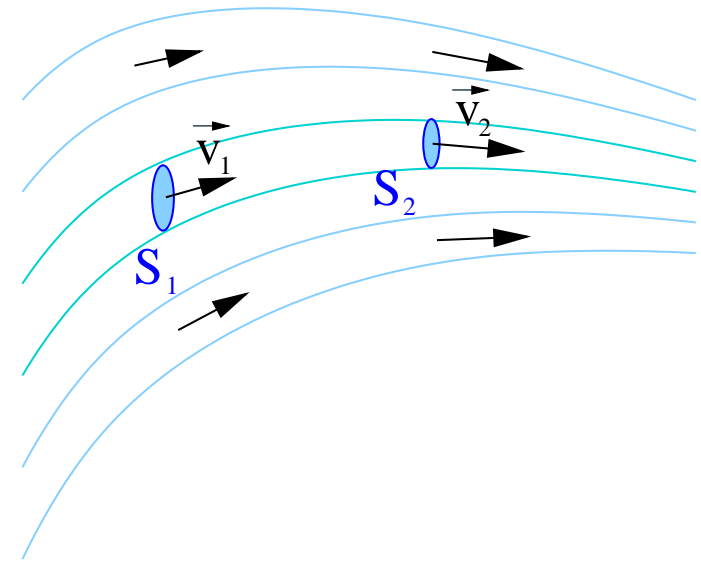
Dla płynu idealnego:

$$S v = \text{const}$$

Ciśnienie

Siła działająca na jednostkę powierzchni elementu płynu ze strony płynu lub ścianek naczynia

$$p = \frac{|\vec{F}|}{\Delta S}$$



Statyka

Prawo Pascala

Sformułowane w połowie XVIIw. przez Blaise'a Pascala

Jeżeli na ciecz lub gaz w zbiorniku zamkniętym wywierane jest **ciśnienie zewnętrzne**, to ciśnienie wewnątrz zbiornika jest **wszędzie jednakowe** i równe ciśnieniu zewnętrznemu.

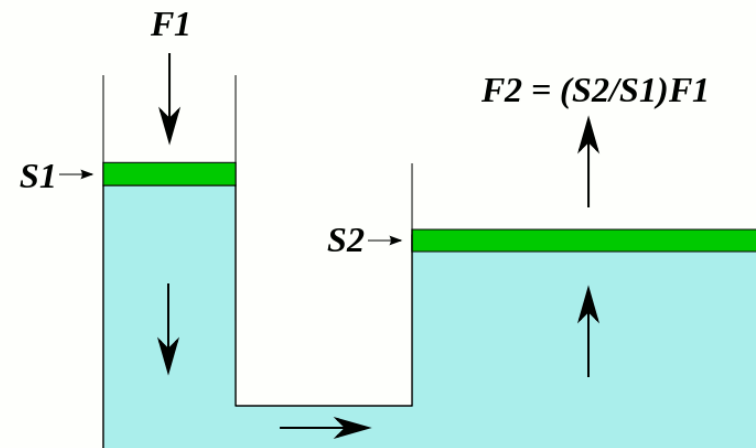
Prawo to obowiązuje w przypadku **statycznym** (płyn nie porusza się). Nie uwzględnia też wpływu oddziaływania grawitacyjnego (ciśnienia hydrostatycznego).



Prasa hydrauliczna

Przykład wykorzystania prawa Pascala

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$



Statyka

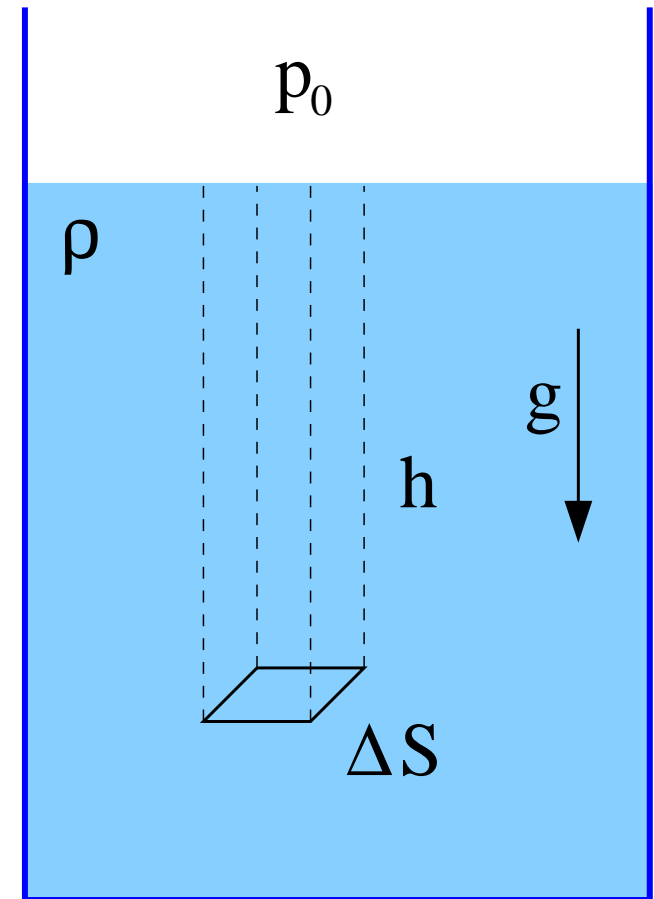
Ciśnienie hydrostatyczne

Szczególnym przypadkiem oddziaływania na ciecz jest pole grawitacyjne Ziemi. Na element o powierzchni ΔS znajdujący się na głębokości h wywierane jest zewnętrzne ciśnienie p_0 oraz dodatkowy nacisk słupa cieczy

$$N = \Delta Q = \rho g h \Delta S$$

Całkowite ciśnienie na głębokości h wyniesie więc:

$$p = \rho g h + p_0$$



Statyka

Siła wyporu

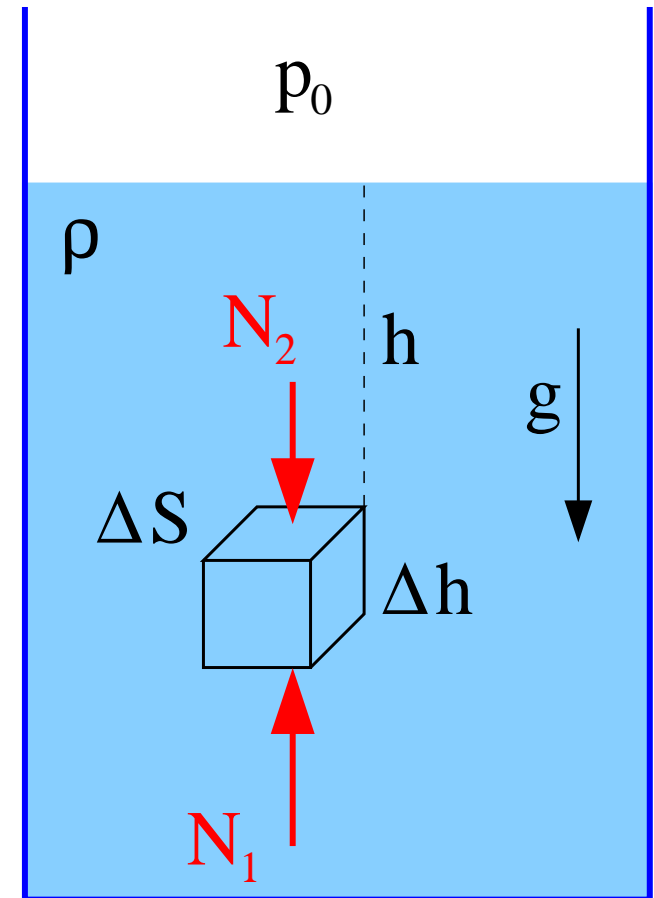
Prawo Archimedesesa wynika wprost ze wzoru na ciśnienie hydrostatyczne. Dla prostopadłościanu zanurzonego całkowicie w cieczy o gęstości ρ :

$$\begin{aligned} W &= N_1 - N_2 = \rho g (h + \Delta h) \Delta S - \rho g h \Delta S \\ &= \rho g \Delta h \Delta S \\ &= \rho g V \end{aligned}$$

gdzie V jest objętością ciała, czyli objętością wypartej cieczy.

Siła wyporu jest równa co do wartości ciężarowi cieczy wypartej przez ciało (ale przeciwnie skierowana)

$$\vec{W} = -\rho V \vec{g}$$



Statyka

Siła wyporu

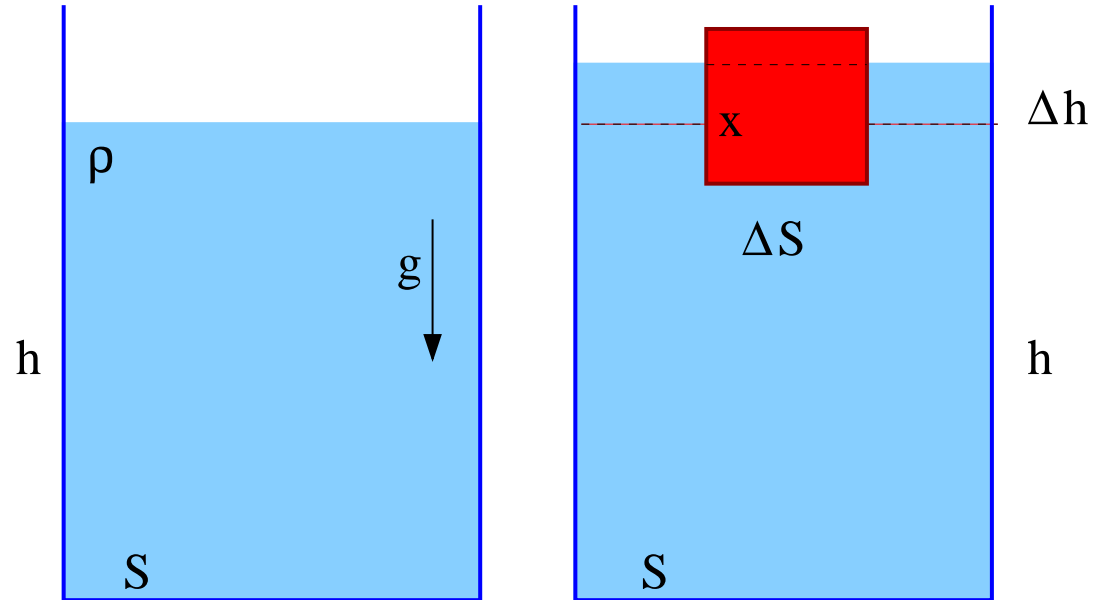
Rozważmy naczynie z cieczą, do którego wkładamy ciało o gęstości mniejszej od gęstości cieczy.

Nowa wysokość cieczy w naczyniu

$$(h + \Delta h)S = hS + x\Delta S$$

Zanurzenie x wynika z siły wyporu

$$g \rho x \Delta S = Q$$



Nacisk cieczy na dno naczynia po włożeniu ciała wyniesie

$$N = g \rho (h + \Delta h)S = g \rho h S + g \rho x \Delta S = g \rho h S + Q$$

Nacisk zwiększa się dokładnie o ciężar pływającego ciała.

Przepływ płynu

Płyn idealny

Dla płynu idealnego nie występują opory ruchu - przepływ odbywa się bez strat energii.

Płyn idealny jest też nieściśliwy - nie zmienia się jego energia wewnętrzna (pomijamy zmiany temperatury). Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii do opisu przepływu!

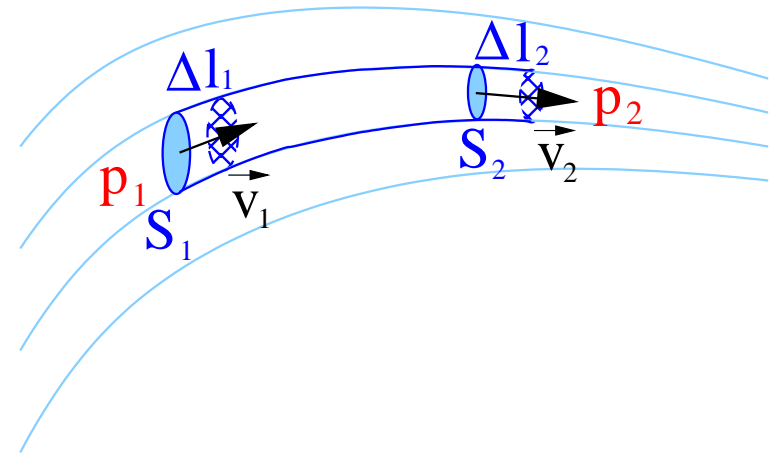
Rozważmy objętość płynu ograniczoną powierzchniami S_1 i S_2 . W czasie Δt przesunie się ona odpowiednio o

$$\Delta l_1 = v_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = v_2 \Delta t$$

Praca sił ciśnienia działającego na rozważaną objętość płynu wyniesie

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 \\ &= p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \end{aligned}$$

gdzie z równania ciągłości: $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 = \Delta V$



Przepływ płynu

Jeśli przepływ jest stacjonarny to zmianę energii kinetycznej wybranej objętości cieczy możemy policzyć zważając, że po czasie Δt objętość ΔV poruszająca się z prędkością \vec{v}_1 zastępuje objętość ΔV poruszająca się z prędkością \vec{v}_2

$$\Delta E_k = \frac{\Delta V \rho v_2^2}{2} - \frac{\Delta V \rho v_1^2}{2}$$

Zmiana energii kinetycznej wynika z pracy wykonanej przez siły ciśnienia

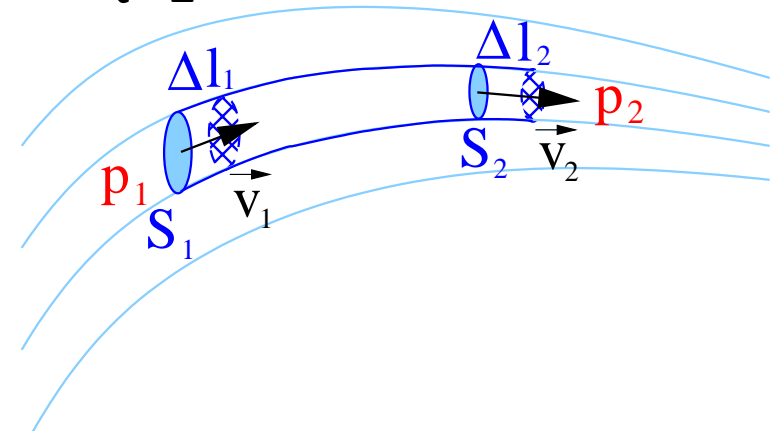
$$\Delta W_p = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{\Delta V \rho v_2^2}{2} - \frac{\Delta V \rho v_1^2}{2} = \Delta E_k$$

dzieląc przez ΔV

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}$$

Ale powierzchnie S_1 i S_2 mogliśmy wybrać dowolnie. Musi więc być spełnione

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$



Prawo Bernouliego

Jeśli przepływ odbywa się w polu grawitacyjnym g to dodatkowo trzeba uwzględnić zmianę energii potencjalnej:

$$\Delta E_p = \Delta V \rho g y_2 - \Delta V \rho g y_1$$

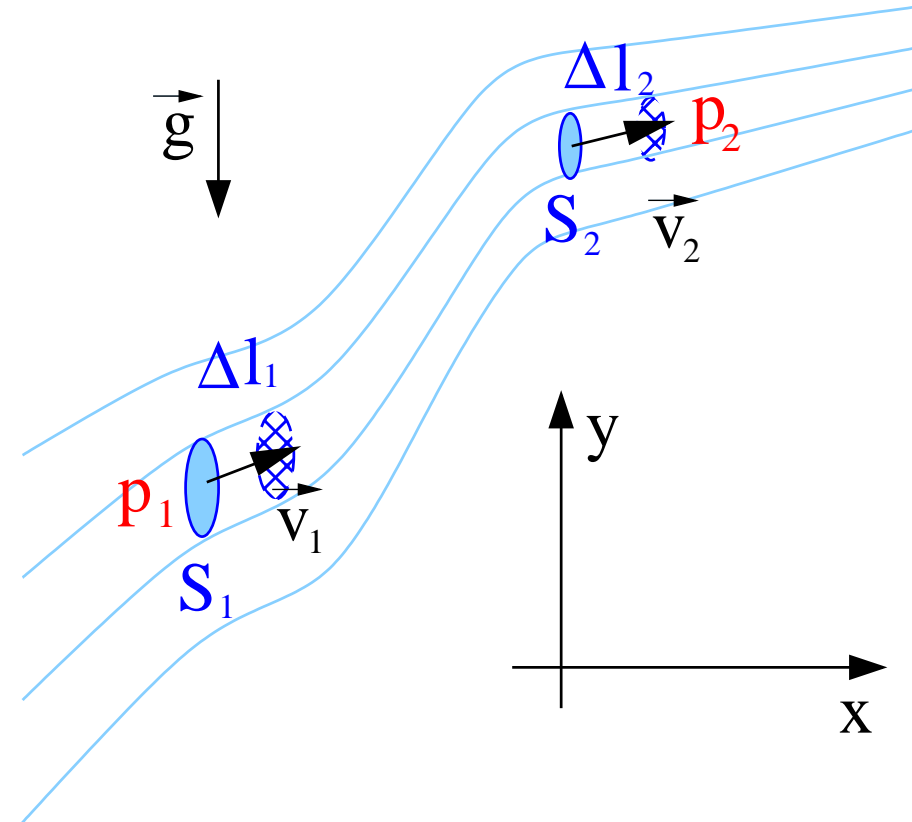
Z zachowania energii mamy wtedy:

$$\Delta W_p = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Co prowadzi do ostatecznego wzoru:

$$p + \rho g y + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

zwanym **prawem Bernouliego**



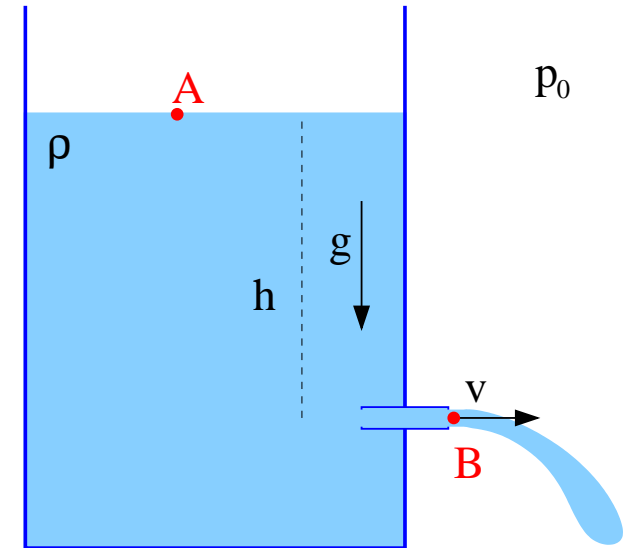
Prawo Bernouliego

Przykład

Z jaką prędkością wypływa ciecz z naczynia, jeśli otwór znajduje się h poniżej poziomu cieczy?

Stosując prawo Bernouliego do punktów A i B:

$$p_0 + \rho gh = p + \frac{\rho v^2}{2}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



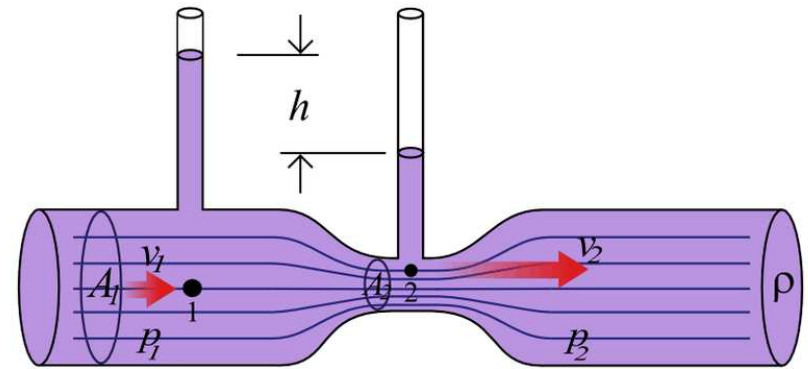
Tak jak przy spadku swobodnym lub wahadle!

Zaniedbujemy opory!

Dysza Venturiego

Przyrząd służący do pomiaru prędkości cieczy lub gazu

$$\Delta p = \rho gh = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho v_1^2}{2} \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)$$

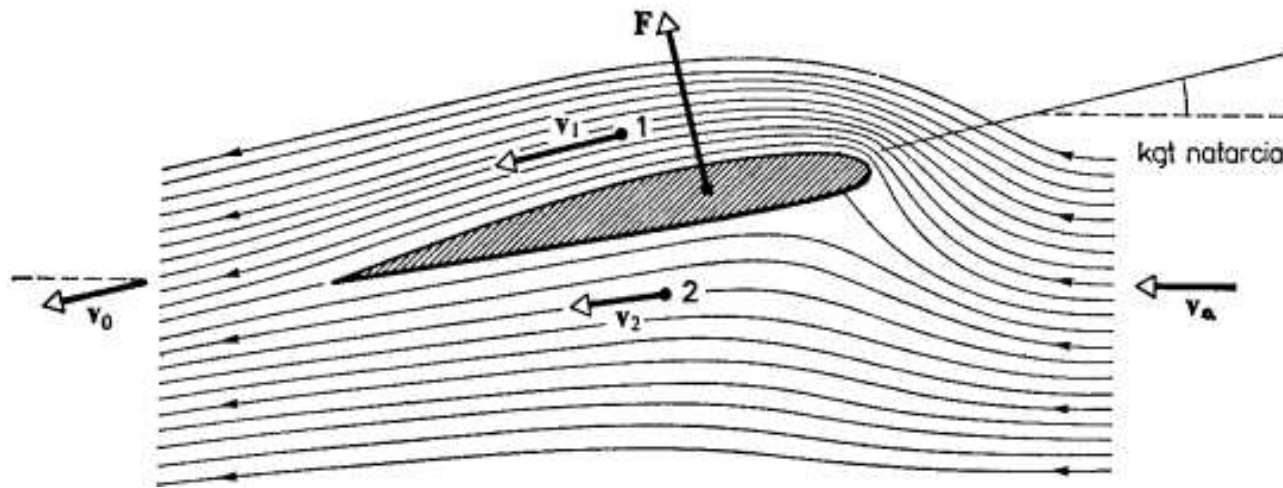


Ruch w ośrodku

Siła nośna

Prawo Bernouliego tłumaczy także powstawanie siły nośnej w przypadku ciał (na przykład skrzydła samolotu) poruszających się w ośrodku.

Ciśnienie jest mniejsze w obszarze większych prędkości opływania ($p + \frac{\rho v^2}{2} = const$)
⇒ ciało jest “wciągane” w obszar większych prędkości

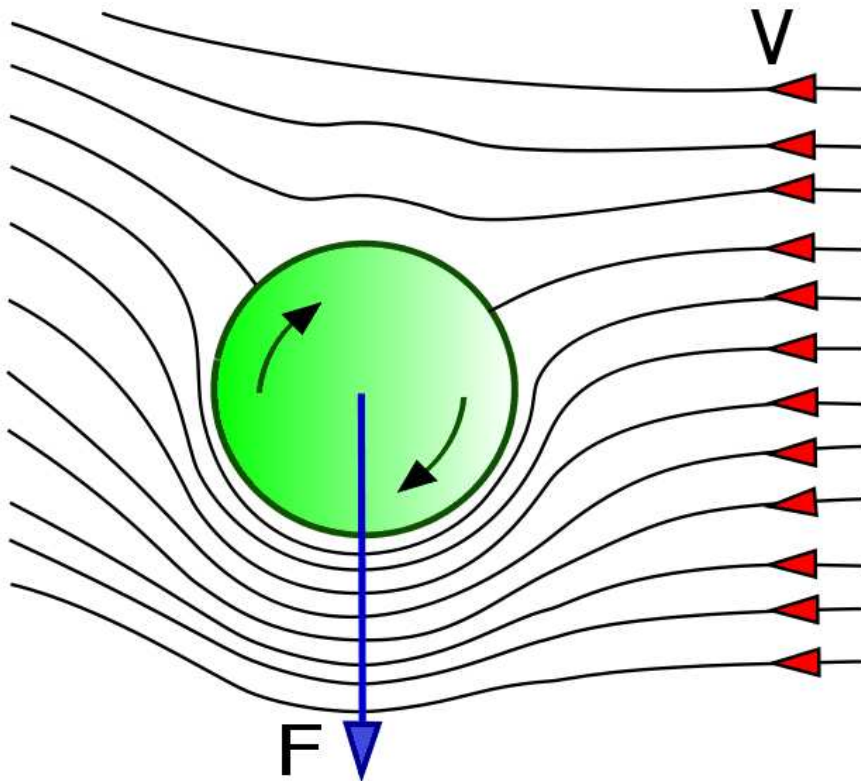


Ale można na to spojrzeć też z punktu widzenia **praw Newtona!** Siła nośna jest siłą reakcji! Ciało wymusza zmianę kierunku ruchu cząsteczek ośrodka, pcha go “w dół”...

Ruch w ośrodku

Zjawisko Magnusa

Walec wirujący w przepływającej poprzecznie do osi obrotu cieczy lub gązie.



zgodne kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu wzrasta
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe rośnie
- ⇒ ciśnienie maleje

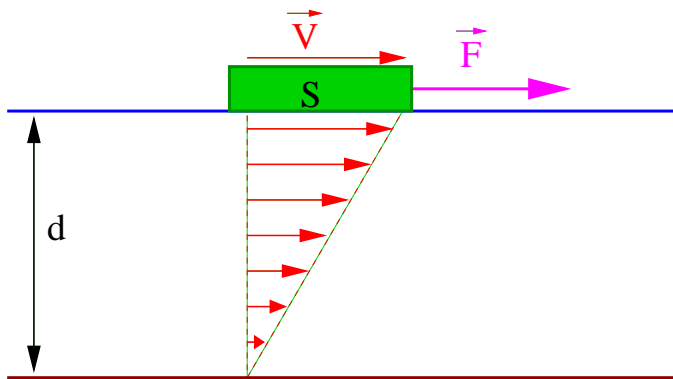
przeciwnie kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu maleje
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe maleje
- ⇒ ciśnienie wzrasta

⇒ wypadkowa siła nośna $\vec{F}_N \perp \vec{v}$

Lepkość

Ciało poruszające się po powierzchni cieczy:



Warstwa cieczy przylegająca do ciała porusza się wraz z nim.

Warstwa cieczy przylegająca do dna spoczywa.

“tarcie wewnętrzne” pomiędzy warstwami cieczy poruszającymi się z różnymi prędkościami.

Formuła empiryczna:

$$\vec{F}_L = -\vec{i}_V \eta \frac{v S}{d}$$

gdzie: v - prędkość ciała
 S - powierzchnia styku z cieczą
 d - głębokość naczynia
 η - współczynnik lepkości

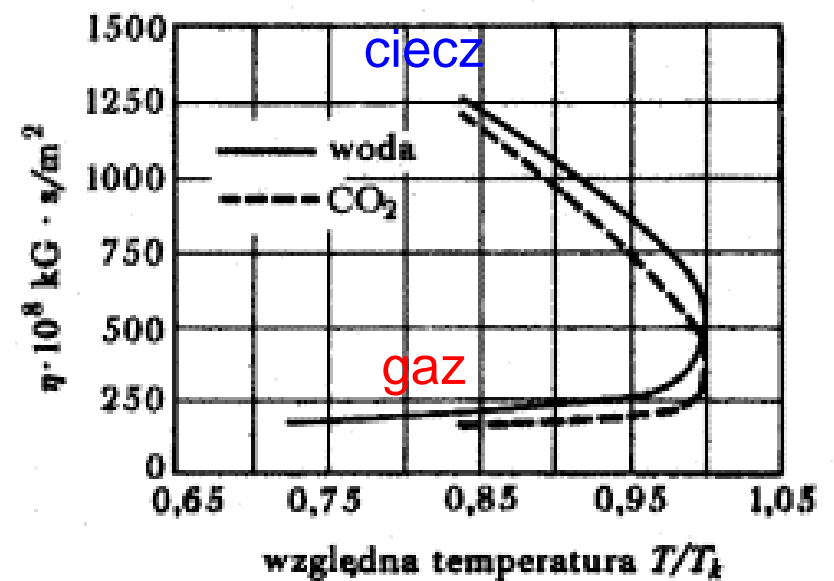
Lepkość

Typowe wartości:

eter	0.0002	Ns/m^2
woda	0.001	Ns/m^2
gliceryna	1.5	Ns/m^2
miód	500.	Ns/m^2
wodór	0.000009	Ns/m^2
powietrze	0.000018	Ns/m^2
tlen	0.000021	Ns/m^2

Lepkość cieczy maleje z temperaturą

Lepkość gazów rośnie z temperaturą

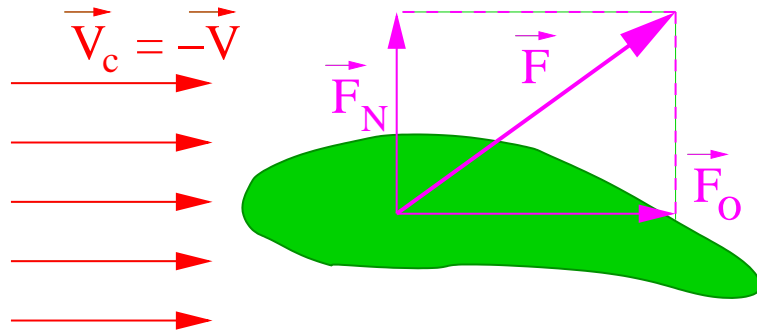


Ruch w ośrodku

Opór czołowy

Siły jakie działają na ciało poruszające się w ośrodku możemy podzielić na:

- siłę oporu czołowego $\vec{F}_o \updownarrow \vec{v}$
- siłę nośną $\vec{F}_N \perp \vec{v}$



Z analizy wymiarowej:

$$\vec{F}_o = -\vec{i}_v \frac{C}{2} \rho v^2 S \quad \text{wzór Newtona}$$

gdzie: v - prędkość ciała
 S - powierzchnia poprzeczna
 ρ - gęstość cieczy

C - bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu ciała, jego orientacji względem \vec{v} oraz **bezwymiarowej** kombinacji parametrów:

$$Re = \frac{v l \rho}{\eta}$$

Re - liczba Reynoldsa, l - wymiar poprzeczny

O.Reynolds (1883): skalowanie przepływów cieczy

Ruch w ośrodku

Opór czołowy

Dla ciała kulistego i $Re \ll 1$
istnieje ścisłe rozwiązanie problemu:
(G.Stokes 1851)

$$C = \frac{24}{Re}$$

$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v}$$

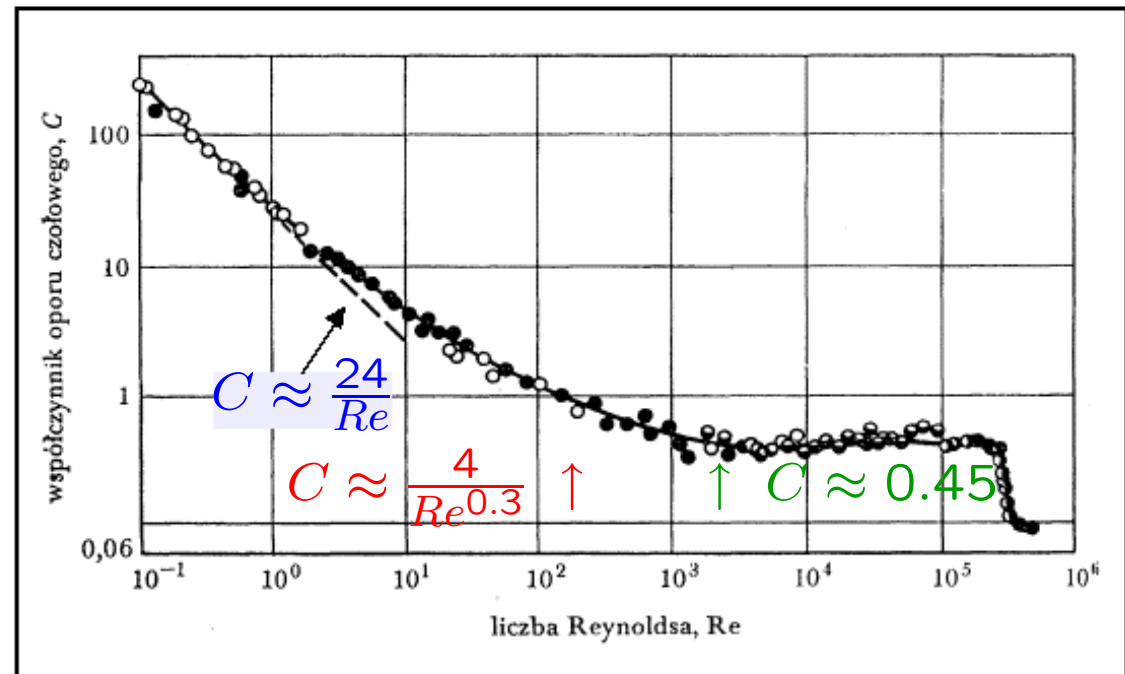
siła oporu proporcjonalna do v

W obszarze dużych wartości Re

$$C \approx \text{const}$$

$$F_o \sim v^2$$

Wyniki pomiarów współczynnika C dla kuli:

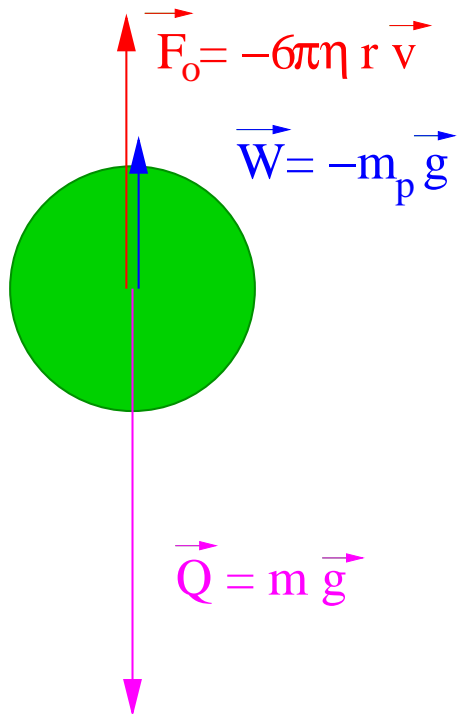


małe prędkości

duże prędkości

Ruch w ośrodku

Prędkość graniczna

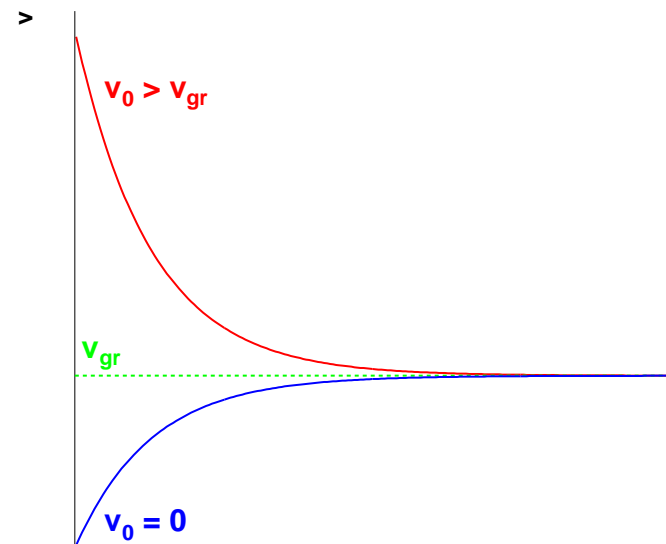


Równanie ruchu kuli spadającej w cieczy ($Re \ll 1$)

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_p\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

Rozwiązanie (ruch w pionie):

$$v(t) = v_{gr} + (v_0 - v_{gr}) \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m} t\right)$$



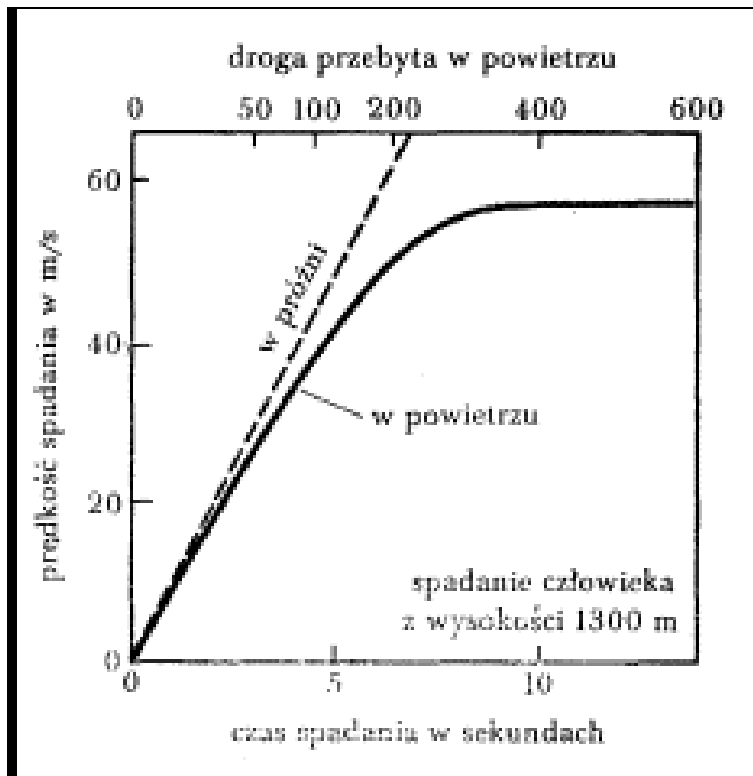
v_{gr} - prędkość graniczna^t

Ruch w ośrodku

Prędkość graniczna

Dla kuli spadającej w cieczy ($Re \ll 1$)

$$v_{gr} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho - \rho_p)}{\eta}$$



Zależność od kształtu

Kula:

$$\begin{aligned}\vec{F}_o &= -6\pi \eta r \vec{v} \\ &\approx -18.8 \eta r \vec{v}\end{aligned}$$

Dysk ($\perp \vec{v}$):

$$\vec{F}_o = -16 \eta r \vec{v}$$

Dysk ($\parallel \vec{v}$):

$$\vec{F}_o = -\frac{32}{3} \eta r \vec{v}$$

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Wektor momentu pędu \vec{L} jest równoległy do prędkości kątowej $\vec{\omega}$
 A dla symetrycznego tensora \hat{I} B dla diagonalnego tensora \hat{I} C zawsze
 D dla $\vec{\omega} \parallel$ osi głównej
2. Swobodnie wirująca bryła sztywna ma stabilnych osi obrotu przynajmniej
 A dwie B sześć C trzy D jedną
3. Równanie ciągłości dla przepływu płynów wynika z zachowania
 A energii B masy C gęstości D pędu
4. Prędkość z jaką wypływa woda przez otwór w dolnej krawędzi beczki, wraz z obniżaniem się poziomu wody w beczce
 A jest stała B rośnie C maleje D zależy od kierunku otworu
5. Siła lepkości, działająca na ciało poruszające się po powierzchni cieczy, nie zależy od
 A powierzchni B gęstości cieczy C prędkości ciała D głębokości naczynia



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego