KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Dynamika relatywistyczna

Fizyka I (Mechanika)

Wykład XIII:

- relatywistyczna definicja pędu
- relatywistyczna definicja energii, zasady zachowania
- transformacja Lorentza dla energii i pędu
- masa niezmiennicza i układ środka masy
- zderzenia elastyczne

Wprowadzenie

Zagadnienia ruchu ciał w mechanice nierelatywistycznej (Newtona/Galileusza) rozwiązywaliśmy w oparciu o

Równania ruchu

Ruch ciała jest zadany przez działające na nie siły zewnętrzne + warunki początkowe

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) + \vec{F}_R \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

lub

Zasady zachowania

Dla układu izolowanego i ruchu pod wpływem sił zachowawczych

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = const \qquad \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$E = E_p + E_k = E_p + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = const \qquad \vec{E}_{k,i} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

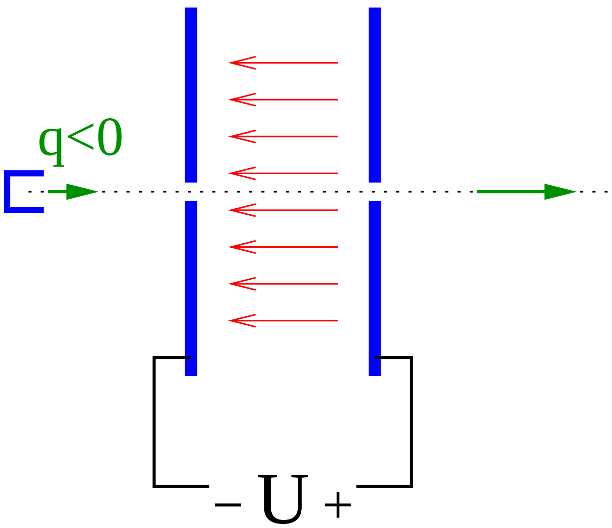
Czy podejścia te można też wykorzystać w przypadku relatywistycznym?

Pęd cząstki

Granice podejścia klasycznego

Elektron w kondensatorze

(najprostszy 'akcelerator' cząstek):



Klasycznie:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

Potrafimy wytwarzać pola elektryczne

$$E \sim 10\,MV/m = 10^7\,V/m$$

Dla elektronu:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} kg = 0.5\,MeV/c^2$$
$$|q_e| \equiv 1\,e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$\Rightarrow \quad a \approx 20\,m^{-1} \cdot c^2 \approx 2 \cdot 10^{18} m/s^2$$

W podejściu klasycznym elektron powinien osiągnąć prędkość światła już po przebyciu $\Delta x \approx 2.5\,cm$!!!

$\Rightarrow$ konieczność modyfikacji praw ruchu

Pęd cząstki

Uogólnienie praw ruchu

Załóżmy, ze chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Oznacza to jednak, że musimy zmienić definicję pędu, bo Newtonowska definicja

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

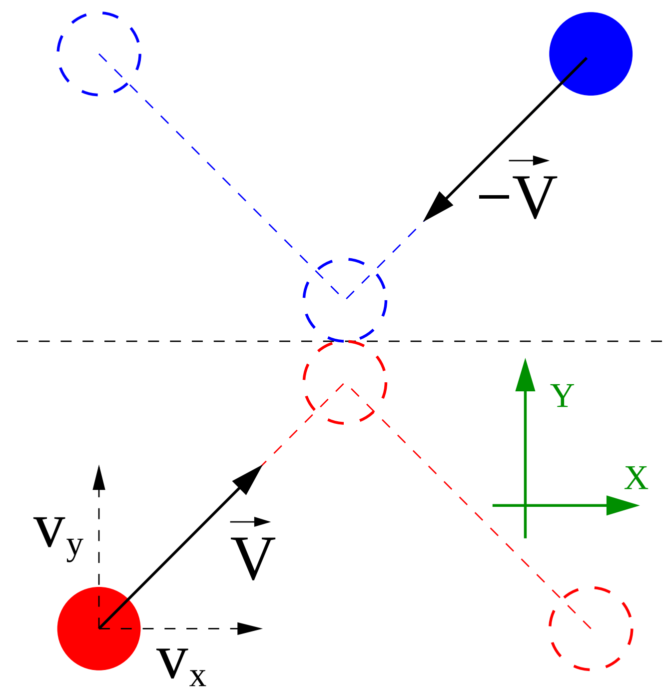
ogranicza wartość pędu od góry $(v < c)$

a przecież wciaż mogą działać siły...

Ale może definicja pędu jest OK,
a definicję siły trzeba zmienić?

Doświadczenie myślowe

Zderzenie dwóch kul o jednakowej masie m:

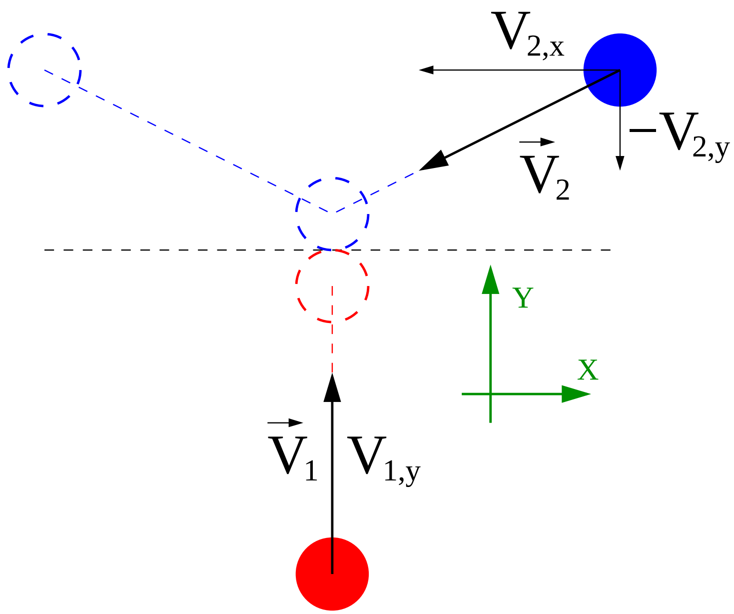


Pędy obu kul są równe co do wartości ale przeciwnie skierowane

Pęd cząstki

Doświadczenie myślowe

Przejdźmy do układu w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Pędy wzdłuż osi Y powinny być równe.

Dwia kule ⇒ dwa układy odniesienia

Wybór jednej z kul łamie symetrię zagadnienia !

Przesunięcia wzdłuż osi Y nie zmieniają się w transformacji Lorentza, ale zmienia się czas w jakim nastęują.

Prędkość wzdłuż osi Y pierwszej kuli:

$$V_{1,y} \;=\; \gamma\, V_y$$

Prędkość wzdłuż osi Y drugiej kuli:

$$V_{2,y} \;=\; \frac{V_y}{\gamma(1+\beta^2)}$$

$$\beta = \frac{V_x}{c} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}$$

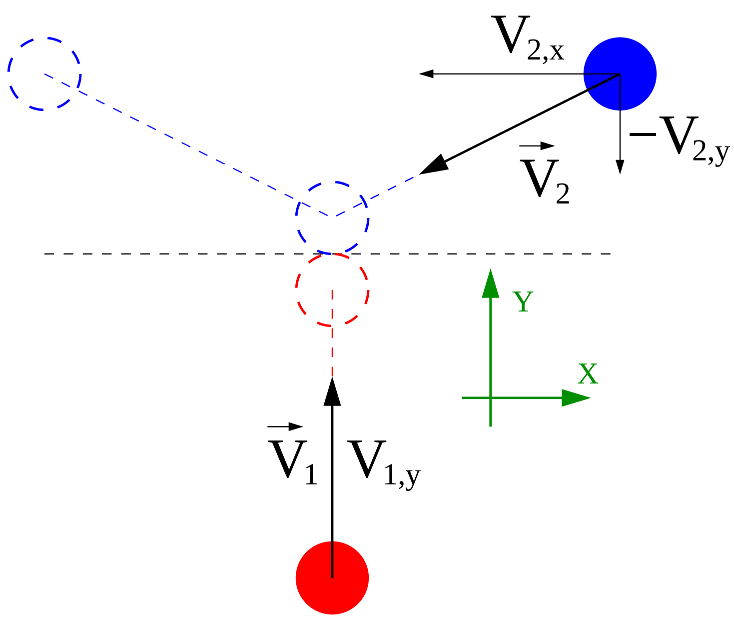
Czyli:

$$m\, V_{1,y} \;\neq\; m\, V_{2,y}$$

Pęd cząstki

Doświadczenie myślowe

Układ w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Z dodawania prędkości:

$$V_{2,x} = \frac{-2V_x}{\gamma(1+\beta^2)}$$

Prędkość wzdłuż osi Y drugiej kuli jest zmniejszona na skutek dylatacji czasu:

$$V_{2,y} = \frac{V_{1,y}}{\gamma'} \qquad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - V_{2,x}^2/c^2}}$$

Przyjmijmy, że $V_y \ll c$, ale $V_x \sim c$, wtedy:

$$\gamma_1 \, V_{1,y} = \gamma_2 \, V_{2,y}$$

$$\gamma_1 = 1 \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - V_2^2/c^2}}$$

Zasadę zachowania pędu możemy w naszym przypadku "uratować" modyfikując definicję:

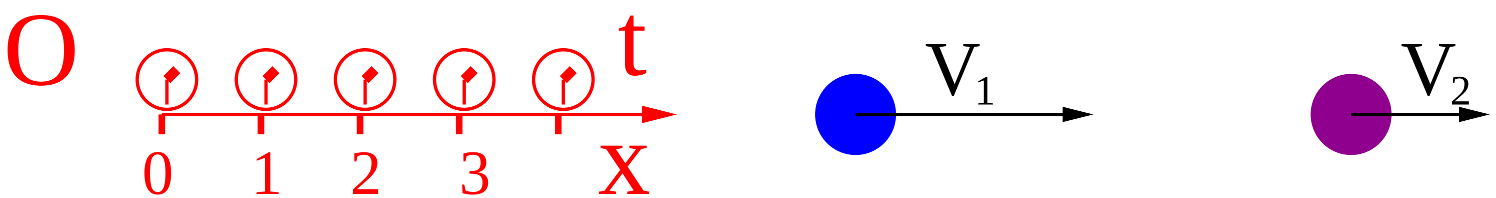
$$\vec{p} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v}$$

Czy tak zdefiniowany pęd jest zachowany w ogólnym przypadku?

Pęd cząstki

Wyrażenie na pęd dla cząstek relatywistycznych możemy też wyprowadzić z zasady względności (+ relatywistyczne składanie prędkości)

Wyobraźmy sobie dwie identyczne kule lecące (w układzie O) z prędkościami V_1 i V_2 wzdłuż osi X:

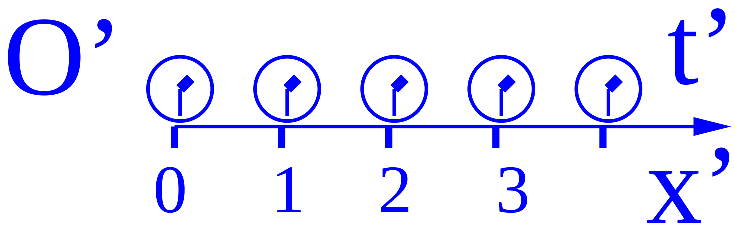


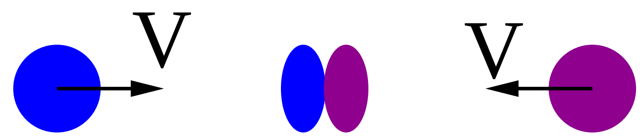
Przyjmijmy, że w którymś momencie ciało 1 dogania ciało 2 i zlepia się z nim.
Jaka będzie prędkość ciał po zlepieniu?

Klasycznie byłoby to $V_c = \frac{V_1+V_2}{2}$, co wynikało właśnie z zasady zachowania pędu...

Pęd cząstki

Przejdźmy do układu odniesienia O' związanego z powstającym "zlepkiem".





Ponieważ kule są identyczne z symetrii zagadnienia oczekujemy, że w układzie tym będą miały prędkości równe co do wartości, lecz przeciwnie skierowane.

Wiemy już jednak jak składają się prędkości!

Prędkości w układzie O' wyrażają się przez V_1 i V_2, oraz prędkość O względem O' ($-V_c$)
Ze wzoru na składanie prędkości:

$$V = \frac{V_1 - V_c}{1 - \frac{V_1 V_c}{c^2}} \quad \text{i} \quad -V = \frac{V_2 - V_c}{1 - \frac{V_2 V_c}{c^2}}$$

(wartość ujemna prędkości odpowiada zwrotowi przeciwnemu do osi X)

Rozwiązujemy ten układ równań, dla uproszczenia wprowadzając prędkości względne:

$$\beta_1 = \frac{V_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{V_2}{c}, \quad \beta_c = \frac{V_c}{c}$$

Pęd cząstki

Ostatecznie otrzymujemy: (pomijając dość żmudne przekształcenia)

$$\beta_c = \frac{\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Prędkość zlepionych kul poruszających się początkowo z prędkościami β_1 i β_2.

Dla symetrii pomnóżmy licznik i mianownik po lewej stronie przez γ_c:

$$\frac{\beta_c \gamma_c}{\gamma_c} = \frac{\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Wartość ułamka nie zmienia się jeśli licznik i mianownik pomnożymy przez tą samą liczbę (M dla lewej i m dla prawej strony):

$$\boxed{\frac{\beta_c \gamma_c M}{\gamma_c M} = \frac{\beta_1 \gamma_1 m + \beta_2 \gamma_2 m}{\gamma_1 m + \gamma_2 m}}$$

Pęd relatywistyczny

Ale M i m są dowolne! Możemy zawsze tak dobrać stosunek ich wartości, żeby także liczniki i mianowniki po obu stronach równania były sobie równe:

$$\beta_c \, \gamma_c \, M = \beta_1 \, \gamma_1 \, m + \beta_2 \, \gamma_2 \, m$$

$$\gamma_c \, M = \gamma_1 \, m + \gamma_2 \, m$$

Wychodząc z bardzo ogólnych założeń otrzymalismy dwa prawa zachowania!

Symetria + zasada względności + właściwy dobór współczynników M i m

Uogólniając na dowolną liczbę cząstek w stanie początkowym (ini) i końcowym (fin):

$$\sum_{i \in ini} \beta_i \, \gamma_i \, m_i = \sum_{j \in fin} \beta_j \, \gamma_j \, m_j$$

$$\sum_{i \in ini} \gamma_i \, m_i = \sum_{j \in fin} \gamma_j \, m_j$$

Czy możemy zidentyfikować poszczególne człony?

Pęd relatywistyczny

W granicy małych prędkości ($\beta \ll 1, \gamma = 1$) równania te sprowadzają sie do

$$c \sum_i \beta_i \, m_i = \sum_i m_i \, V_i = const \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

$$\sum_i m_i = const \quad \text{zasada zachowania masy}$$

Jak poprzednio dochodzimy do wniosku, że relatywistyczne wyrażenie na pęd cząstki to

$$\boxed{p = m \, c \, \gamma \, \beta = m \, \gamma \, V}$$

Wprowadzone współczynniki m są miarą bezwładności ciał i nazywamy je masą.

Jedną z mas mogliśmy ustalić dowolnie - wybór wzorca masy.

Masy pozostałych cząstek można następnie wyznaczyć w oddziaływaniu ze wzorcem (z wyprowadzonych praw zachowania).

Ruch pod wpływem stałej siły

Równanie ruchu

Chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie: $$\vec{p} = m\,\gamma\,\vec{v} = mc\,\gamma\,\vec{\beta}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

W przypadku ruchu prostoliniowego

$$F = \frac{d}{dt}(mc\,\gamma\,\beta) = mc\,\gamma^3\,\frac{d\beta}{dt}$$

$\Rightarrow$ przyspieszenie maleje jak γ^{-3} !

Rozwiązanie ruchu pod wpływem stałej siły elektrycznej $F = qE$:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{qE}{mc}(1-\beta^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{qE}{mc}\,dt$$

Całkujemy podstawiając $\beta = \sin u$:

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{qE}{mc}\int dt$$

$$\Rightarrow \quad \tan u = \frac{qE}{mc}\cdot t$$

przyjmując, że cząstka spoczywała w $t = 0$

Tożsamość trygonometryczna:

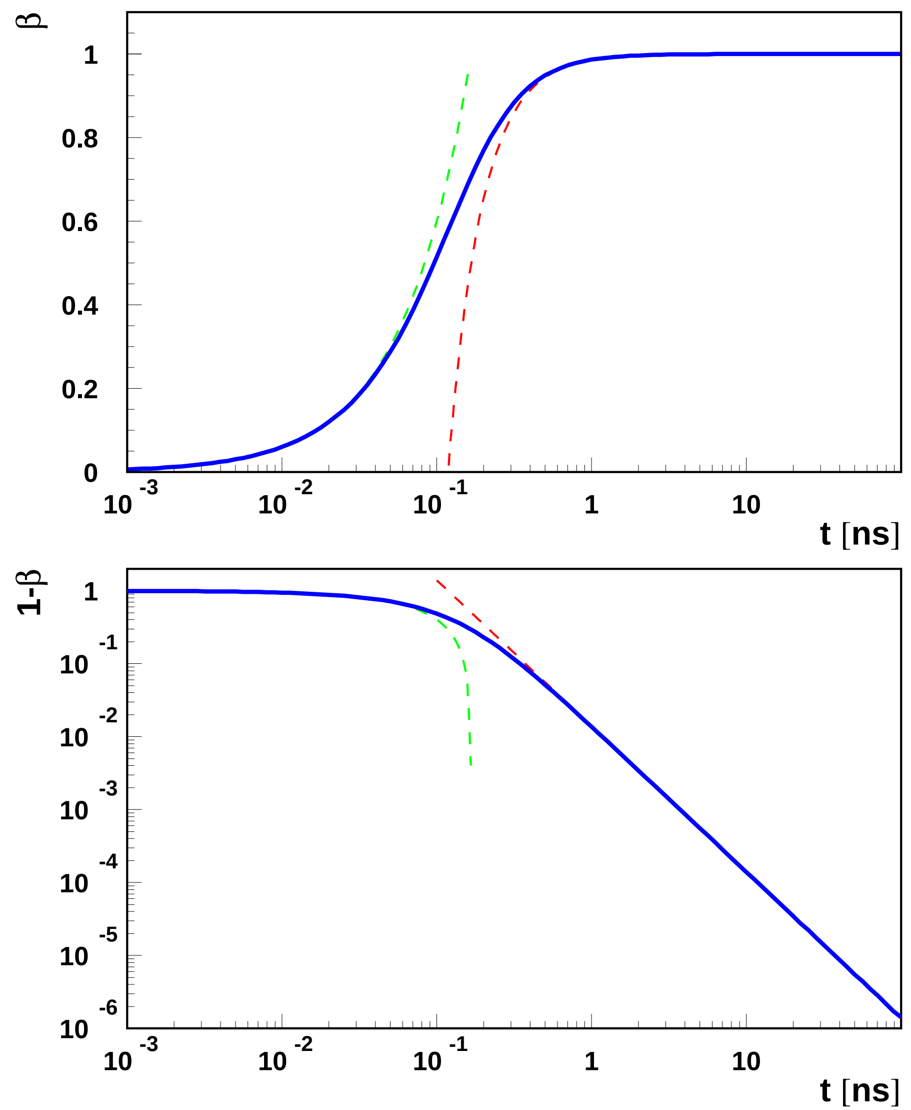
$$\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$$

Ruch pod wpływem stałej siły

Otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

gdzie: $\alpha = \frac{qE}{mc}$



W naszym przykładzie (e^- w polu $10\frac{MV}{m}$)

$\alpha \sim 6 \cdot 10^9\ s^{-1}$, $\alpha^{-1} \sim 0.17\ ns$

W granicy $\alpha\, t \gg 1$:

$$1 - \beta(t) \approx \frac{1}{2\alpha^2 t^2}$$

nigdy nie osiągniemy $\beta = 1$

Ale: $p(t) = mc\,\alpha \cdot t$ – rośnie $\sim\ t$!

Ruch pod wpływem stałej siły

Rozwiązując dalej otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\,\alpha t}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \int dx = \frac{c}{\alpha}\int \frac{\alpha t\, d(\alpha t)}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}}$$

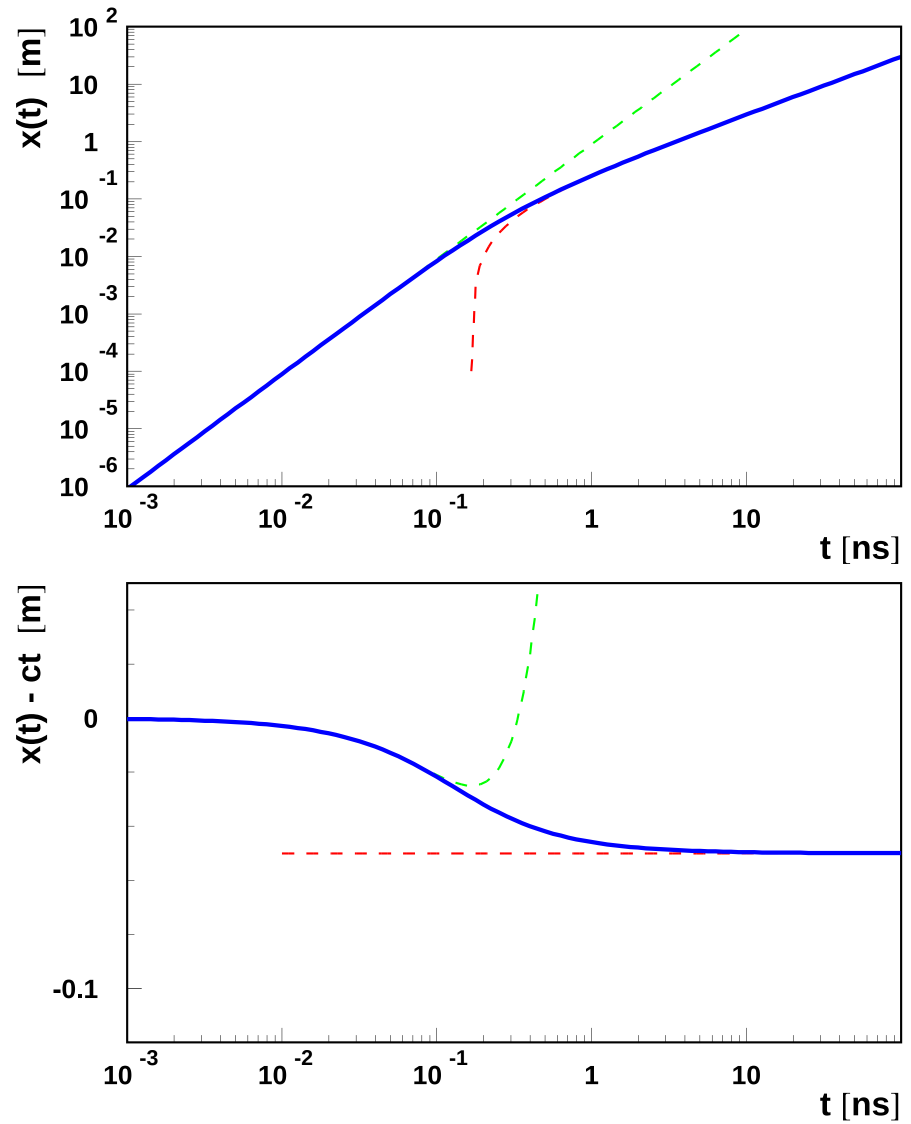
$$= \frac{c}{\alpha}\left(\sqrt{1+(\alpha t)^2} - 1\right)$$

W granicy $\alpha\, t \gg 1$:

$$x(t) \approx c\,t - \frac{c}{\alpha}$$

W naszym przykładzie:

światło wyprzedzi elektron tylko o 5 cm !!!



Energia relatywistyczna

Dla ruchu ciała pod wpływem stałej siły otrzymaliśmy:

$$x(t) = \frac{c}{\alpha}\left(\sqrt{1+(\alpha t)^2} - 1\right)$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}} \qquad \text{gdzie:} \qquad \alpha = \frac{F}{mc}$$

Można zauważyć, że:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \sqrt{1+(\alpha t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{mc^2}{F}(\gamma - 1)$$

Energia kinetyczna jest równa pracy wykonanej przez siłę:

$$E_k(t) = F \cdot x(t) = m\,c^2\,(\gamma(t) - 1)$$

Energia relatywistyczna

Uzyskaną zasadę zachowania:

$$\sum_i \gamma_i \, m_i \, c^2 \; = \; const$$

możemy więc przepisać w postaci:

$$\sum_i \left[m_i \, c^2 \, (\gamma_i - 1) \; + \; m_i \, c^2 \right] \; = \; const$$

$$\sum_i \left[\, E_{k,i} \; + \; E_{0,i} \, \right] \; = \; const$$

Gdzie: $E_k = m \, c^2 \, (\gamma - 1)$ - energia kinetyczna

$E_0 = m \, c^2$ - energia spoczynkowa ciała

Konieczność wprowadzenia energii spoczynkowej wynika z otrzymanej postaci zasady zachowania energii!

Energia całkowita: $\boxed{E \; = \; E_k \; + \; E_0 = \gamma \cdot m \, c^2}$

Energia relatywistyczna

Wyrażenie na energię kinetyczną

$$E_k \;=\; m\,c^2\,(\gamma - 1) \;=\; m\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

W granicy małych prędkości ($\beta \ll 1$) korzystamy ze wzorów na rozwinięcie w szereg:

$$\sqrt{1+\varepsilon} \;\approx\; 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \;\approx\; 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \gamma \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\approx\; 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$E_k \;=\; m\,c^2\,(\gamma - 1) \;=\; (1 + \frac{1}{2}\beta^2 \;-\; 1) \;=\; \frac{1}{2} m\,c^2\,\beta^2 \;=\; \frac{1}{2} m\,V^2$$

Odtwarzamy klasyczne wyrażenie na energię kinetyczną

Zasady zachowania energii i pędu

Energia całkowita ciała:

$$E = \gamma \cdot m\, c^2$$

pęd ciała:

$$\vec{p} = \gamma \cdot m\, \vec{V}$$

$$c\, \vec{p} = \vec{\beta}\, \gamma \cdot m\, c^2$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

Wychodząc z reguły składania prędkości (zasada bezwładności + zasada względności), wykorzystując symetrię rozważanego zagadnienia (zasada względności) oraz możliwość doboru współczynników opisujących bezwładność ciała (masę) otrzymaliśmy:

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i\, m_i\, c^2 = const$$

zasada zachowania enegrii

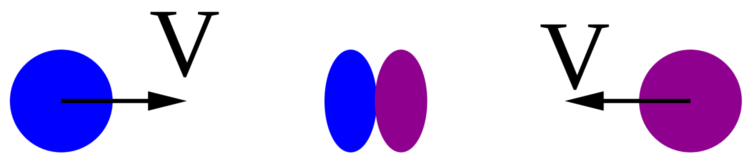
$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i\, \vec{V}_i = const$$

zasada zachowania pędu

Zasady te wyprowadziliśmy dla procesu zderzenia, ale okazuje się, że są one dużo bardziej ogólne. Zasady te obowiązują we wszystkich znanych nam procesach!!!

Zasady zachowania energii i pędu

Zasada zachowania energii ma jednak swoją “cenę”



Z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned} E_c &= E_1 + E_2 \\ M\,c^2 &= \gamma\,m\,c^2 + \gamma\,m\,c^2 \\ M &= 2\,\gamma\,m \end{aligned}$$

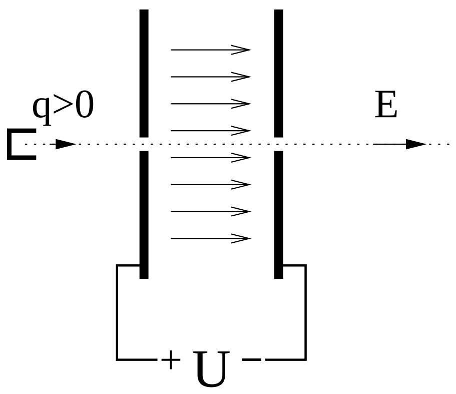
Masa “zlepka” jest większa niż suma mas cząstek! $M > m + m$

W świecie relatywistycznym przestaje obowiązywać zasada zachowania masy!

Energia kinetyczna zderzających się cząstek została zamieniona na energię wewnętrzną, co jest równoważne ze wzrostem masy (energii spoczynkowej) “zlepka”.

Energia relatywistyczna

Jednostki



$$\Delta E = U \cdot q$$

Naturalną jednostką w fizyce cząstek jest **1 elektronowolt**

1 eV - energia jaka zyskuje cząstka o ładunku **1 e** (ładunek elementarny) przy przejściu różnicy potencjału **1 V**.

$$1\ e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C \ \Rightarrow\ 1\ eV = 1.6 \cdot 10^{-19}\ J$$

Jednostki pochodne:

$$1keV = 10^3\ eV,\ 1MeV = 10^6\ eV,\ 1GeV = 10^9\ eV.$$

Jednostkę energii możemy też przyjąć za jednostkę masy ($E = mc^2$; $c \equiv 1$)

$$1\ eV/c^2 \equiv 1\ eV = 1.8 \cdot 10^{-36}\ kg$$

elektron	e	511 keV	($9.1 \cdot 10^{-31}$ kg)	kwark	t	173 GeV
proton	p	938 MeV	($1.7 \cdot 10^{-27}$ kg)	bozon	$W^{\pm}$	80.4 GeV
neutron	n	940 MeV			Z°	91.2 GeV

Energia relatywistyczna

Transformacja

Energia spoczynkowa cząstki:

$$E_\circ = m\,c^2$$

Energia całkowita:

$$E = E_\circ + E_k = m\,c^2 \cdot \gamma$$

Wyrażenie na pęd:

$$p = m\,c \cdot \beta\,\gamma$$

W układzie własnym cząstki:

$$p_\circ = 0$$

Zgodnie z definicją układu środka masy.

Możemy zauważyć, że:

$$\begin{aligned} E &= \gamma\,E_\circ \\ p\,c &= \beta\,\gamma\,E_\circ \end{aligned}$$

Jeśli cząstka porusza się wzdłuż osi X:

$$\begin{aligned} E &= \gamma\,E_\circ \\ c\,p_x &= \beta\,\gamma\,E_\circ \\ c\,p_y &= 0 \\ c\,p_z &= 0 \end{aligned}$$

Energia relatywistyczna

Transformacja

Formalnie możemy zapisać:

$(p_\circ = p_{\circ,x} = p_{\circ,y} = p_{\circ,z} = 0)$

$$\begin{pmatrix} E \\ c\,p_x \\ c\,p_y \\ c\,p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\, E_\circ + \gamma\,\beta\, c\,p_{\circ,x} \\ \gamma\,\beta\, E_\circ + \gamma\, c\,p_{\circ,x} \\ c\,p_{\circ,y} \\ c\,p_{\circ,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_\circ \\ c\,p_{\circ,x} \\ c\,p_{\circ,y} \\ c\,p_{\circ,z} \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że energia i pęd podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji Lorenza identycznej z transformacją czasu i położenia.

Zamiast transformować niezależnie energię i pęd układu, należy rozważać czterowektor energii-pędu:

$$\mathcal{E} = (E, c\vec{p}) = (E, cp_x, cp_y, cp_z)$$

Masa niezmienicza

Niezmiennik transformacji

Z definicji czynnika Lorenza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

$$\gamma^2 E_\circ^2 - \beta^2\gamma^2 E_\circ^2 = E_\circ^2$$

$$\boxed{E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4}$$

niezależnie od prędkości cząstki,

czyli niezależnie od układu odniesienia

Wyrażenie:

$$s = M^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorenza dla dowolnego układu fizycznego (nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$M \equiv \sqrt{s}$ - masa niezmienicza układu (masa inwariantna)

Kluczowa wielkość w opisie zderzeń relatywistycznych...

Energia relatywistyczna

Transformacja Lorenza

Transformacja Lorenza ma zastosowanie do wszystkich czterowektorów:

- czterowektor położenia (w czasoprzestrzeni): (ct, x, y, z)
- czterowektor energii-pędu ("czteropęd"): (E, cp_x, cp_y, cp_z)
- czteropotencjał pola elektromagnetycznego: (Φ, A_x, A_y, A_z)

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

- różnica dwóch czterowektorów (np. odstęp między zdarzeniami, przekaz czteropędu...)

Niezmiennikiem transformacji Lorenza jest "kwadrat" każdego czterowektora

$$\left|A^{(4)}\right|^2 = A_0^2 - \left|\vec{A}\right|^2 = A_0^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2$$

- zmiana położenia ⇒ interwał: $s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- energia-pęd ⇒ masa niezmiennicza: $M^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$

Transformacja energii-pędu

Przykład

Rakieta lecąca w kierunku Ziemi z prędkoscią $v = 0.6$ c wystrzeliwuje w jej kierunku wiązkę protonów o energii $E = 100$ GeV. Masa protonu $m = 1GeV/c^2$.

Jaką energię protonów zmierzy obserwator na Ziemi?

Pęd protonu w układzie rakiety (z definicji masy niezmienniczej):

$$pc \;=\; \sqrt{E^2 - m^2c^4} = 99.9950GeV \qquad pc \approx E = 100GeV$$

Współczynniki transformacji:

$$\beta = 0.6 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.25 \qquad \beta\gamma = 0.75$$

Energia w układzie Ziemi:

$$E' = \gamma E + \beta\gamma pc \;\approx\; (\gamma + \beta\gamma)E = 2E = 200GeV$$

Masa niezmiennicza

Przykład

Jaka jest masa cząstki, która poruszając się z energią kinetyczną $E_k = 1.6$ GeV ma pęd $p = 2.4$ GeV/c ?

Z definicji masy niezmienniczej dla pojedynczej cząstki:

$$m^2c^4 \;=\; E^2 \;-\; p^2c^2$$

Energię całkowitą wyrażamy przez energię kinetyczną:

$$m^2c^4 \;=\; (mc^2 + E_k)^2 \;-\; p^2c^2$$
$$m^2c^4 \;=\; m^2c^4 + 2E_k mc^2 + E_k^2 \;-\; p^2c^2$$

Otrzymujemy:

$$mc^2 \;=\; \frac{p^2c^2 - E_k^2}{2E_k} = \frac{(pc + E_k)(pc - E_k)}{2E_k} = \frac{4GeV \cdot 0.8GeV}{2 \cdot 1.6GeV} = 1GeV$$

Dynamika relatywistyczna

Układ środka masy

Energia układu cząstek: $E = \sum_i E_i$

Pęd układu cząstek: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

Masa niezmiennicza: M

Jak znaleźć układ środka masy $\vec{P}^\star = 0$?

Wiemy, że w CMS $E^\star = M, \; P^\star \equiv 0$

Energia i pęd wiążą się z $E^\star$ i $P^\star$ przez transformacje Lorentza:

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} E &= \gamma\, M \\ c\, P &= \beta\, \gamma\, M \end{aligned}$$

Otrzymujemy związki na współczynniki transformacji do układu środka masy:

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= \frac{c\, P}{E} \\ \gamma &= \frac{E}{M\, c^2} \\ \beta\, \gamma &= \frac{P}{M\, c} \end{aligned}}$$

obowiązują zarówno dla pojedyńczej cząstki jak i dowolnego układu cząstek

Dynamika relatywistyczna

Przykład

Z jaką prędkością porusza się elektron o energii $E = 1GeV$ ($m_e \approx 0.5MeV$)?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{m} = 2000 \qquad c \equiv 1$$

$$1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{m^2}{E^2} \ll 1$$

Widać, że $\beta \approx 1$, policzmy więc różnicę:

$$1+\beta \approx 2 \quad \Rightarrow \quad 1-\beta = \frac{1-\beta^2}{1+\beta} \approx \frac{1}{2\,\gamma^2} = \frac{m^2}{2\,E^2} = 1.25 \cdot 10^{-7}$$

Pęd elektronu:

$$p = \beta\gamma m = \beta E \approx E \qquad E - p = (1-\beta)E \approx 10^{-7}E$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = (\gamma - 1)m = E - m \approx E \qquad E - E_k = m = \frac{1}{\gamma}E = 5 \cdot 10^{-4}E$$

Przybliżenie ultrarelatywistyczne: $\gamma \gg 1$, $E \gg m \Rightarrow E \approx pc \approx E_k$

Zderzenia relatywistyczne

W przypadku nierelatywistycznym zderzenia dzieliliśmy na:

- zderzenia elastyczne
  Zachowany pęd i energia kinetyczna.
- zderzenia nieelastyczne
  Zachowany pęd.
  Energia kinetyczna zamieniana (częściowo) na inne formy energii (zazwyczaj ciepło).

W przypadku relatywistycznym energia całkowita i pęd są zawsze zachowane !

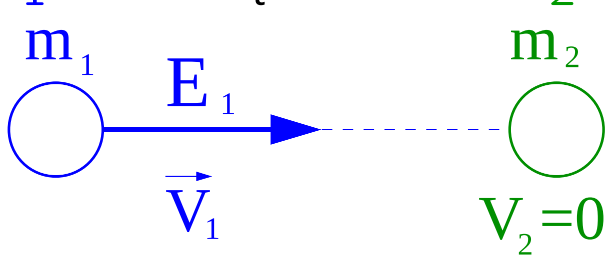
Musimy zmodyfikować klasyfikację zderzeń:

- Zderzenia elastyczne $2 \rightarrow 2$
  Cząstki po zderzeniu takie same jak cząstki zderzające się.
  W szczególności: $m'_1 = m_1$ i $m'_2 = m_2$ np. $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
- Zderzenia nieelastyczne
  Gdy cząstki w stanie końcowym są inne niż przed zderzeniem.
  np. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Zderzenia relatywistyczne

Rozpraszanie elastyczne

Rozważmy zderzenie “pocisku” o masie m_1 i energii E_1 z “tarczą” o masie m_2.



Dla układu dwóch ciał mamy: $(c \equiv 1)$

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

$$\begin{aligned} M^2 = E^2 - P^2 &= (E_1 + m_2)^2 - P_1^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\,E_1\,m_2 \end{aligned}$$

Transformacja do układu środka masy:

$$\beta = \frac{P}{E} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1 + m_2}$$

$$\gamma = \frac{E}{M} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{2\,E_1\,m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

$$\beta\gamma = \frac{P}{M} = \sqrt{\frac{E_1^2 - m_1^2}{2\,E_1\,m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

Zderzenia relatywistyczne

Rozpraszanie elastyczne

Pęd obu ciał w układzie środka masy:

$$p_1^\star = p_2^\star = \beta\gamma\, m_2 = \frac{P}{M} m_2$$

$$(p^\star)^2 = \frac{(E_1^2 - m_1^2)\, m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\, E_1\, m_2}$$

Energie w układzie środka masy:

$$E_2^\star = \gamma\, m_2 = \frac{E}{M} m_2$$

$$= \frac{(E_1 + m_2) m_2}{\sqrt{2\, E_1\, m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

$$E_1^\star = M - E_2^\star$$

$$= \frac{E_1 m_2 + m_1^2}{\sqrt{2\, E_1\, m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

Jeśli spełniona ma być zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii to tak jak w przypadku klasycznym:

$$p_1^\star = p_2^\star = p_1'^\star = p_2'^\star$$

W układzie środka masy wartości pędów nie ulegają zmianie.

Warunek: $m_1' = m_1$ i $m_2' = m_2$!!!

Rozpraszanie elastyczne

Zderzenia relatywistyczne

$m_1 = m_2$

Dla zderzeń cząstek o równej masie:

$$
\begin{aligned}
E &= E_1 + m \\
P = P_1 &= \sqrt{E_1^2 - m^2} \\
M^2 &= E^2 - P^2 = 2\,E_1\,m + 2\,m^2
\end{aligned}
$$

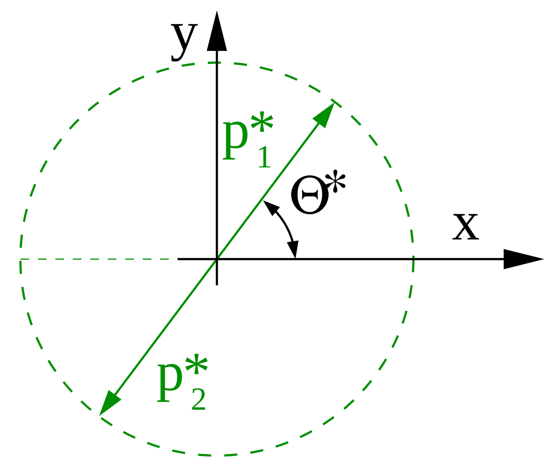
$\Rightarrow$ współczynniki transformacji:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{\frac{E_1 + m}{2m}} \\
\beta &= \sqrt{\frac{E_1 - m}{E_1 + m}} \\
\beta\,\gamma &= \sqrt{\frac{E_1 - m}{2m}}
\end{aligned}
$$

Energia i pęd obu ciał w układzie środka masy:

(z transformacji Lorenza dla spoczywającego ciała)

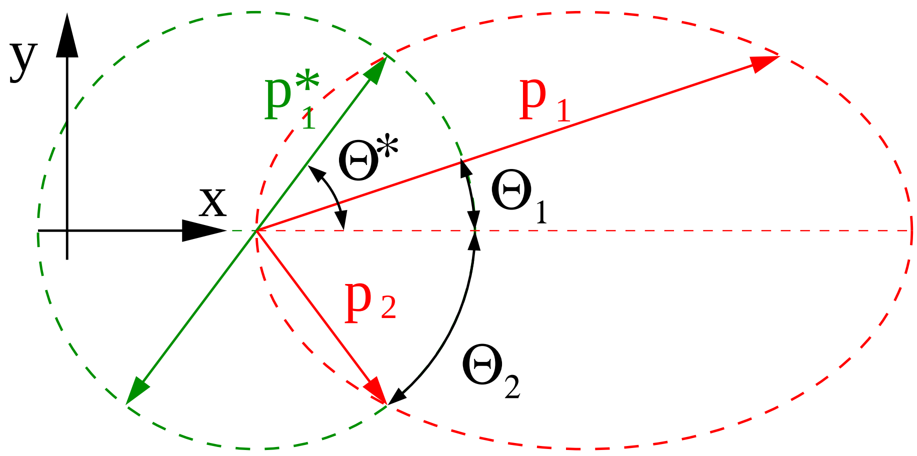
$$
\begin{aligned}
p^\star &= \gamma\,\beta\,m \\
E^\star &= \gamma\,m \\
(p^\star)^2 &= \frac{1}{2}\,m\,(E_1 - m) \\
(E^\star)^2 &= \frac{1}{2}\,m\,(E_1 + m)
\end{aligned}
$$



Zderzenia relatywistyczne

$m_1 = m_2$

W układzie środka masy rozproszenie opisuje kąt $\theta^\star$:



$$\begin{aligned} p^\star_{1,x} &= \gamma\,\beta\,m\,\cos\theta^\star \\ p^\star_{1,y} &= \gamma\,\beta\,m\,\sin\theta^\star \\ E^\star_1 &= \gamma\,m \end{aligned}$$

Transformacja do układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma\,p^\star_{1,x} + \gamma\,\beta\,E^\star_1 \\ &= \gamma^2\,\beta\,m\,(1+\cos\theta^\star) \\ p_{1,y} &= \gamma\,\beta\,m\,\sin\theta^\star \end{aligned}$$

$$\gamma^2\,\beta\,m = \frac{1}{2}P$$

Możliwe wartości $p_{1,x}$ i $p_{1,y}$ spełniają:

$$\gamma^2\,p^2_{1,y} + \left(p_{1,x} - \frac{P}{2}\right)^2 = \left(\frac{P}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ elipsa

transformacja Lorenza "spłaszcza" rozkład pędów wzdłuż kierunku ruchu pocisku.

Zderzenia relatywistyczne

$m_1 = m_2$

Kąty rozproszenia mierzone w LAB:

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta^\star}{\gamma(1+\cos\theta^\star)}$$

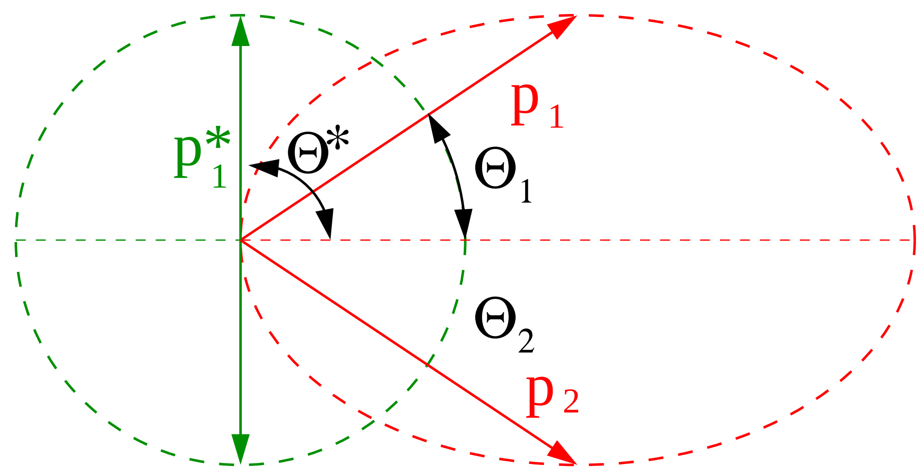
$$\tan\theta_2 = \frac{\sin\theta^\star}{\gamma(1-\cos\theta^\star)}$$

Kąt pomiędzy cząstkami:

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{2\gamma}{\sin\theta^\star\,(\gamma^2-1)}$$
$$\rightarrow \frac{2}{\gamma\,\sin\theta^\star} \rightarrow 0 \quad \text{dla } \gamma\rightarrow\infty$$

Dla rozproszenia z $\theta^\star = \frac{\pi}{2}$

$$\tan\theta = \frac{1}{\gamma} < 1$$



$$\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

W granicy ultrarelatywistycznej rozproszenie zachodzi pod bardzo małymi kątami

Zderzenia relatywistyczne

Przykład

Elektron o energii $E = 10$ GeV rozprasza się elastycznie na spoczywającym elektronie ($m_e = 0.5$ MeV). Jaki kąt rozproszenia zostanie zmierzony w układzie laboratoryjnym jeśli w CMS rozproszenie nastapiło pod kątem prostym?

Masa niezmiennicza układu

$$M \; = \; \sqrt{2\,E\,m \, + \, 2\,m^2} \approx \sqrt{2\,E\,m} \; = \; 100 MeV$$

Współczynnik transformacji:

$$\gamma = \frac{E+m}{M} \;\approx\; \frac{E}{M} = 100 \qquad \beta \approx 1 \qquad 1-\beta \approx 5 \cdot 10^{-5}$$

Energia i pęd w CMS: $E^\star \; = \; \gamma m \; = \; 50 MeV \qquad p^\star \approx E^\star$

Transformacja do LAB: $(p_x^\star = 0,\, p_y^\star = p^\star)$

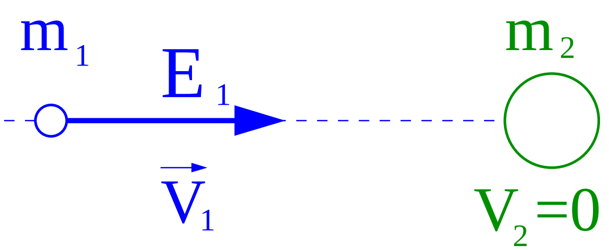
$$p_x = \beta\gamma E^\star + \gamma p_x^\star \approx \gamma E^\star \qquad p_y = p_y^\star \approx E^\star$$

$$\tan\theta \; = \; \frac{p_y}{p_x} \; = \; \frac{1}{\gamma} \; = \; 0.01 \qquad \theta \approx 0.6^\circ$$

Zderzenia relatywistyczne

$m_1 \ll E_1 \sim m_2$

Rozważmy zderzenie elastyczne z ciężką "tarczą" lekkiego "pocisku" ($m_1 \ll m_2$) o wysokiej energii ($E_1 \sim m_2$)



Sytuacja z jaką często mamy do czynienia w zderzeniach fizyki cząstek (rozpraszanie elektonów, mionów lub neutrin na tarczach jądrowych).

Pomijając wyrazy z m_1 mamy:

$$E = E_1 + m_2$$

$$P = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \approx E_1$$

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\, E_1\, m_2$$
$$\approx 2\, E_1\, m_2 + m_2^2$$

Zderzenia relatywistyczne

$m_1 \ll E_1 \sim m_2$

Współczynniki transformacji do układu środka masy: $(m_1 \to 0)$

$$\gamma = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{2E_1 m_2 + m_2^2}}$$

$$\beta = \frac{E_1}{E_1 + m_2}$$

$$\beta\,\gamma = \frac{E_1}{\sqrt{2E_1 m_2 + m_2^2}}$$

$$\Rightarrow \quad p^\star = \beta\,\gamma\,m_2 = \frac{E_1 m_2}{\sqrt{2E_1 m_2 + m_2^2}}$$

Transformacja rozproszonego pocisku do układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma\,p^\star_{1,x} + \gamma\,\beta\,E^\star_1 \\ &= \gamma\,p^\star(\beta + \cos\theta^\star) \\ p_{1,y} &= p^\star\ \sin\theta^\star \end{aligned}$$

Możliwe wartości $p_{1,x}$ i $p_{1,y}$ spełniają:

$$\left(\gamma\,p_{1,y}\right)^2 + \left(p_{1,x} - \gamma\,\beta\,p^\star\right)^2 = (\gamma p^\star)^2$$

$\Rightarrow$ elipsa

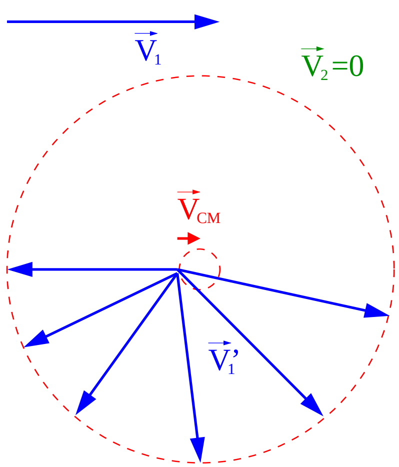
W granicy $\beta \to 1$ $(E_1 \gg m_2)$ pocisk rozprasza się zawsze "do przodu" !
$(p_{1,x} \geq 0)$

Zderzenia elastyczne

Nierelatywistyczne

W granicy $m_1 \ll m_2$ tarcza przejmuje bardzo niewielką część energii pocisku.

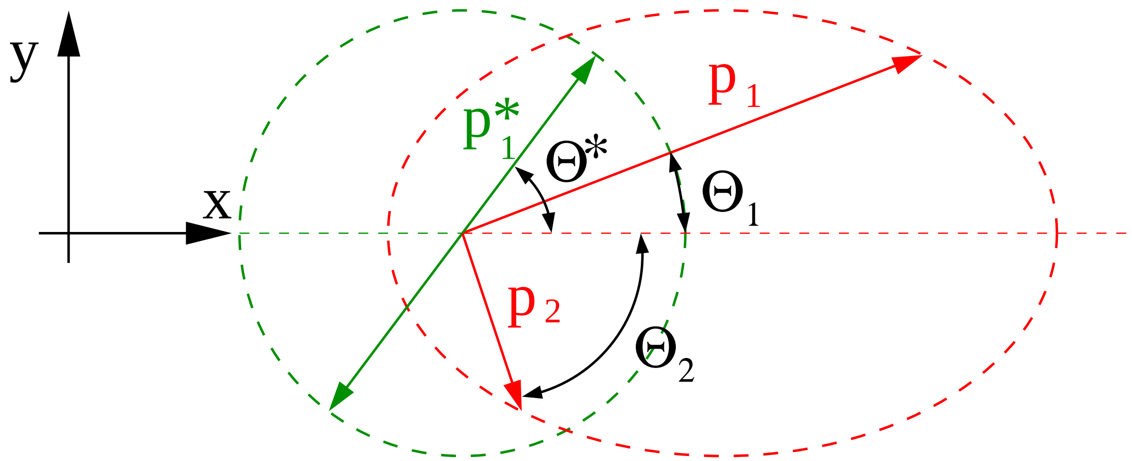
Rozproszony pocisk ma praktycznie niezmienioną energię i wartość pędu.



Rysunek dla $m_2 = 10\, m_1$

Relatywistyczne

Nawet dla $m_1 \ll m_2$, jeśli $E_1 \sim m_2$ pocisk może przekazać tarczy znaczną część swojej energii.



Rysunek dla $E_1 = 3\, m_2, \;\; m_1 = 0.$

Dla $E_1 \gg m_2$ nawet bardzo lekka sonda może "wybić" cząstkę tarczy...

Zderzenia relatywistyczne

Przykład

Elektron o energii $E_e = 50$ GeV rozprasza się na spoczywającym protonie ($m_p = 1$ GeV). Jaka jest maksymalna energia jaką może uzyskać proton?

Masa niezmiennicza układu

$$M \;=\; \sqrt{2\,E_e\,m_p \,+\, m_p^2} \approx \sqrt{2\,E_e\,m_p} \;=\; 10 GeV \qquad 10.05 GeV$$

Współczynnik transformacji:

$$\gamma = \frac{E_e + m_p}{M} \;=\; 5.1 \qquad 5.075 \qquad\qquad \beta\gamma = \frac{p_e}{M} = 5 \qquad 4.975$$

Energia i pęd protonu w CMS:

$$E_p^\star \;=\; \gamma m_p \;=\; 5.1\,GeV \qquad\qquad p^\star = \beta\gamma m = \; 5\,GeV$$

Transformacja do LAB: (maksymalna energia gdy $p_x^\star = p^\star$)

$$E' \;=\; \gamma E^\star + \beta\gamma p_x^\star \;=\; \gamma^2 m_p + \beta^2\gamma^2 m_p \approx 51\,GeV \qquad 50.50\,GeV$$

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. W ruchu pod wpływem stałej siły, w przypadku relatywistycznym
   A energia jest stała B pochodna pędu jest stała C przyspieszenie jest stałe
   D prędkość jest stała

2. Relatywistyczny związek między masą i energią kinetyczną to
   A $E_k = mc^2\gamma(1-\beta)$ B $E_k = mc^2(\gamma - 1)$ C $E_k = mc^2\beta\gamma$ D $E_k = mc^2\gamma$

3. Cząstka o masie $m = 3\ GeV/c^2$ ma energię kinetyczną $E_k = 2\ GeV$. Prędkość tej cząstki wynosi
   A $0.9c$ B $0.8c$ C $0.2c$ D $0.6c$

4. W przypadku relatywistycznym prędkość układu środka masy β możemy wyrazić jako ($c = 1$)
   A $\frac{P}{E}$ B $\frac{P}{M}$ C $\frac{E}{M}$ D $\frac{E}{P}$

5. W zderzeniu elastycznym cząstki poruszającej się z $v \approx c$ ze spoczywającą tarczą o takiej samej masie suma kątów rozproszenia jest
   A większa niż $\frac{\pi}{2}$ B dowolna C mniejsza niż $\frac{\pi}{4}$ D mniejsza niż $\frac{\pi}{2}$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego