



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Dynamika relatywistyczna

## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład XIV:

- zasady zachowania (przypomnienie)
- cząstki elementarne
- rozpady cząstek
- rozpraszanie nieelastyczne
- foton jako cząstka, efekt Dopplera i efekt Comptona

# Dynamika relatywistyczna

## Zasady zachowania

Relatywistyczne wyrażenie na pęd cząstki:

$$\vec{p} = m c \gamma \vec{\beta} = m \gamma \vec{V} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

Relatywistyczne wyrażenia na energię cząstki:

energia kinetyczna	$E_k = m c^2 (\gamma - 1)$	nie zachowana
energia spoczynkowa	$E_0 = m c^2$	nie zachowana
energia całkowita	$E = m c^2 \gamma$	zachowana !!!

Dla dowolnego izolowanego układu obowiązują zawsze:

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i m_i c^2 = \text{const} \quad \text{zasada zachowania energii}$$

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i \vec{V}_i = \text{const} \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

# Dynamika relatywistyczna

## Transformacja

Zamiast rozważać niezależnie energię i pęd układu, wygodnie jest wprowadzić czterowektor energii-pędu:

$$\mathcal{E} = (E, c\vec{p}) = (E, cp_x, cp_y, cp_z)$$

Przy zmianie układu odniesienia, czterowektor energii-pędu podlega transformacji Lorentza identycznej z transformacją dla współrzędnych czasoprzestrzennych zdarzeń.

$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E' + \gamma \beta c p'_x \\ \gamma \beta E' + \gamma c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E' \\ c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix}$$

energia  $\Leftrightarrow$  czas  
pęd  $\Leftrightarrow$  położenie

# Dynamika relatywistyczna

## Masa niezmiennicza

Niezmiennik transformacji Lorentza, (nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$$M^2 c^4 = s = E^2 - p^2 c^2$$

Dla dowolnego izolowanego układu fizycznego masa niezmiennicza jest zachowana (nie zmienia się w czasie). Wynika to z zasady zachowania energii i pędu.

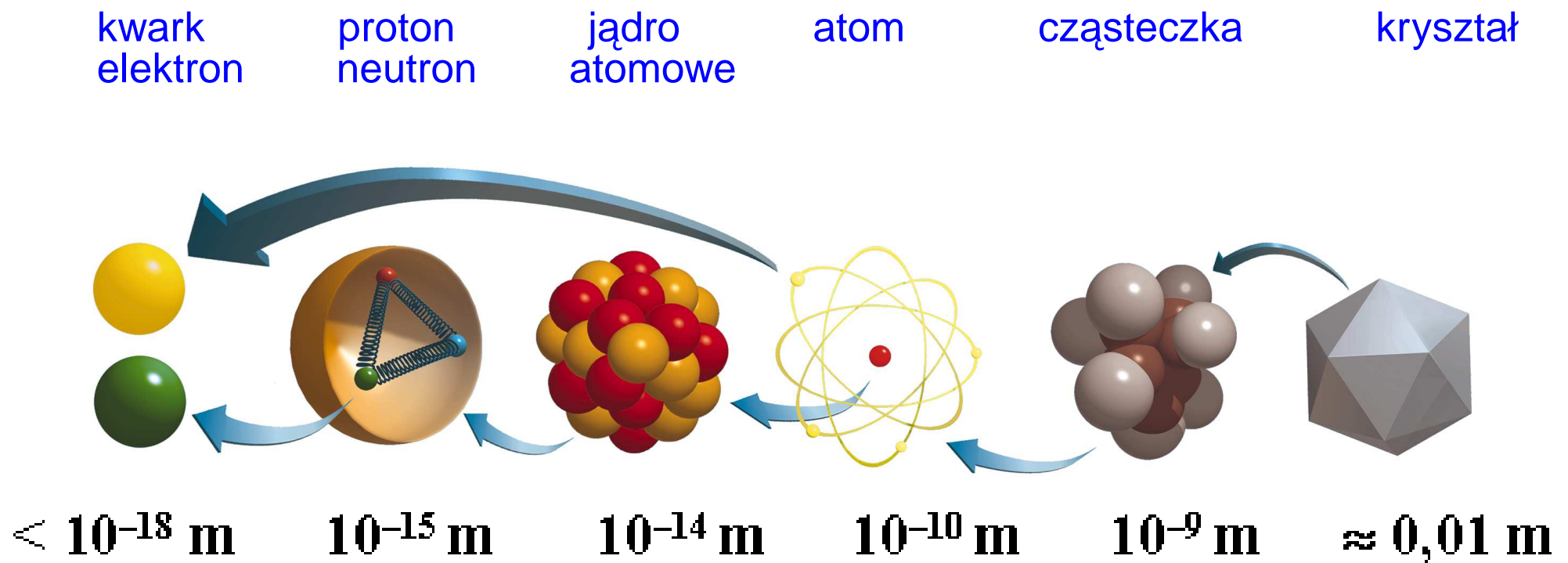
⇒ podstawowe pojęcie w analizie zderzeń relatywistycznych, zwłaszcza w procesach nieelastycznych (produkcja nowych cząstek)

Masa niezmiennicza jest tożsama z energią układu w układzie środka masy ( $P^* = 0$ ). Dla zderzających się cząstek mówimy o **energii dostępnej** (w układzie środka masy).

Dla pojedynczej cząstki masa niezmiennicza jest tożsama z masą cząstki (energią spoczynkową).

# Świat cząstek elementarnych

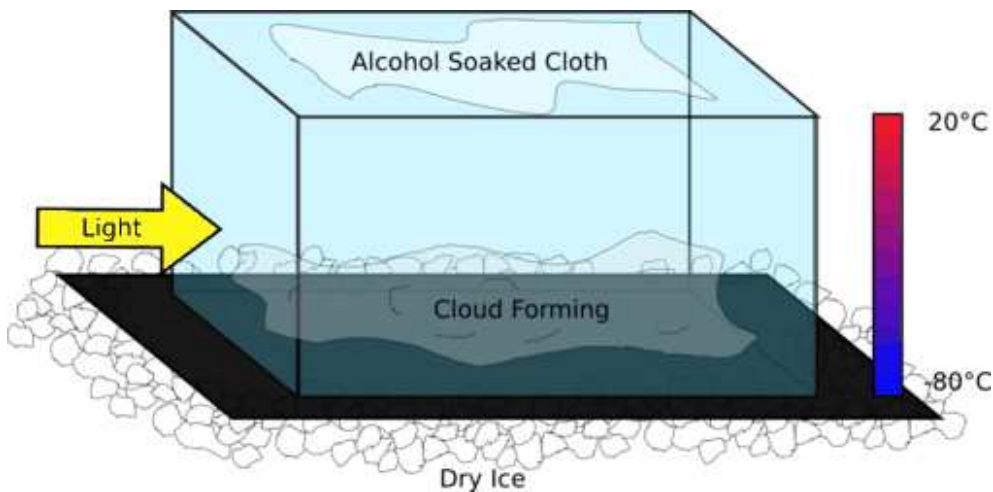
## Budowa materii



# Świat cząstek elementarnych

## Pokaz: komora mgłowa (Komora Wilsona)

Tuż nad dnem komory **pary alkoholu** wchodzi w stan **przechłodzenia**. Gdy przez komorę przejdzie **naładowana cząstka**, na powstałych jonach powietrza następuje **kondensacja** par alkoholu i w rezultacie obserwujemy smugę mgły układającą się wzdłuż **toru cząstki**. Obserwację mgły ułatwia **właściwe oświetlenie**.



# Świat cząstek elementarnych

## Fermiony

świat “codzienny” zbudowany jest z 3 “cegielek” (elektron oraz kwarki  $u$  i  $d$ )

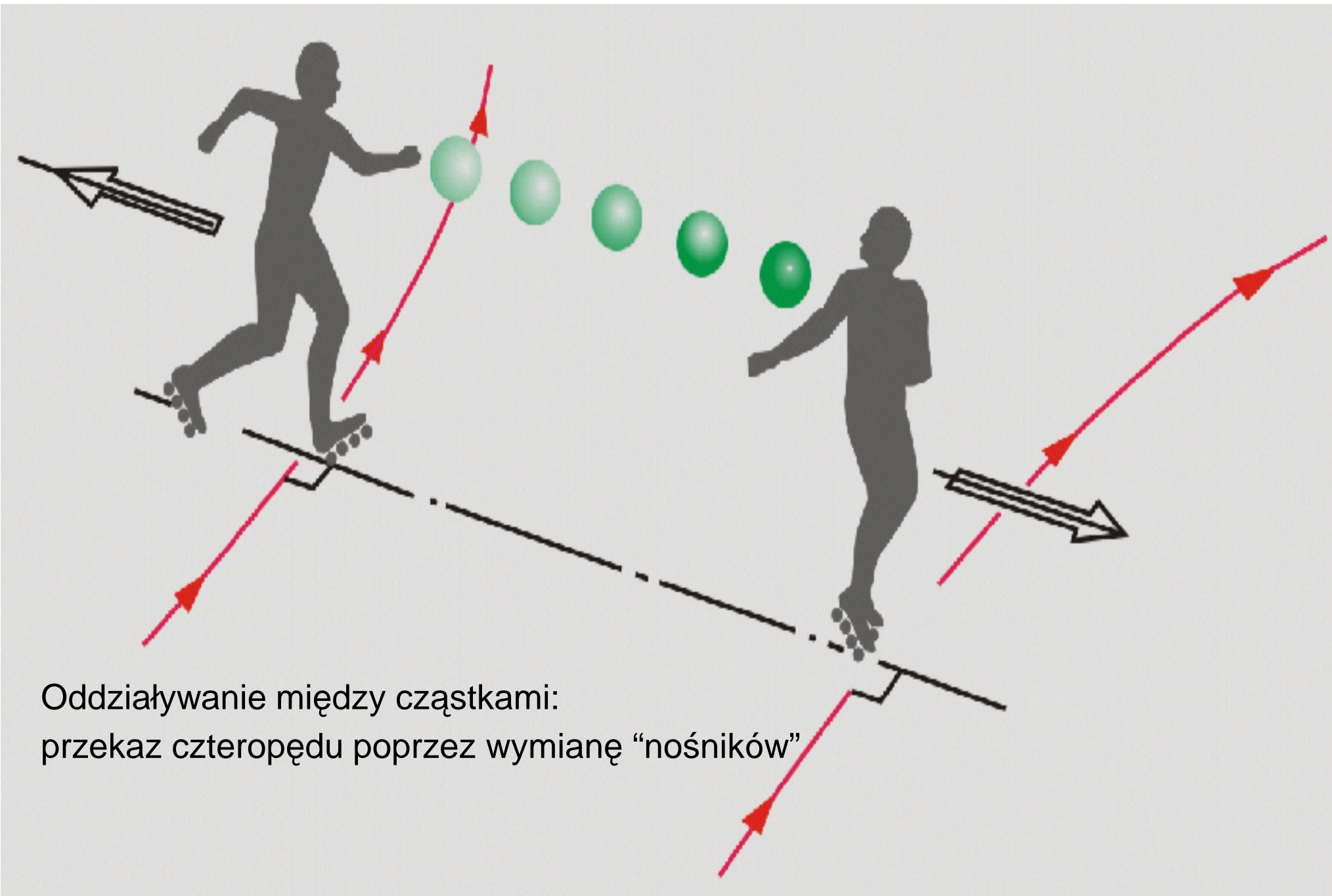
Nukleony składają się z 3 kwarków: proton ( $uud$ ), neutron ( $udd$ ).

Fizyka cząstek znalazła już jednak 12 fundamentalnych “cegielek” materii, **fermionów** (cząstek o spinie  $1/2$ )

	leptony		kwarki	
pokolenie 1	$e$ <i>elektron</i>	$\nu_e$ <i>neutrino el.</i>	$d$ <i>down</i>	$u$ <i>up</i>
pokolenie 2	$\mu$ <i>mion</i>	$\nu_\mu$ <i>neutrino mionowe</i>	$s$ <i>strange</i>	$c$ <i>charm</i>
pokolenie 3	$\tau$ <i>taon</i>	$\nu_\tau$ <i>neutrino taonowe</i>	$b$ <i>beauty</i> <i>(bottom)</i>	$t$ <i>top</i> <i>(truth)</i>
ładunek [e]	-1	0	-1/3	+2/3

Wszystkie **leptony** obserwujemy jako cząstki swobodne

**Kwarki** są zawsze “uwięzione” w **hadronach** (cząstkach oddziałujących silnie)



Oddziaływanie między cząstkami:  
przekaz czteropędu poprzez wymianę "nośników"



# Świat cząstek elementarnych

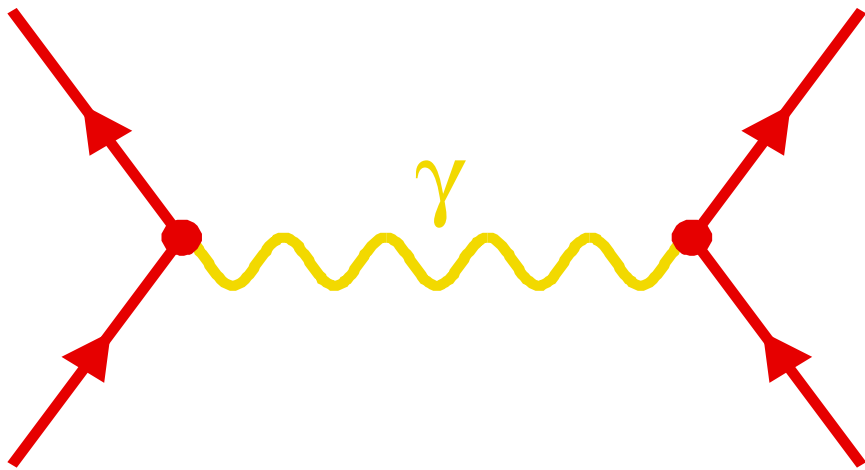
## Bozony

“Cegiełki” materii oddziałują ze sobą poprzez wymianę **nośników oddziaływań**

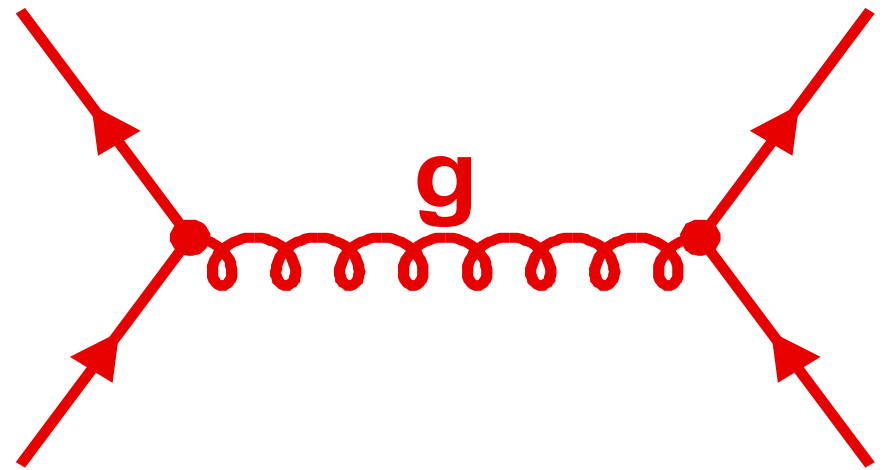
Nośnik przekazuje część energii i/lub pędu jednej cząstki drugiej cząstce

<i>oddziaływanie</i>	<i>źródło</i>	<i>nośnik</i>		<i>moc</i>
grawitacyjne	masa	grawiton	G	$10^{-39}$
elektromagnetyczne	ładunek	foton	$\gamma$	$10^{-2}$
silne	“kolor”	gluony	$g$	1
słabe	“ładunek słaby”	“bozony pośredniczące”	$W^{\pm}, Z^0$	$10^{-7}$

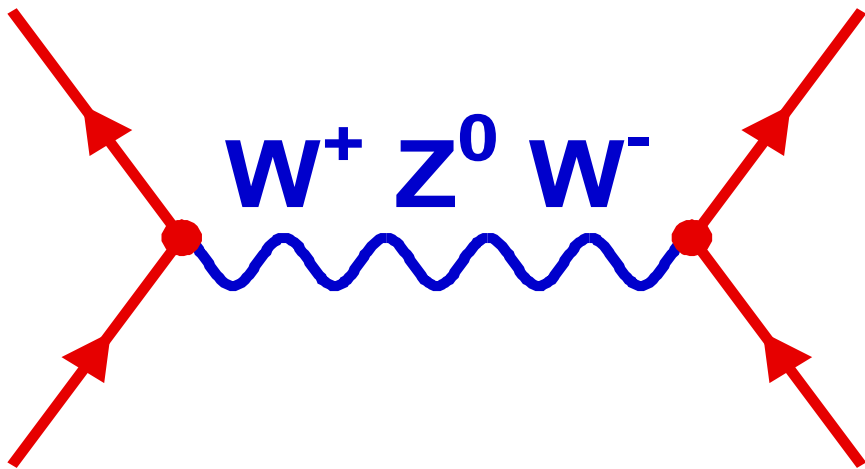
“moc” - przykładowe porównanie wielkości oddziaływań dla dwóch sąsiadujących protonów



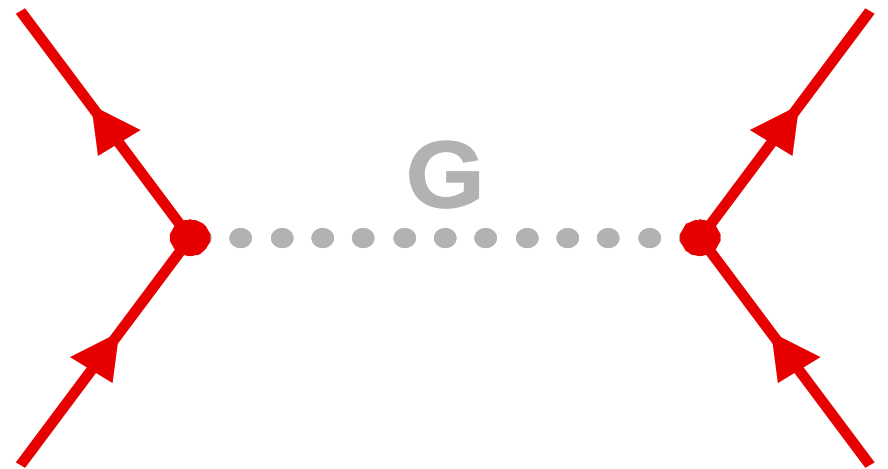
**elektromagnetyczne**



**silne**



**slabe**



**grawitacyjne**

# Zderzenia relatywistyczne

## Zderzenia elastyczne $2 \rightarrow 2$

Cząstki rozproszone takie same jak cząstki zderzające się.

W szczególności:  $m'_1 = m_1$  i  $m'_2 = m_2$

W zderzeniach cząstek wysokiej energii jest to jednak wyjątek (!)

## Zderzenia nieelastyczne

W oddziaływaniach cząstek elementarnych, zwłaszcza przy wysokiej energii, obserwujemy bardzo wiele reakcji, w których powstają nowe cząstki:

- Rozpady cząstek:  $a \rightarrow b + c$
- Produkcja pojedynczej cząstki (tzw. “rezonansu”):  $a + b \rightarrow c$
- Rozproszenie nieelastyczne dwóch cząstek:  $a + b \rightarrow c + d$   
jedna z cząstek na końcu może być cząstką stanu początkowego
- Produkcja wielu cząstek:  $a + b \rightarrow X$   
gdzie  $X$  oznacza dowolny stan wielocząstkowy

# Rozpady cząstek

Rozważmy rozpad cząstki o masie  $M$  na  $n$  cząstek o masach  $m_i$  ( $i = 1 \dots n$ ).

Masa niezmiennicza przed rozpadem:  $\mathcal{M}_i = M$ . Masa niezmiennicza po rozpadzie:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f^2 &= \left( \sum_i E_i \right)^2 - \left( \sum_i \vec{p}_i \right)^2 \\ &= \sum_i E_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} E_i E_j - \sum_i p_i^2 - 2 \sum_i \sum_{j>i} \vec{p}_i \vec{p}_j\end{aligned}$$

Dla dowolnej pary cząstek  $i, j$  mamy:  $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$

$$\begin{aligned}E_i E_j &= \sqrt{(p_i^2 + m_i^2)(p_j^2 + m_j^2)} = \sqrt{(p_i p_j + m_i m_j)^2 + (p_i m_j - p_j m_i)^2} \\ &\geq p_i p_j + m_i m_j \\ \Rightarrow E_i E_j - \vec{p}_i \vec{p}_j &\geq E_i E_j - p_i p_j \geq m_i m_j\end{aligned}$$

$$\text{Ostatecznie: } \mathcal{M}_f^2 \geq \sum_i m_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} m_i m_j = \left( \sum_i m_i \right)^2 = s_{min}$$

# Rozpady cząstek

Warunek konieczny, aby mógł mieć miejsce rozpad:

$$M \geq \sum_i m_i = \sqrt{s_{min}}$$

Dla rozpadu dwuciałowego, w układzie cząstki:  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

Jaka będzie wartość pędu produktów rozpadu:  $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$  ?

$$\begin{aligned} M^2 &= (E_1 + E_2)^2 - (p_1 - p_2)^2 = (E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2) - (p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2)} + 2p^2 \end{aligned}$$

$$(M^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2p^2)^2 = 4(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2)$$

$$\Rightarrow 4M^2p^2 = (M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2$$

$$p = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M}$$

# Rozpady cząstek

Przypadek równych mas:  $m_1 = m_2 = m$

$$p = \frac{\sqrt{(M^2 - 4m^2)M^2}}{2M} = \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - m^2} \quad E = \frac{M}{2}$$

W granicy, gdy jeden z produktów rozpadu jest bardzo lekki:  $m_1 \ll m_2 \sim M$

$$p \approx \frac{\sqrt{(M^2 - m_2^2)^2}}{2M} = \frac{M}{2} - \frac{m_2^2}{2M} \approx E_1$$

$\frac{m_2^2}{2M}$  - energia “tracona” na odrzut drugiego ciała

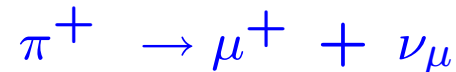
Energie cząstek po rozpadzie **nie są równe** !

Mierząc pęd (lub energię) jednego z produktów rozpadu, możemy wnioskować o **masach** pozostałych cząstek.

# Rozpady cząstek

## Przykład

Pion  $\pi^+$  o masie  $m_\pi = 140$  MeV rozpada się na mion  $\mu^+$  ( $m_\mu = 106$  MeV) i bezmasowe neutrino:



Pędy produktów rozpadu:

$$p = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi} \approx 30 \text{ MeV}$$

Energie liczymy z definicji masy niezmienniczej:

$$\begin{aligned} m^2 &= E^2 - p^2 \\ \Rightarrow E_\mu &= \sqrt{p^2 + m_\mu^2} \approx 110 \text{ MeV} & E_\mu^k &= 4 \text{ MeV} \\ E_\nu &= \sqrt{p^2 + m_\nu^2} = p = 30 \text{ MeV} & &= E_\nu^k \end{aligned}$$

Neutrino wynosi większość energii kinetycznej!

# Rozpady cząstek

Wszystkie cząstki danego rodzaju (np. elektrony lub neutrony) są **identyczne**.

Nie mają też “**pamięci**” - ich własności **nie zależą od czasu**.

Dla cząstek nietrwałych oznacza to, że **prawdopodobieństwo** ich **rozpadu** w zadanym przedziale czasu jest zawsze takie samo.

Rozważmy bardzo mały przedział czasu  $dt$  (znacznie mniejszy niż typowy czas rozpadu).

Jeśli próbka zawiera  $N$  cząstek to liczba oczekiwanych rozpadów musi być proporcjonalna do  $N$  i do  $dt$ :

$$dN = N(t + dt) - N(t) = -\alpha N dt$$

Całkując to równanie otrzymujemy:

$$\frac{dN}{N} = -\alpha dt$$

$$\ln N = -\alpha t + C$$

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{prawo rozpadu promieniotwórczego}$$



# Rozpady cząstek

**Prawdopodobieństwo** rozpadu na jednostkę czasu (dla pojedynczej cząstki):

$$p(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

Parametr  $\alpha$  wiąże się ze średnim czasem życia cząstki:

$$\tau = \langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \cdot p(t) dt = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Jeśli cząstka o masie  $m$  i średnim czasie życia  $\tau$  (zawsze definiowanym w układzie cząstki) ma w układzie obserwatora  $O'$  energię  $E$  i pęd  $p$ , to obserwator zmierzy:

$$N(t') = N_0 \cdot e^{-\frac{t'}{\gamma\tau}} = N_0 \cdot e^{-\frac{mt'}{E\tau}}$$

$$\langle t' \rangle = \gamma \tau = \frac{E}{m} \tau$$

$$\text{średnia droga swobodna} \quad \lambda = \langle vt' \rangle = \beta \gamma c \tau = \frac{p}{m} c \tau$$

# Rozpady cząstek

## Przykład

Jaki powinien być pęd mionu produkowanego w górnych warstwach atmosfery ( $h = 20 \text{ km}$ ), żeby mógł dolecieć do powierzchni Ziemi zanim się rozpadnie?

Prawdopodobieństwo rozpadu w funkcji odległości:

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad \lambda = \frac{p}{m} c\tau$$

Prawdopodobieństwo, że mion doleci do powierzchni Ziemi:

$$P(x > h) = \int_h^{\infty} p(x) dx = e^{-h/\lambda}$$

jest formalnie niezerowe dla dowolnego pędu. Duże szanse dolecieć mają jednak tylko miony, dla których  $\lambda > h$ :

$$\frac{p}{m} c\tau > h \quad \Rightarrow \quad p > \frac{h}{c\tau} m$$

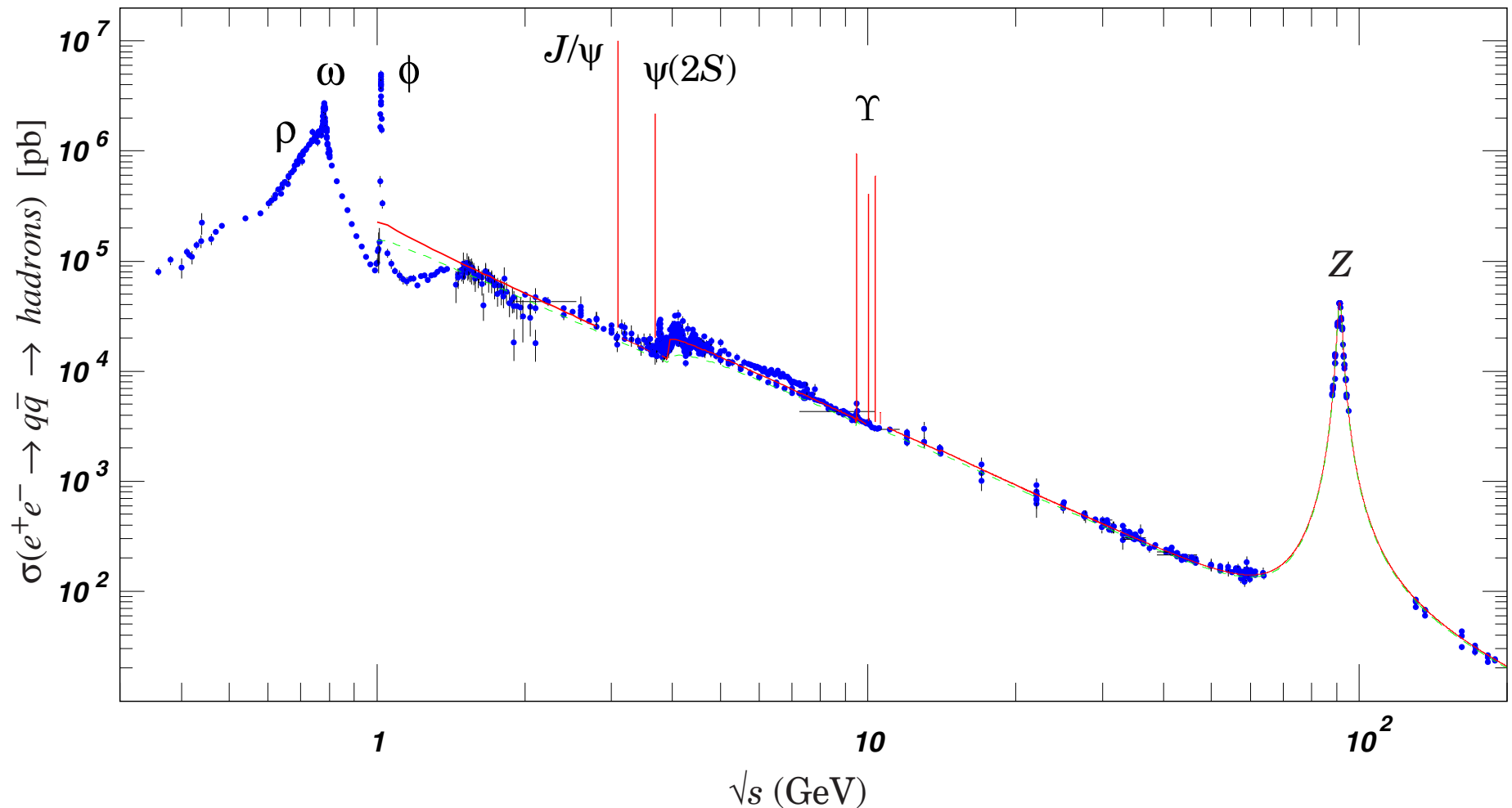
Dla mionu:  $\tau = 2.2 \mu\text{s}$  ( $c\tau \approx 660 \text{ m}$ ),  $m \approx 100 \text{ MeV}$ :

$$p > \frac{h}{c\tau} m \approx 30 \cdot m = 3 \text{ GeV}$$

# Zderzenia relatywistyczne

## Zderzenia $e^+e^-$

Przekrój czynny na produkcję hadronów w funkcji dostępnej energii:

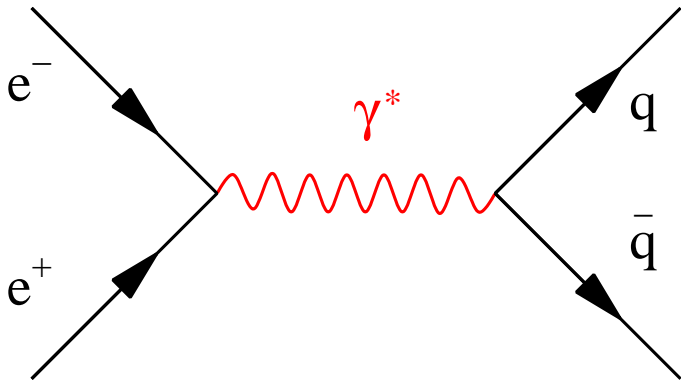


# Zderzenia relatywistyczne

## Zderzenia $e^+e^-$

W całym zakresie zbadanych energii mamy niezerowy przekrój czynny na produkcję kwarków.

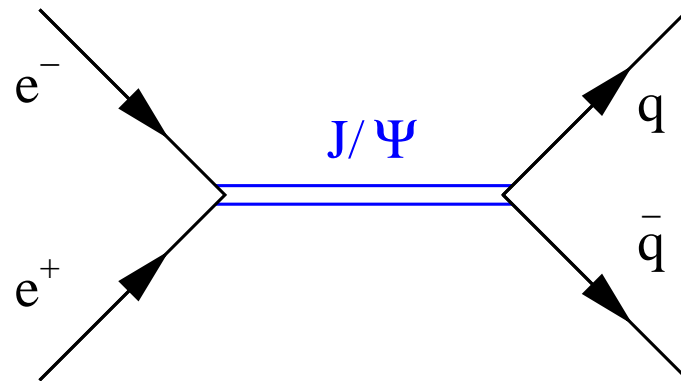
Proces ten opisujemy jako **anihilację**  $e^+e^-$  w **wirtualny foton**, który następnie rozpada się na parę  $q\bar{q}$



## Produkcja rezonansów

Przy pewnych wartościach  $\sqrt{s}$  obserwujemy wzrost produkcji kwarków o kilka rzędów wielkości.

Jest to efekt **rezonansowej** produkcji cząstek



Aby w zderzeniu dwóch cząstek powstała jedna, (np:  $e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow q\bar{q}$ ) **masa niezmiennicza** zderzających się cząstek musi być równa **masie cząstki** którą produkujemy ( $\sqrt{s} = m_{J/\psi}$ )

# Zderzenia relatywistyczne

## Produkcja rezonansów

Produkcja bozonu  $Z^0$  w eksperymencie L3 (LEP)

$$e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow q\bar{q}$$

Maksimum przekroju czynnego obserwujemy dla

$$\sqrt{s} = m_Z$$

ale ma ono skończoną szerokość:

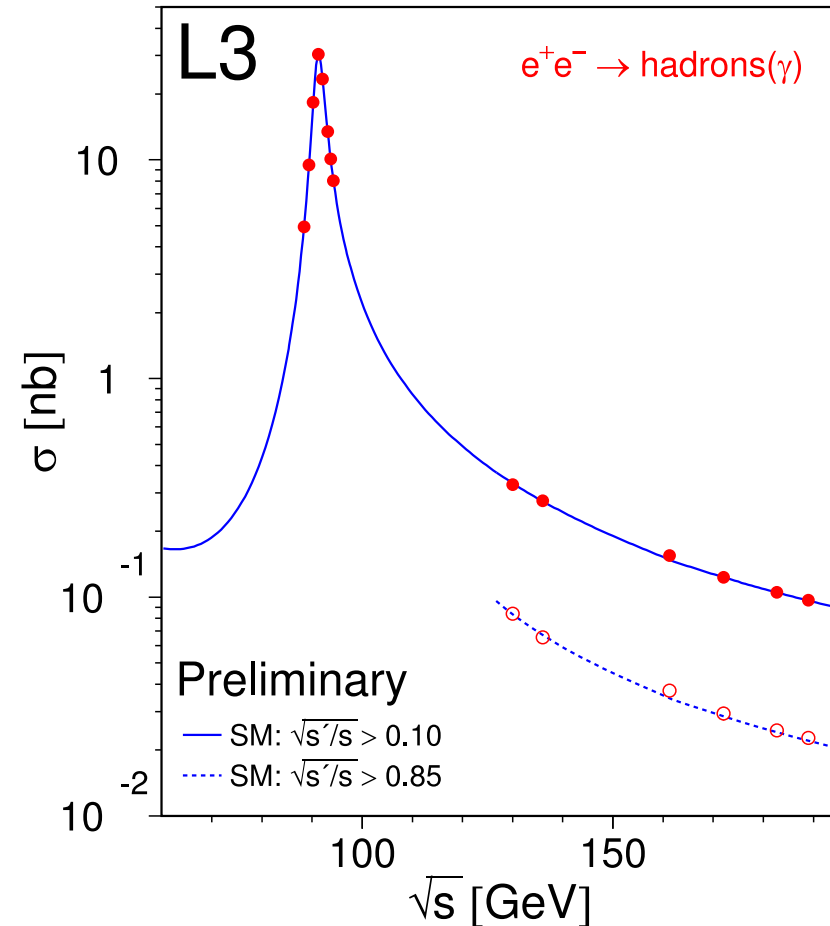
(rozkład Breita-Wignera)

$$\sigma(s) \sim \frac{M_Z^2 \Gamma^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma^2}$$

Szerokość rezonansu wiąże się z czasem życia:

$$\Gamma \cdot \tau = h$$

(zasada nieoznaczoności)



# Zderzenia relatywistyczne

## Produkcja wielu cząstek

Aby w zderzeniu dwóch cząstek powstały dwie lub więcej nowych cząstek, np:

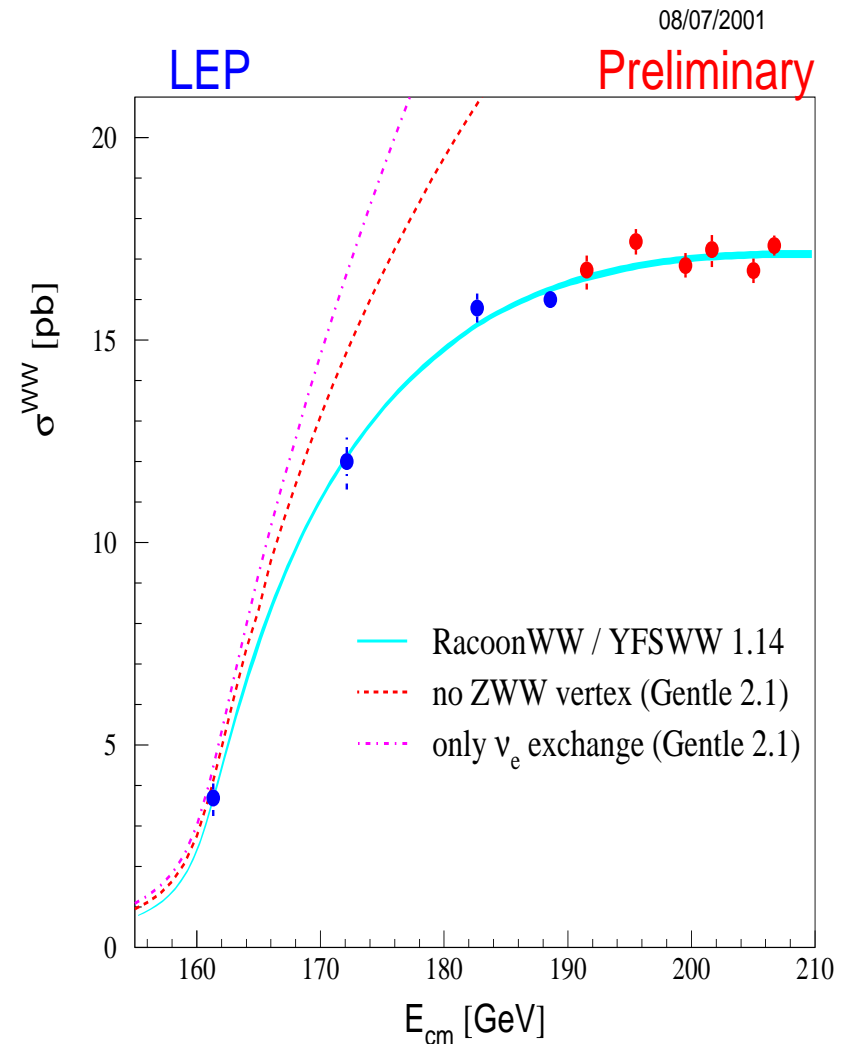


**masa niezmiennicza** zderzających się cząstek musi być większa lub równa **sumie mas** produkowanych cząstek:

$$\sqrt{s} \geq \sum_i m_i$$

Mierzony przekrój czynny  $e^+ e^- \rightarrow W^+ W^- \Rightarrow$

$$\sqrt{s} \geq 2 m_W \approx 160 \text{ GeV}$$



# Zderzenia relatywistyczne

## Energia dostępna

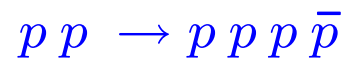
Masę niezmienniczą zderzających się cząstek  $\sqrt{s}$  określamy też jako **energię dostępną** w układzie środka masy.

Energia dostępna jest to część energii kinetycznej, która może zostać zamieniona na masę (energię spoczynkową) nowych cząstek.

$\sqrt{s}$  mówi nam ile energii możemy zużyć na wyprodukowanie nowych cząstek.

### Przykład

Aby wyprodukować antyproton w reakcji



musimy mieć

$$\sqrt{s} \geq 4 m_p$$

⇐ liczymy wszystkie cząstki w stanie końcowym, także cząstki pierwotne

# Zderzenia relatywistyczne

Określoną wartość energii dostępnej możemy uzyskać na różne sposoby:

## Zderzenia z tarczą

Cząstka “pocisk” o energii  $E$  uderza w nieruchomą tarczę:

$$s = 2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy  $E_1 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 2 E_1 m_2$$

## Wiązki przeciwbieżne

Zderzenia wiązek o energiach  $E_1$  i  $E_2$ :

$$s = 2 E_1 E_2 + 2 p_1 p_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy  $E_1 \sim E_2 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 4 E_1 E_2$$

**Dużo wyższe wartości !!!**

## Przykład

Wiązka protonów o energii 50 GeV ( $\approx 50 m_p$ )

- na **tarczy** wodorowej (protony):  $\sqrt{s} \approx \sqrt{2 E m_p} \approx 10 \text{ GeV} \approx 10 m_p$
- dwie **wiązki przeciwbieżne**:  $\sqrt{s} \approx \sqrt{4 E \cdot E} = 2 E = 100 \text{ GeV} \approx 100 m_p$



# Energia progowa

## Zderzenia z tarczą

Minimalna energia wiązki  $E_{min}$  przy której możliwa jest dana reakcja.

Minimalna masa niezmiennicza:

$$s_{min} = \left( \sum_i m_i \right)^2$$

W zderzeniach z nieruchomą tarczą:

$$s_{min} = 2 E_{min} m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

⇒ minimalna energia całkowita pocisku:

$$E_{min} = \frac{s_{min} - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_2} = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_2}$$

⇒ minimalna energia kinetyczna pocisku:

$$E_{k,min} = E_{min} - E_0 = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2 m_2}$$

# Energia progowa

## Zderzenia z tarczą

Związek minimalnej energii kinetycznej pocisku z przyrostem masy:

$$2 m_2 E_{k,min} = \left( \sum_i m_i \right)_{\text{końcowe}}^2 - \left( \sum_i m_i \right)_{\text{początkowe}}^2$$

⇒ energia kinetyczna pocisku jest “zużywana” na zwiększenie masy układu...

## Przykład 1

Produkcja anty-protonów w reakcji  $pp \rightarrow ppp\bar{p}$        $\sum_i m_i = 4m_p$        $\Delta M = 2m_p$

$$E_{min} = \frac{(4 m_p)^2 - (m_p^2 + m_p^2)}{2 m_p} = 7 m_p$$

$$E_{k,min} = E_{min} - m_p = 6 m_p \approx 5.63 \text{ GeV}$$

# Energia progowa

## Wiązki przeciwbieżne

Dla wiązek przeciwbieżnych: dla uproszczenia przyjmujemy  $E_1 = E_2, m_1 = m_2$

$$s_{min} \approx 4 E_1 E_2 = 4 E_{min}^2$$

$$E_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sum_i m_i\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i$$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2} \left[ \left(\sum_i m_i\right)_{\text{końcowe}} - \left(\sum_i m_i\right)_{\text{początkowe}} \right]$$

⇒ energia rośnie liniowo z masą produkowanego stanu (na tarczy: kwadratowo)

⇒ dużo niższe energie potrzebne do wytworzenia tego samego stanu

## Przykład 1 (c.d.)

Produkcja anty-protonów w reakcji  $p p \rightarrow p p p \bar{p}$   $\sum_i m_i = 4 m_p$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2} [4m_p - 2m_p] = m_p \approx 0.94 \text{ GeV} \quad \text{na tarczy: } 5.63 \text{ GeV}$$

# Energia progowa

## Wiązki przeciwbieżne

### Przykład 2

Produkcja par bozonów  $W^+W^-$  w zderzeniach elektron-pozyton:  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$

Gdybyśmy chcieli użyć pojedynczej wiązki pozytonów i tarczy  $\sum_i m_i = 2 m_W$

$$E_{min} = \frac{(2 m_W)^2 - (m_e^2 + m_e^2)}{2 m_e} \approx \frac{2 m_W^2}{m_e} \approx 25\,300\,000 \text{ GeV}$$

$$m_W = 80.4 \text{ GeV} \quad m_e = 0.000511 \text{ GeV}$$

Tak ogromnych energii nie jesteśmy w stanie wytworzyć !

Dotychczas wiązki pozytonów  $E \approx 100 \text{ GeV}$ , projektowane  $E \approx 1000 - 5000 \text{ GeV}$ ...

Dla przeciwbieżnych wiązek elektron-pozyton:  $s \approx 4 E^2$

$$E_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sum_i m_i\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i = m_W \approx 80 \text{ GeV}$$

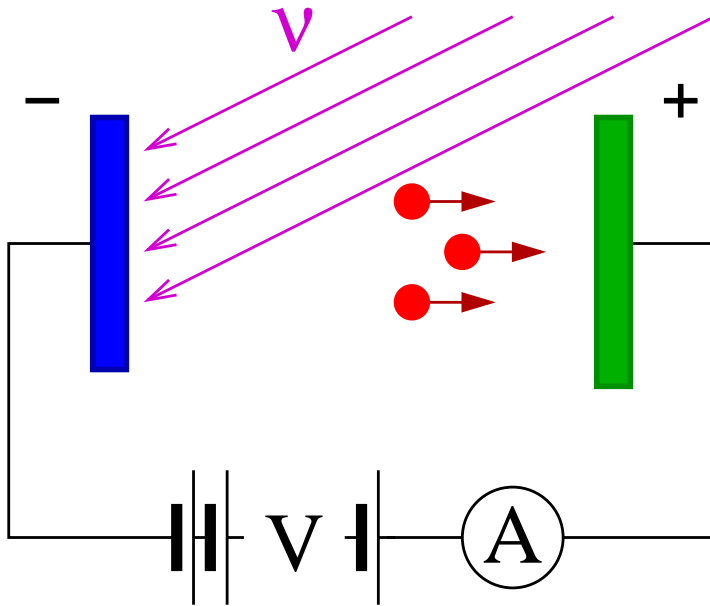
Takie energie to już nie problem...

# Odkrycie fotonu

## Zjawisko fotoelektryczne

Odkryte przypadkowo przez Hertza w 1887 r.

Światło padając na metalową płytkę powoduje uwalnianie elektronów  $\Rightarrow$  przepływ prądu.



Doświadczenia wskazały, że energia uwolnionych elektronów zależy wyłącznie od **częstości światła** (długości fali) i **materiału katody**.

Opis falowy przewidywał, że prąd zależy wyłącznie od natężenia światła, a nie zależy od częstości!

Zjawisko fotoelektryczne wyjaśnił **Einstein (1905)** wprowadzając kwanty światła

**FOTONY**

**Energia foto-elektronów:**

$$E_e = E_\gamma - W = h\nu - W$$

$W$  - “praca wyjścia”,  
minimalna energia potrzebna do uwolnienia elektronu z metalu.

# Odkrycie fotonu

## Natura światła

Fotony to **kwanty** promieniowania elektromagnetycznego.  
Przenoszą **oddziaływania** między cząstkami naładowanymi.

Mają naturę **korpuskularno-falową**:

- **fala** elektromagnetyczna, opisana równaniami Maxwella

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

podlega interferencji, dyfrakcji, załamaniu

- **cząstka** o ustalonej energii i pędzie, ale zerowej masie

$$m_\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \beta \equiv 1$$

może zderzać się z innymi cząstkami, być pochłaniana lub rozpraszana

Im **wyższa częstość** (mniejsza długość fali) promieniowania,

tym **wyższa energia** pojedynczego fotonu  $\Rightarrow$  **wyraźniejsze efekty korpuskularne**

$$E_\gamma = p_\gamma c = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \lambda \cdot \nu = c$$

W zjawisku fotoelektrycznym, foton “zderza się” z elektronem,  $\gamma + e^- \rightarrow e^-$

(proces typu  $2 \rightarrow 1$ ), i przekazuje mu energię konieczną do opuszczenia metalu.

# Foton

## Natura światła

Fotony to **kwanty** promieniowania elektromagnetycznego.  
Przenoszą **oddziaływania** między cząstkami naładowanymi.  
Mają naturę **korpuskularno-falową**:

- **fala** elektromagnetyczna, opisana równaniami Maxwella  
podlega interferencji, dyfrakcji, załamaniu
- **cząstka** o ustalonej energii i pędzie, ale zerowej masie  
może zderzać się z innymi cząstkami, być pochłaniana lub rozpraszana

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$m_\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \beta \equiv 1$$

Im **wyższa częstość** (mniejsza długość fali) promieniowania,  
tym **wyższa energia** pojedynczego fotonu  $\Rightarrow$  **wyraźniejsze efekty korpuskularne**

$$E_\gamma = p_\gamma c = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \lambda \cdot \nu = c$$

Choć korpuskularna koncepcja Einsteina pozwalała na opis zjawiska fotoelektrycznego,  
foton bardzo długo nie był traktowany jako “prawdziwa” cząstka...

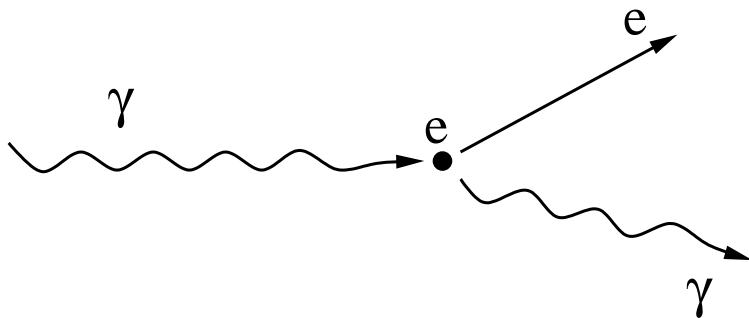
# Efekt Comptona

## Rozpraszanie fotonów

W wyniku rozpraszania w materii, promieniowanie X stawało się mniej przenikliwe  $\Rightarrow$  zmieniało długości fali

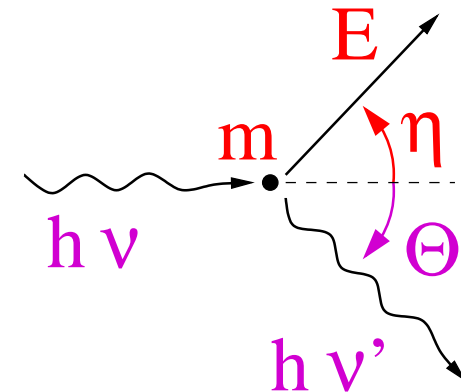
Opis tego zjawiska zaproponował w 1923 roku A.H.Compton.

Fotony promieniowania X rozpraszają się na elektronach w atomie



oddając im część swojej energii.

Relatywistyczne zderzenie dwóch ciał tak samo jak w przypadku cząstek!



Zasady zachowania:

$$E : h\nu + m = h\nu' + E$$

$$p_{\parallel} : h\nu = h\nu' \cos \theta + p \cos \eta$$

$$p_{\perp} : 0 = h\nu' \sin \theta - p \sin \eta$$



# Efekt Comptona

Przekształcając otrzymujemy:

$$\begin{aligned}E &= h(\nu - \nu') + m c^2 \\p \cos \eta &= h(\nu - \nu' \cos \theta) \\p \sin \eta &= h\nu' \sin \theta\end{aligned}$$

Podnosząc stronami do kwadratu i zestawiając do masy elektronu:

$$\begin{aligned}m^2 c^4 &= E^2 - p^2 c^2 \\&= (h(\nu - \nu') + m c^2)^2 - h^2 (\nu - \nu' \cos \theta)^2 c^2 - (h\nu' \sin \theta)^2 c^2 \\&= m^2 c^4 + h^2 \nu^2 c^2 + h^2 \nu'^2 c^2 - 2h^2 \nu \nu' c^2 + 2m h c^3 (\nu - \nu') \\&\quad - h^2 \nu^2 c^2 + 2h^2 \nu \nu' c^2 \cos \theta - h^2 \nu'^2 c^2 \cos^2 \theta - h^2 \nu'^2 c^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m h \nu = h\nu' (m + h\nu(1 - \cos \theta))$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m c^2}(1 - \cos \theta)}$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m c}(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{h}{m c} = 2.43 \cdot 10^{-12} m = 2.43 \text{ pm}$$

# Efekt Comptona

## Małe energie fotonów

W granicy małych energii fotonu  $h\nu \ll m$

$$h\nu' = h\nu \frac{m}{m + h\nu(1 - \cos\theta)} \approx h\nu$$

⇒ foton rozprasza się bez straty energii.

Odpowiada to klasycznemu zderzeniu “pocisku”,  $m_1$ , z dużo cięższą “tarczą”,  $m_2 \gg m_1$ .

Foton zachowuje energię, ale **zmienia się wektor pędu** (kierunek !)

Przykład: odbicie światła widzialnego  
 $h\nu = 1.8 - 3.1 eV$  (700 nm - 400 nm)

Energia rozproszonego elektronu:

$$\begin{aligned} E &= h\nu - h\nu' + m \\ &= \frac{h\nu(h\nu + m)(1 - \cos\theta) + m^2}{h\nu(1 - \cos\theta) + m} \end{aligned}$$

W granicy  $h\nu \ll m$ :

• energia elektronu:

$$E \approx m$$

• pęd rozproszonego elektronu:

$$p \approx h\nu \sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

# Efekt Comptona

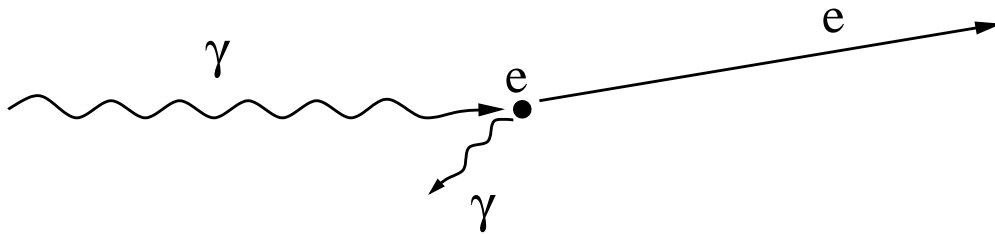
## Duże energie fotonów

W granicy dużych energii fotonu  $h\nu \gg m$  (przyjmując  $\cos \theta \neq 1$ , czyli  $\theta \neq 0$ )

$$h\nu' \approx \frac{m}{1 - \cos \theta} \rightarrow 0$$

$$E \approx h\nu + m$$

⇒ foton przekazuje **spoczywającemu** elektronowi praktycznie całą swoją energię



Odpowiada to klasycznemu zderzeniu ciał o równych masach (zakładając zderzenie centralne i elastyczne)

Dla  $h\nu \gg m$  masę elektronu można pominąć - **elektron**, tak jak foton, można traktować jako **cząstkę bezmasową**.

# Efekt Comptona

## Rozpraszanie do tyłu

W rozpraszaniu na spoczywającym elektronie najniższą energię będzie miał foton rozproszony “do tyłu” ( $\cos \theta = -1$ ):

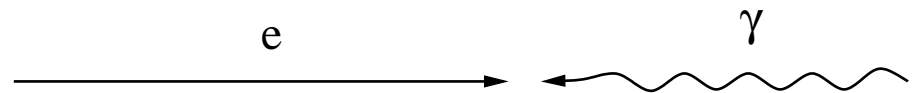
$$h\nu' = \frac{h\nu \cdot m}{2h\nu + m} < h\nu$$

To, że foton zawsze traci energię związane jest jednak z wyborem układu odniesienia!

(układ związany z początkowym elektronem)

## Rozpraszanie na wiązce elektronów

Możemy jednak rozważyć rozpraszanie fotonów o energii  $h\nu$  na przeciwbieżnej wiązce elektronów o energii  $E_e \gg m$ .



Transformacja Lorentza do układu elektronu:

$$\gamma = \frac{E_e}{m}$$
$$\beta \approx 1$$

Energia fotonu w układzie elektronu:

$$h\nu^* = \gamma(1 + \beta)h\nu$$
$$\approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu \gg h\nu$$

# Photon Collider

## Rozpraszanie na wiązce elektronów

Przyjmijmy, że foton rozprasza się “do tyłu” ( $\cos \theta = -1$ ). Energia rozproszonego fotonu w **układzie elektronu**:

$$\begin{aligned} h\nu^{*'} &= \frac{h\nu^* \cdot m}{2h\nu^* + m} \\ &\approx \frac{2E_e h\nu \cdot m}{4E_e h\nu + m^2} \end{aligned}$$

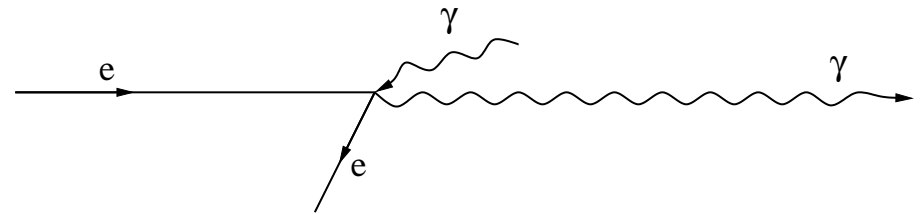
Wracając do **układu laboratoryjnego**:  
(transformacja taka sama, bo pęd foton zmienił kierunek)

$$h\nu' \approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu^{*'}$$

Otrzymujemy:

$$h\nu' \approx E_e \cdot \frac{4E_e h\nu}{4E_e h\nu + m^2}$$

Wysokie energia wiązki,  $4E_e h\nu \gg m^2$   
 $\Rightarrow$  elektron może przekazać fotonowi **większość swojej energii**.



Przykład: dla  $E_e = 250\text{GeV}$  i  $h\nu = 1\text{eV}$   
 $h\nu' \approx 200\text{GeV}$

# Efekt Dopplera

Klasycznie mamy dwa przypadki:

## Ruchome źródło

Źródło o częstotliwości  $\nu$  poruszające się z prędkością  $v$  względem ośrodka. **Częstość** dźwięku mierzona przez nieruchomego obserwatora

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}$$

## Ruchomy obserwator

Obserwator porusza się z prędkością  $v$  względem ośrodka i źródła dźwięku

Mierzona **częstość**:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

⇒ należy uwzględnić dylatację czasu

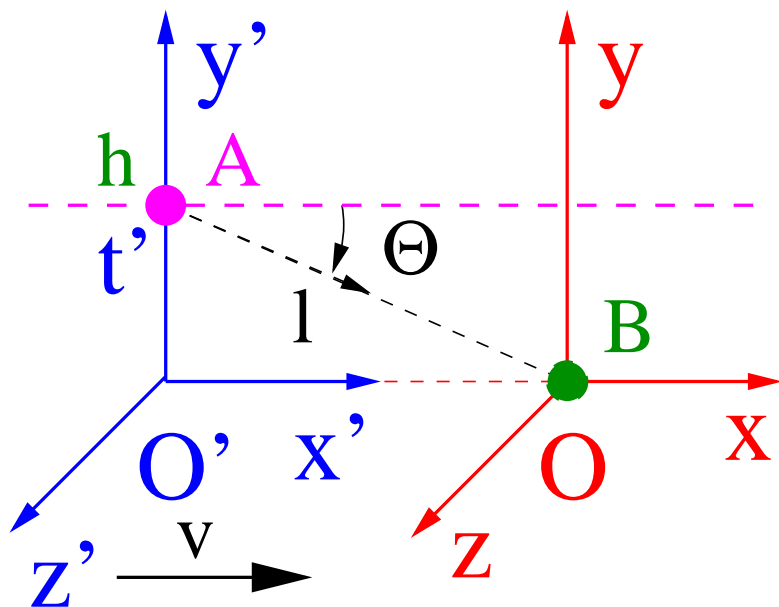
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

⇒ Pełna symetria !

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

# Efekt Dopplera

## Przypadek ogólny



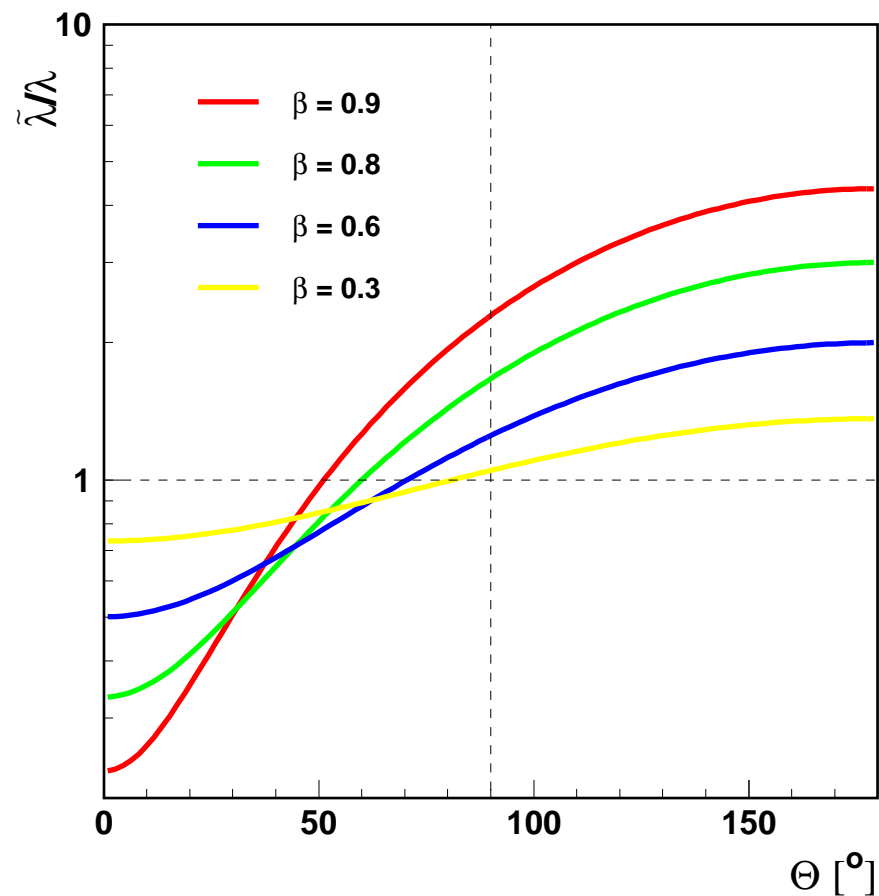
Przesunięcie długości fali:

mierzona  $\tilde{\lambda}$   
 emitowana  $\lambda$ 

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \frac{\tilde{T}}{T} = \gamma(1 - \beta \cos \Theta)$$

$\Theta$  - rejestrowany w O kąt lotu fotonu (!)

$(\pi - \Theta)$  - kierunek obserwacji



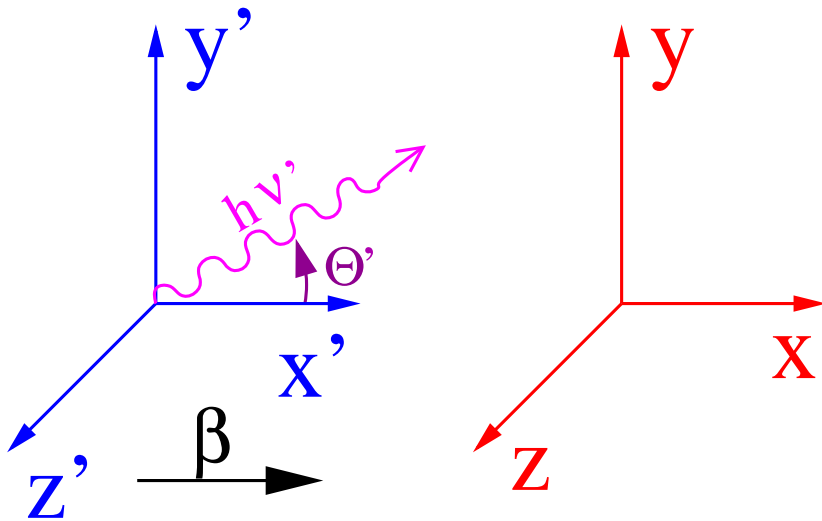
Zmiana częstości także dla  $\Theta = 90^\circ$  !!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

# Efekt Dopplera

## Alternatywne podejście

Wyrażenia na **relatywistyczny efekt Dopplera (dla światła)** wynikają wprost z **transformacji Lorentza** !



Foton o energii  $E' = h\nu'$  emitowany jest pod kątem  $\theta'$  w układzie  $O'$ .

$$p'_x = E' \cos \theta' \quad p'_y = E' \sin \theta'$$

W układzie  $O$  z transformacji Lorentza:

$$\begin{aligned} h\nu = E &= \gamma E' + \beta \gamma p'_x \\ &= h\nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta') \end{aligned}$$

Dla  $\theta' = 0$  mamy:

$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

częstość (energia) rośnie

Dla  $\theta' = \pi$  mamy:

$$\nu = \nu' \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

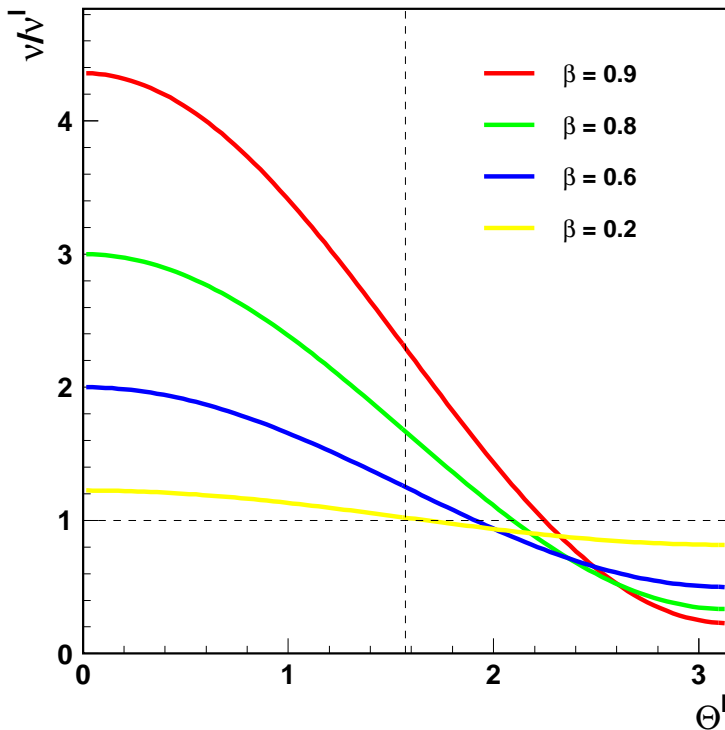
częstość (energia) maleje



# Efekt Dopplera

## Rozkłady kątowe

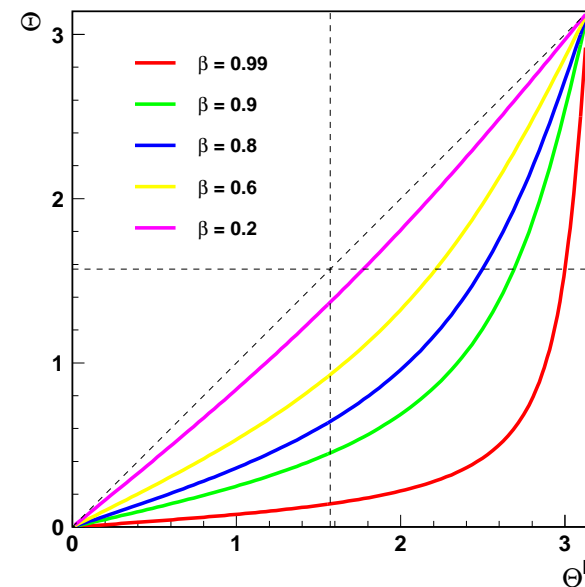
Zależność częstości od kąta **emisji**



Dla  $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nu = \gamma \nu' > \nu'$   
 poprzeczny efekt Dopplera

Obserwowany kąt lotu fotonu:

$$\cos \theta = \frac{p_x}{E} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$$



Dla  $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = \beta \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

Izotropowe promieniowanie szybko poruszającego się ciała jest skolimowane w kierunku ruchu...

# Efekt Dopplera

## Rozkłady kątowe

Mamy:

$$\nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta')$$

Możemy jednak zastosować odwrotną transformację Lorentza ( $\beta \Leftrightarrow -\beta$ )

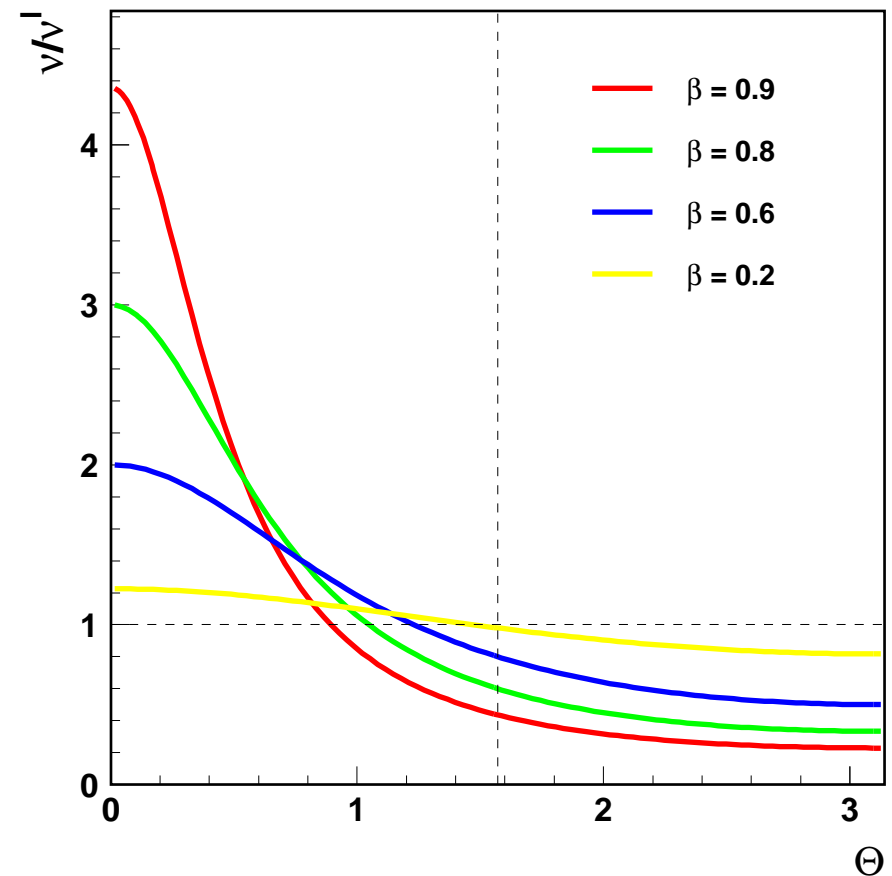
$\Rightarrow$  energia w funkcji kąta **detekcji**:

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$$

Fotony rejestrowane pod kątem  $\theta = \frac{\pi}{2}$  mają

częstość:  $\nu = \frac{\nu'}{\gamma} < \nu'$  !!!

Zależność częstości od kąta **detekcji**



# Egzamin

## Przykładowe pytania testowe:

1. Która z cząstek nie jest cząstką elementarną

A foton

B elektron

C neutrino

D proton

2. W zderzeniach nieelastycznych, w przypadku relatywistycznym, zmienia się

A masa niezmiennicza układu

B energia całkowita układu

C pęd układu

D masa spoczynkowa cząstek

3. Cząstka o masie  $M$  może rozpaść się na dwie cząstki o masach  $m_1$  i  $m_2$  jeśli

A  $M^2 \geq m_1^2 + m_2^2$

B  $M^2 = m_1^2 + m_2^2$

C  $M \geq m_1 + m_2$

D  $M = m_1 + m_2$

4. Energia dostępna w zderzeniach przeciwbieżnych wiązek elektronów o energiach 1 GeV i 9 GeV wynosi

A 5 GeV

B 10 GeV

C 8 GeV

D 6 GeV

5. W opisie rozpraszania Comptona pomijamy

A energię wiązania elektronu

B pęd fotonu

C masę elektronu

D energię fotonu



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego