Fizyka I (mechnika) – zadania Seria V
(rok akademicki 2012/2013)

I. Ruch krzywoliniowy, opis ruchu we współrzędnych biegunowych
II. Oscylator harmoniczny
III. Ruch w polu elektrycznym i magnetycznym
IV. Siła Coriolisa

Zadania wstępne

1.
- czy wektor prędkości jest zawsze styczny do toru?
- czy wektor przyspieszenia jest zawsze styczny do toru?
- czy wektor przyspieszenia może być: styczny do toru? prostopadły do toru?
- zapisz ruch punktu po okręgu o promieniu R i środku w punkcie (a,b) ze stałą prędkością kątową: we współrzędnych kartezjańskich (x,y), we współrzędnych biegunowych (r,ϕ).

2. Naszkicuj (najlepiej na jednym wykresie) jak dla cząstki poruszającej się ruchem harmonicznym zmienia się w czasie podczas jednego okresu: położenie, prędkość, przyspieszenie, energia kinetyczna.

3. W pewnym obszarze przestrzeni wytworzono jednorodne pole elektryczne, którego wektor jest równoległy do osi x i jednorodne pole magnetyczne, równoległe do osi y. Jaką prędkość muszą mieć cząstki wpadające w obszar tych pól, by poruszały się tam po liniach prostych?

4. Naładowana cząstka porusza się w jednorodnym polu magnetycznym. Które ze stwierdzeń są zawsze prawdziwe:
- cząstka ma stałą energię kinetyczną,
- cząstka może poruszać się po linii prostej ze stałą prędkością,
- cząstka może poruszać się po linii prostej ze stałym przyspieszeniem,
- siła działająca na cząstkę zależy jedynie od jej prędkości.

5. Przypomnij sobie ze szkoły postać siły Lorentza działającej na naładowaną cząstkę w jednorodnym polu magnetycznym, skierowanym prostopadle do prędkości początkowej. Wykaż, że w takiej sytuacji okres obiegu cząstki w ruchu po okręgu nie zależy od energii cząstki (w przybliżeniu nierelatywistycznym).

I. Ruch krzywoliniowy, opis ruchu we współrzędnych biegunowych

Wstęp

Na początek proponuje przypomnieć układ biegunowy – to sprawia studentom trudności, bo jest inne niż to, co znają dotychczas. W poniższych rozważaniach zakładamy, że wektor położenia ***r***, obydwie współrzędne wektora położenia w układzie biegunowym (ρ i φ), prędkość oraz przyspieszenie zależą od czasu. Aby jednak uprościć zapis, we wszystkich poniższych wzorach nie występują jawnie zależności od czasu. Wektor położenia w układzie biegunowym może wyrazić w następujący sposób (tu warto się upewnić, że jest jasne, co to znaczy, bo po układzie kartezjańskim potrzeba chwili na refleksję):

$$(1)\quad \vec{r} = \rho\, \vec{e}_\rho$$

Prędkość jest pochodną wektora położenia po czasie. Zgodnie z zasadami różniczkowania wielkości wektorowych, liczymy pochodną długości wektora po czasie oraz pochodną wersora po czasie. W porównaniu z kartezjańskim układem współrzędnych, w którym wersory były zawsze równoległe do osi układu i ich różniczkowanie po czasie dawało zero, w biegunowym układzie współrzędnych wersowy $\vec{e}_\rho$ i $\vec{e}_\phi$ zmieniają swój kierunek.

$$(2) \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} e_\rho + \rho \frac{e_\rho}{dt}$$

Pochodną wersora $\vec{e}_\rho$ po czasie obliczymy, rozkładając wersor na składowe w układzie kartezjańskim albo, inną metodą, rozważając mały przyrost kąta $d\varphi$.

Po obliczeniu pochodnej wektora $\vec{e}_\rho$ dostajemy:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y\right] = -\frac{d\phi}{dt}\sin(\phi)\vec{e}_x + \frac{d\phi}{dt}\cos(\phi)\vec{e}_y = \\ &\frac{d\phi}{dt}\left[-\sin(\phi)\vec{e}_x + \cos(\phi)\vec{e}_y\right] = \frac{d\phi}{dt}\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Podstawiając wzór (4) do wzoru (2) dostajemy:

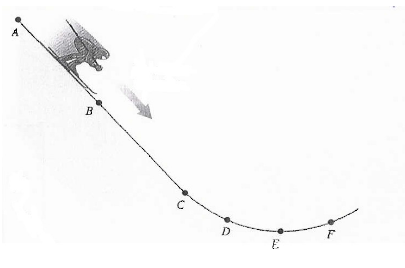
$$(5) \quad \vec{V} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_\phi$$

W układzie biegunowym wektor prędkości posiada dwie składowe: pierwszy składnik to prędkość radialna (oddalania lub zbliżania się do początku układu), drugi – prędkość transwersalna (styczna do toru). Warto zwrócić uwagę studentów, że drugi człon przypomina znaną im ze szkoły prędkość w ruchu po okręgu równa promieniowi pomnożonemu przez prędkość kątową.

W analogiczny do sposób obliczymy przyspieszenie w układzie biegunowym lecz wyniki są raczej nieprzyjazne i nie mają prostej interpretacji.

Zadanie 1. Przykład ruchu krzywoliniowego

Rozważyć ruch narciarza na torze przedstawionym na rysunku. Narysować wektory przyspieszenia w punktach toru *B*, *D*, *E* i *F*.



Zadanie 2. Zastosowanie współrzędnych biegunowych

W trzech rogach trójkąta równobocznego o boku a = 0.6 m znajdują się 3 pająki. W pewnej chwili zaczynają się one gonić wzajemnie tzn. poruszają się ze stała prędkością v_0 = 5 cm/s skierowaną wzdłuż prostej łączącej danego pająka z poprzedzającym go. Dla dowolnego pająka znaleźć równanie, czas ruchu i równanie toru.

II. Oscylator harmoniczny

Zadanie 3. Prosty oscylator harmoniczny

Na końcu sprężyny przymocowanej do ściany znajduje się kulka o masie m=10 g. Kulka wykonuje swobodne drgania harmoniczne o amplitudzie A = 10 cm wzdłuż osi x, wokół punktu równowagi x = 0 cm. Znane są następujące informacje z początkowych chwil ruchu:

1. W chwili czasu t = 0 s wychylenie wynosiło –0.5A, a prędkość była zwrócona w kierunku punktu maksymalnego wychylenia.
2. W chwili czasu t = 1/12 s kulka znajduje się w punkcie maksymalnego wychylenia –A.
3. Pomiędzy chwilą t = 0 s a t = 1/12 s kulka nie znalazła się nigdy w położeniu równowagi (x = 0 cm).

Na podstawie tych informacji:

a) podaj funkcję opisującą zależność wychylenia kulki z położenia równowagi (x = 0) od czasu oraz narysuj jej wykres,
b) wyznacz okres tego ruchu i zaznacz go na powyższym wykresie,
c) wyznacz częstotliwość tego ruchu,
d) oblicz stałą sprężystości sprężyny, na której zamocowano kulkę,
e) wykorzystując analogię między ruchem harmonicznym a ruchem po okręgu, wyznacz prędkość i przyspieszenie kulki, oraz narysuj ich wykresy,
f) podaj wyrażenia na energię kinetyczną kulki i energię potencjalną sprężyny; wykaż odpowiednim rachunkiem, że energia w tym ruchu jest zachowana.

Zadanie 4. Oscylator energetycznie

Cząstka o masie m i energii E znajduje się w polu siły jednowymiarowego oscylatora harmonicznego: $F = -kx$. Wyznacz i narysuj potencjał tej siły. Scharakteryzuj punkty przestrzeni dostępne cząstce w trakcie jej ruchu . Przedyskutuj ruch tej cząstki w zależności od jej energii.

Zadanie 5. Wahadło matematyczne jakościowo

Wykonano dwa układy doświadczalne: w pierwszym metalową kulkę o masie m zawieszono na nitce o długości d, zaś w drugim taką samą kulkę umieszczono w rynience wygiętej w okrąg o promieniu d. Zaniedbując opory ruchu i efekty związane z toczeniem kulki udowodnij, że w obu przypadkach ruch kulki opisuje to samo równanie, znajdź je i rozwiąż dla przypadku małych wychyleń od położenia równowagi.

III. Ruch w polu elektrycznym i magnetycznym

Zadanie 6. Jonowy spektrometr masowy z selektorem prędkości

Do badania mas naładowanych cząstek (na przykład jonów różnych izotopów tego samego pierwiastka) używa się układu spektrometru masowego. Aby spektrometr działał poprawnie, na wejściu musimy najpierw uformować wiązkę jonów o dobrze określonej prędkości.

1. W selektorze prędkości jony przechodzą przez skrzyżowane pola magnetyczne o indukcji B i prostopadłe do niego pole elektryczne o natężeniu E. Oba pola są prostopadłe do prędkości wpadających cząstek. Jeśli spełniony jest warunek zerowania się całkowitej siły działającej na cząstkę o ładunku q

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\, x\, \vec{B}\right)$$

to cząstka o prędkości $v_0 = E/B$ przechodzi przez obszar pól nie doznając odchylenia.

2. W spektrometrze masowym, cząstki wpadające z selektora poruszają się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_s, skierowanym prostopadle do ich prędkości początkowej. W polu tym jony o masie m poruszają się po okręgach o promieniu $r = mv_0/qB_s$ (porównaj zadanie wstępne) i po przebyciu połowy okręgu uderzają w klisze (albo inny detektor).

3. Dla jednokrotnie zjonizowanych (ładunek równy ładunkowi elektronu q=1,6×10^{-19} C) jonów uranu ^{235}U i ^{238}U (masy odpowiednio 400×10^{-27} kg i 405×10^{-27} kg) o prędkości v_0 = 250 m/s w polu o indukcji B_s = 0,01 T wyznacz różnicę promieni ruchu obu rodzajów jonów (odległość między śladami w detektorze).

Zadanie 7. Ruch w polu magnetycznym - przypadek ogólny (za zbiorem A. Hennel et al. „Zadania i problemy z fizyki", tom I, PWN).

Znaleźć i przedyskutować ruch cząstki o masie m i ładunku q w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Prędkość początkowa v_0=(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), położenie początkowe x_0.
W prostszej wersji można rozważyć problem dwuwymiarowy, to znaczy prędkość początkowa v_0=(v_{0x}, 0, 0) prostopadła do pola magnetycznego $\boldsymbol{B} = (0,0,B_z)$.
Jedną z obserwacji, która zadziwia w tym zagadnieniu jest to, że choć siła Lorentza nie wykonuje pracy, to zmienia kierunek ruchu cząstki – średnia prędkość ruchu w polu jest nierównoległa do prędkości początkowej.

IV. Przyspieszenie i siła Coriolisa

Zadanie 8.
Jedną z „atrakcji" wesołego miasteczka jest duża, pozioma tarcza o promieniu R wirująca z prędkością kątową ω. W poprzek sceny należy przejść nie tracąc równowagi. Pracownik wesołego miasteczka założył się z kolegami, że startując ze środka tarczy i idąc ze stałą prędkością wzdłuż wymalowanego na tarczy promienia dotrze do brzegu tarczy w chwili, gdy wykona ona połowę obrotu. Czy wygra zakład, jeśli współczynnik tarcia między powierzchnią tarczy i podeszwami butów pracownika wynosi f? Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

Zadanie 9.
Współczesne karabiny snajperskie nadają pociskowi prędkość rzędu 1000 m/s. Oszacuj, jakie jest maksymalne odchylenie pocisku wywołane siłą Coriolisa przy strzelaniu równolegle do powierzchni ziemi na odległość 100 m. W jakich warunkach wartość tego odchylenia jest maksymalna, a w jakich minimalna?