



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Zasady zachowania

## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład V:

- Zasada zachowania pędu
- Ruch ciał o zmiennej masie
- Praca, moc, energia kinetyczna
- Siły zachowawcze i energia potencjalna
- Zasada zachowania energii

## II zasada dynamiki

### Przypomnienie

Druga zasada dynamiki Newtona w postaci “klasycznej”

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Zależność słuszna dla ciał których masa jest stała,  $m = \text{const}$

Możemy to wykorzystać i przekształcić zależność do postaci:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \stackrel{m=\text{const}}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie  $\vec{p} = m\vec{v}$  - pęd cząstki

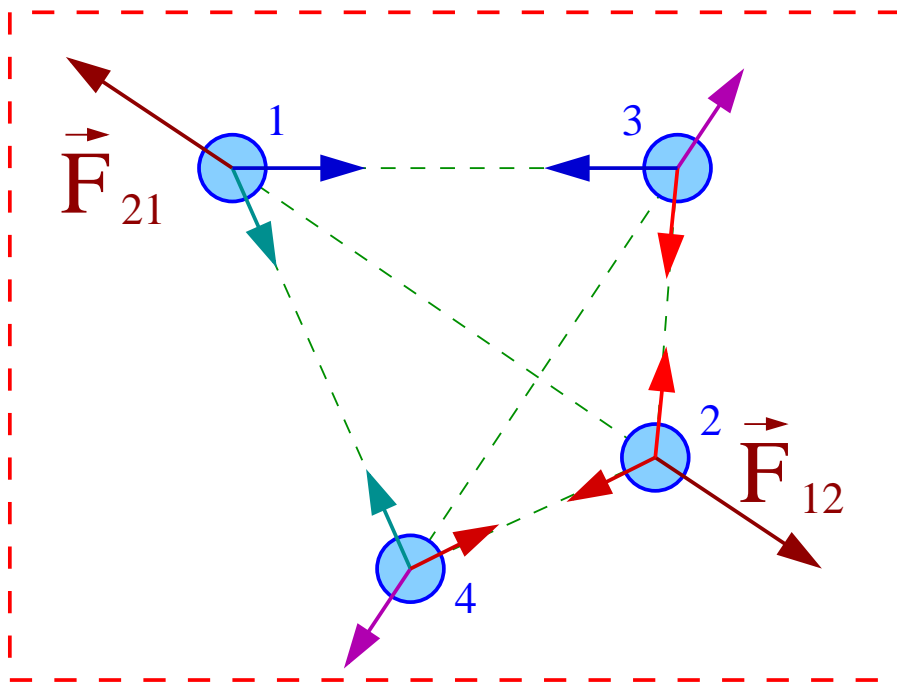
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F} dt = I - \text{popęd siły}$$

# Zasada zachowania pędu

## Układ izolowany

Każde ciało może w dowolny sposób oddziaływać z innymi elementami układu.



Brak oddziaływań ze światem zewnętrznym

## III zasada dynamiki

Siły z którymi działają na siebie ciała  $i$  i  $j$ :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających na ciało  $i$ :

$$\vec{F}_i^\Sigma = \sum_j \vec{F}_{ji}$$

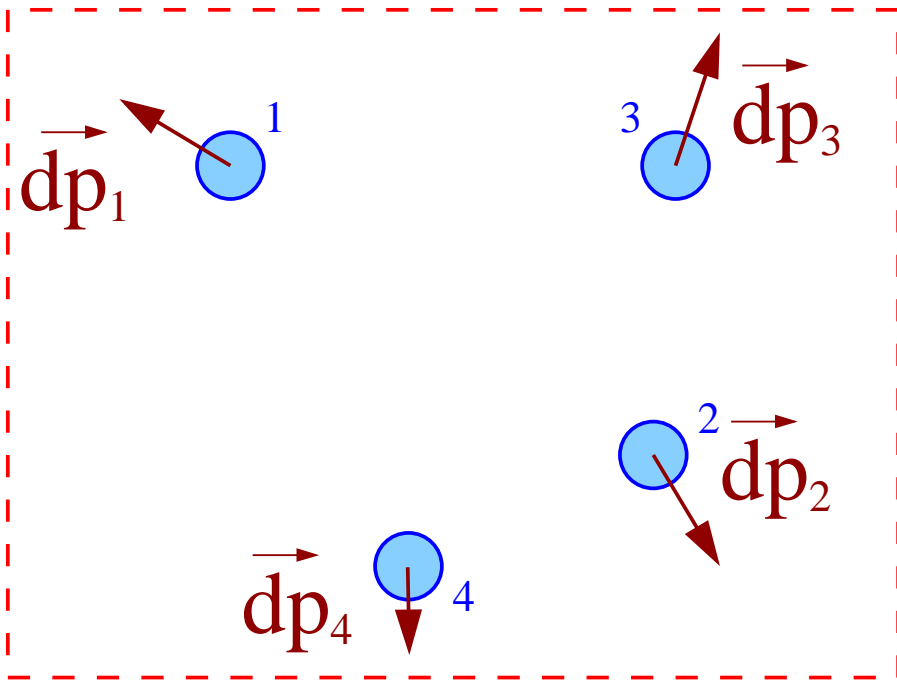
Suma sił działających na układ:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i -\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{tot} \\ &\Rightarrow \vec{F}_{tot} = 0\end{aligned}$$

# Zasada zachowania pędu

## II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^\Sigma$$



izolowany układ inercjalny

## Pęd układu

Prawo ruchu układu:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Dla dowolnego układu **izolowanego**, **suma pędów** wszystkich elementów układu pozostaje **stała**.

# Zasada zachowania pędu

Dla dowolnego układu **izolowanego**,  
**suma pędów** wszystkich elementów układu pozostaje **stała**.

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

pędy mierzymy w układzie inercyjnym (!)

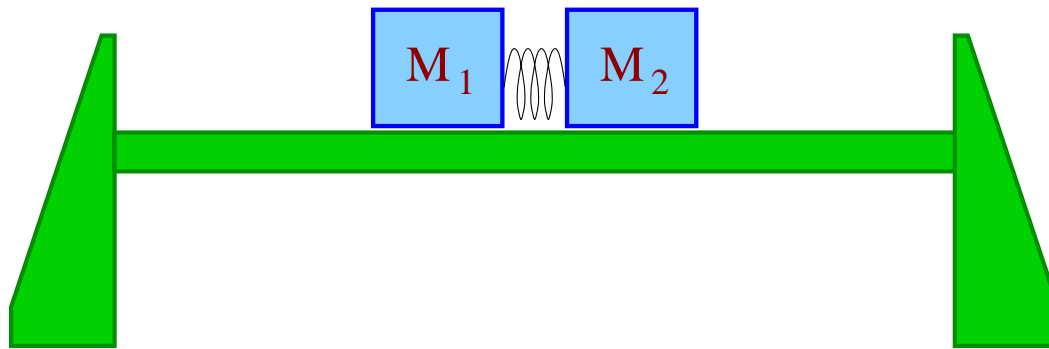
Zasada zachowania pędu obowiązuje **w każdej sytuacji**:

- zderzenia poruszającego się ciała z nieruchomym
- zderzenia dwóch poruszających się ciał
- “rozpadu” układu na skutek działania sił wewnętrznych (np. **wystrzał z armaty**)

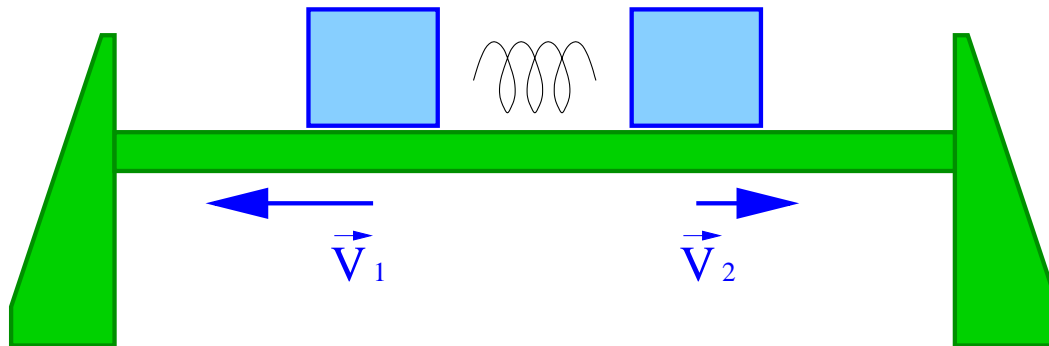


# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



$$M_1 < M_2$$



Układ “rozpada się” pod wpływem **sił wewnętrznych**.

Jeśli na początku wszystkie obiekty spoczywają

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

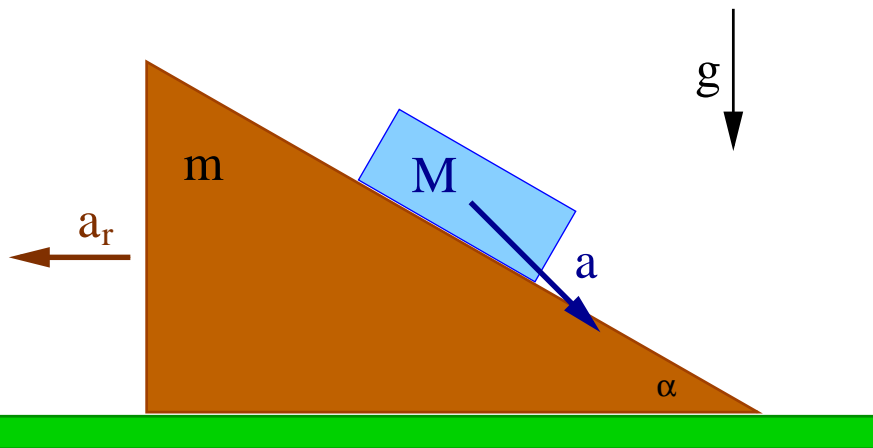
to i po “rozpadzie” **suma pędów** musi być **równa 0**.

Dwa ciała:  $(v_i \ll c)$

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{v}_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{v}_1 \\ \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} &= \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



Równia rusza się bez tarcia po poziomym stole.  
Na równi kładziemy klocek, który może zsuwać się bez tarcia.

Jak znaleźć przyspieszenia, z którymi będzie poruszał się klocek i równia?

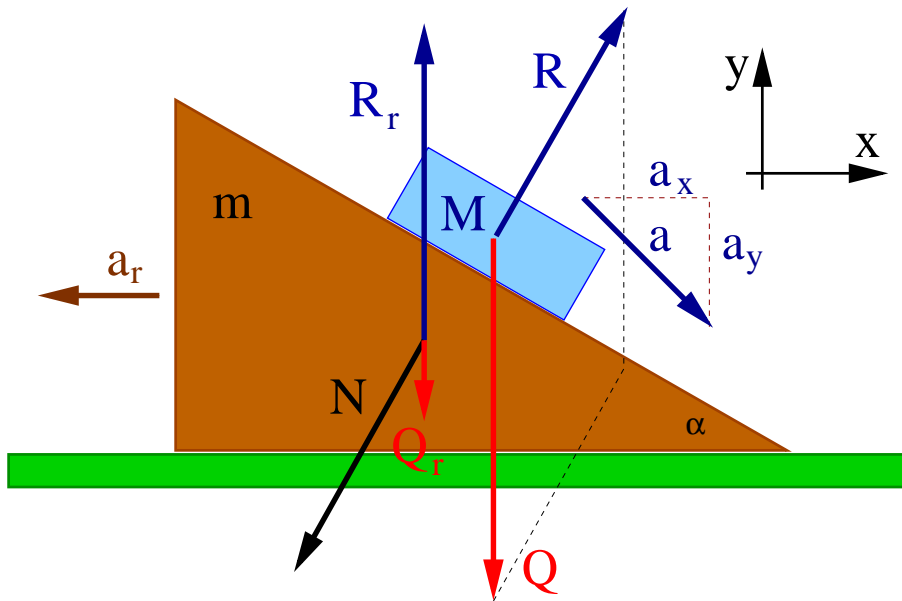
Jeśli masa klocka nie jest zaniedbywalna w porównaniu z masą równi to równia będzie “uciekać” spod zsuwającego się klocka. **Wynika to z zasady zachowania pędu!**

Siły zewnętrzne (siła ciężkości i reakcji stołu) mają kierunek pionowy  
 $\Rightarrow$  mogą zmieniać tylko składową pionową pędu układu równia-klocek.

**Składowa pozioma pędu musi być zachowana!**

# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



Na układ działają siły zewnętrzne:

- siły ciężkości  $Q$  i  $Q_r$
- oraz siła reakcji stołu  $R_r$

Siła wypadkowa działa wzdłuż kierunku pionu (prostopadle do powierzchni stołu).

Składowa pozioma pędu układu równia-klocek musi być zachowana.

Uwzględniając, że prędkość i przyspieszenie równi są skierowane przeciwnie do osi X:

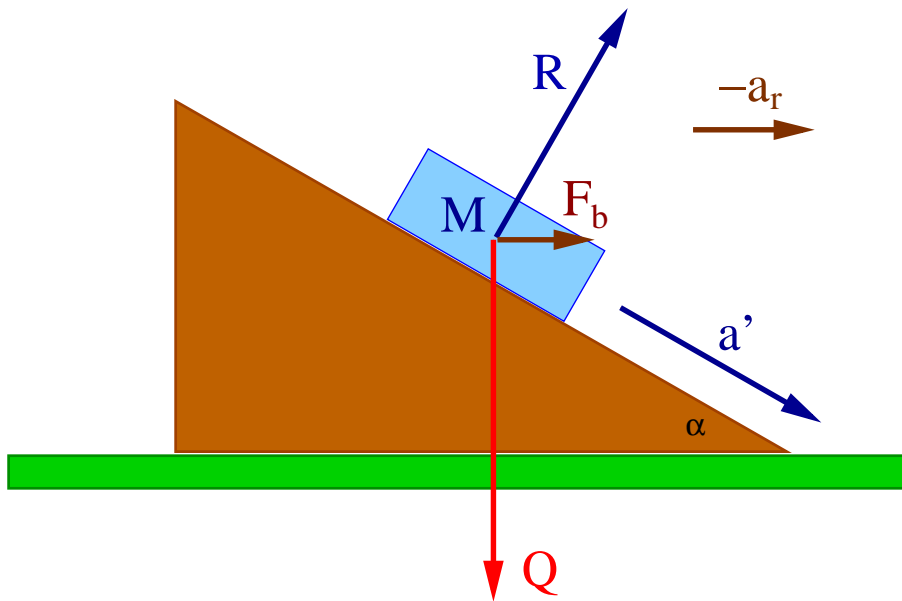
$$-mV_r + MV_x = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad ma_r = Ma_x$$

**Kierunek przyspieszenia klocka nie jest równoległy do powierzchni równi!**



# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



Zagadnienie daje się łatwiej rozwiązać, gdy przejdziemy do układu **nieinercyjnego** związanego z **równią**. W układzie tym na klocek działa dodatkowo siła bezwładności

$$\vec{F}_b = -\vec{a}_r M$$

Przyspieszenie klocka (**wzdłuż równi!**):

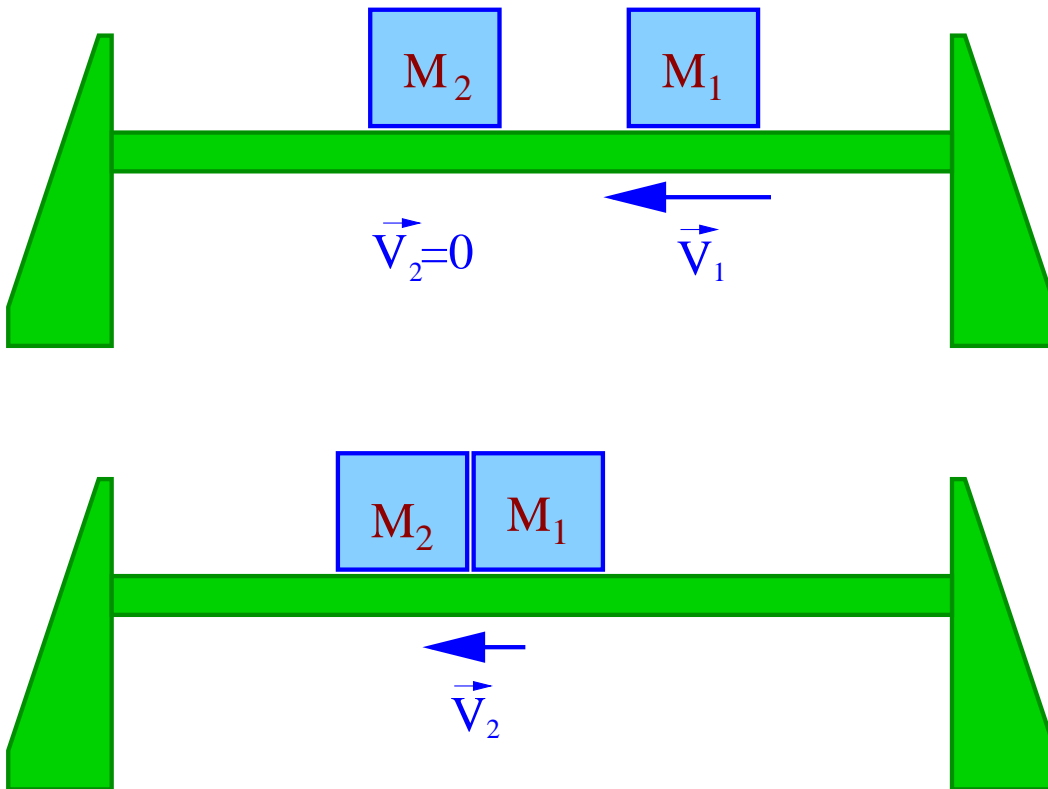
$$a' = g \sin \alpha + a_r \cos \alpha$$

Możemy teraz wyznaczyć składową X tego przyspieszenia **w układzie stołu**, i porównać z wartością oczekiwaną z zasady zachowania pędu:

$$\begin{cases} a_x = a' \cos \alpha - a_r = g \sin \alpha \cos \alpha - a_r \sin^2 \alpha \\ M a_x = m a_r \end{cases} \Rightarrow a_r = g \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{m + M \sin^2 \alpha}$$

# Zasada zachowania pędu

## Zderzenia nieelastyczne



Zderzeniem **całkowicie niesprężystym** (całkowicie nieelastycznym) nazywamy zderzenie, w wyniku którego ciała pozostają trwale złączone (lub nie poruszają się względem siebie)

Gdy jedno z ciał spoczywa

Pęd początkowy:  $\vec{p}_i = m_1 \vec{v}_1$

Pęd końcowy:  $\vec{p}_f = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_2$

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$
$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1$$

# Ruch ciała o zmiennej masie

II zasada dynamiki w postaci

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

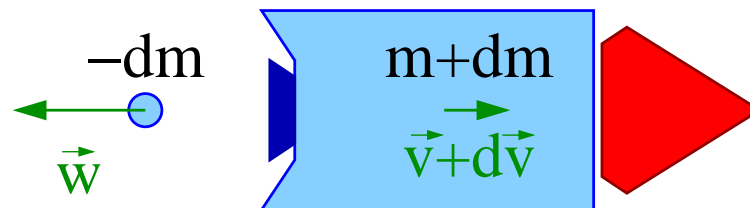
może być w szczególności wykorzystana do opisu ruchu ciała o zmiennej masie.

W ogólnym przypadku:  $m = m(\vec{r}, \vec{v}, t)$

## Rakieta

Silnik raketowy napędza raketę na zasadzie odrzutu. Jej masa maleje.

Rozważmy pracę silnika rakiety z punktu widzenia zasady zachowania pędu.



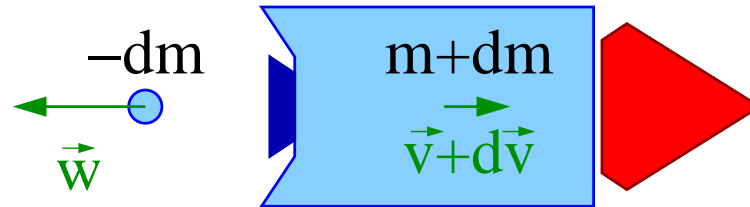
W przedziale czasu  $dt$  masa rakiety maleje z  $m$  do  $m + dm$  ( $dm < 0$  bo masa maleje)

Od ciała o masie  $m$  poruszającego się z prędkością  $\vec{v}$  odłącza się element

$-dm > 0$  poruszający się z prędkością  $\vec{w}$

# Ruch ciał o zmiennej masie

W wyniku odrzutu rakietą zmienia swoją prędkość o  $d\vec{v}$



Z zasady zachowania pędu:

$$m \vec{v} = (m + dm) (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \vec{w}$$

$$0 = m d\vec{v} + dm \vec{v} + dm d\vec{v} - dm \vec{w}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{p} = m d\vec{v} &\approx -dm \vec{v} + dm \vec{w} \\ &= dm (\vec{w} - \vec{v}) \equiv dm \vec{v}_{odrz} \end{aligned}$$

Siła odrzutu (siła ciągu rakiet):

$$\vec{F}_{odrz} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \quad \frac{dm}{dt} < 0$$

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Równanie ruchu

Ruch ciała pod wpływem siły odrzutu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zewn} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz}$$

Zaniedbując wpływ sił zewnętrznych  
(np. pola grawitacyjnego):

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} &= \vec{v}_{odrz} \end{aligned}$$

Całkując stronami:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_k} \frac{d\vec{v}}{\vec{v}_{odrz}} &= \int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m} \\ \Rightarrow \vec{v}_k &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{odrz} \cdot \ln \left( \frac{m_k}{m_0} \right) \end{aligned}$$

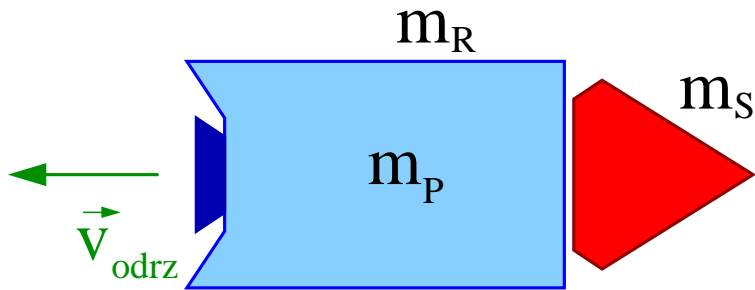
**wzór Ciotkowskiego**

Gdy zaniedbamy grawitację, prędkość końcowa nie zależy od tego jak szybko spalamy paliwo...

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Rakieta jednostopniowa

Rakieta o masie  $m_R$  ma wynieść satelitę o masie  $m_S$ , zużywając paliwo o masie  $m_P$ :



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną  $v_k \approx 11 \text{ km/s}$  (np. lot na Księżyc) przy silniku raketowym  $v_{odrz} = 3 \text{ km/s}$

Możliwa do uzyskania prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \ln \left( \frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R} \right) \\ \approx v_{odrz} \cdot \ln(1 + f)$$

gdzie:  $f = \frac{m_P}{m_R} \quad m_S \ll m_R$

stosunek masy paliwa do masy rakiety

$$f = \exp \left( \frac{v_k}{v_{odrz}} \right) - 1 \approx 38$$

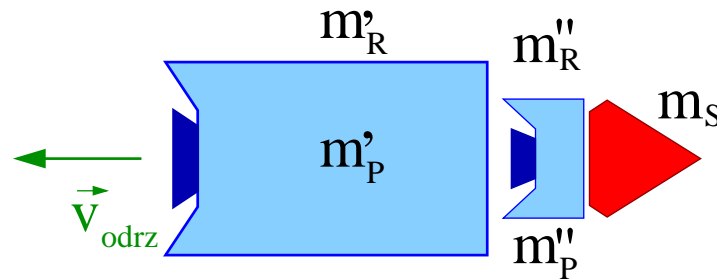
Teoretycznie możliwe,  
praktycznie niewykonalne (?)...  
i nieopłacalne !...

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Rakieta dwustopniowa

Raketę dzielimy na dwa człony o masach  $m'_R$  i  $m''_R$ ,  
w których znajduje się paliwo o masie  $m'_P$  i  $m''_P$ :

$$\begin{aligned} m'_R + m''_R &= m_R \\ m'_P + m''_P &= m_P \end{aligned}$$



Prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \left[ \ln \left( \frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R + m''_P} \right) + \ln \left( \frac{m_S + m''_R + m''_P}{m_S + m''_R} \right) \right]$$

W przybliżeniu  $m_S \ll m''_R \ll m'_R$ :  $v_k \approx v_{odrz} \cdot 2 \ln(1 + f)$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną  $v_k \approx 11 \text{ km/s}$  przy  $v_{odrz} = 3 \text{ km/s}$ :

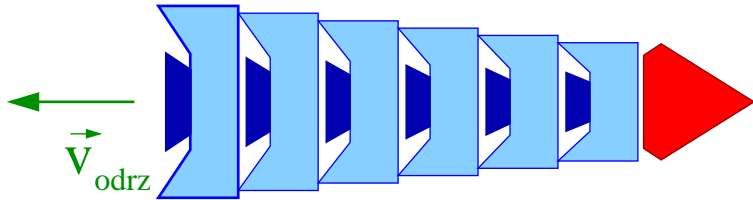
$$f = \exp \left( \frac{v_k}{2 v_{odrz}} \right) - 1 \approx 5.3$$

Dla  $f \approx 10$  (dla obu członów) można wystrzelić w kosmos  $m_S \approx 0.6\% (m_R + m_P)$   
przy optymalnym wyborze  $m''_R \approx 7\% m_R$

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Rakieta wielostopniowa

Rakieta składa się z wielu członów.  
W każdym z nich stosunek masy paliwa do “obudowy” wynosi  $f$



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną dla  $m_S \approx 100 \text{ kg}$  przy rakiemie o  $f = 10$ :

$$m_R = \frac{m_S}{1+f} \left[ \exp \left( \frac{v_k (1+f)}{v_{odrz} f} \right) - 1 \right]$$

W granicy wielu bardzo małych członów:

$$m d\vec{v} = dm \vec{v}_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1}$$

$$m_R \approx 500 \text{ kg}$$

$$m_P \approx 5000 \text{ kg}$$

Co sprowadza się do:

Przy rakiemie jednoczłonowej, przy tych samych  $m_S$  i  $m_R$  potrzebaby 228'000 kg paliwa !!!

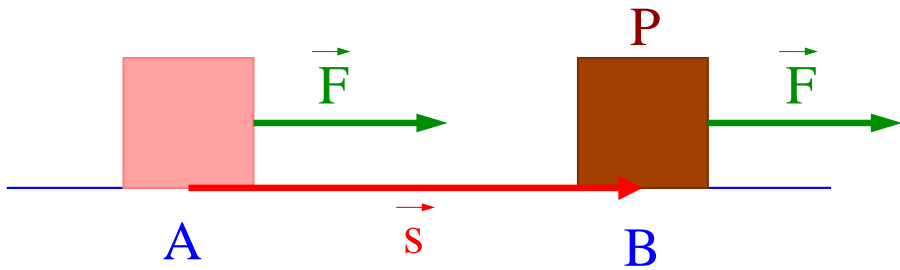
$$v_k = v_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1} \cdot \ln \left( 1 + \frac{m_R}{m_S} (1+f) \right)$$

Dla rakiety dwuczłonowej:  
 $m_R \approx 1600 \text{ kg}$ ,  $m_P \approx 16'000 \text{ kg}$



# Praca i energia

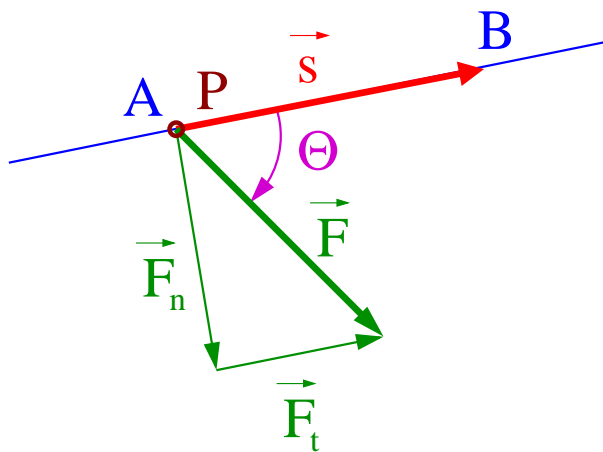
## Praca



Najprostszy przypadek:

**Stać** siła  $\vec{F}$  działa na ciało P powodując jego przesunięcie wzdłuż kierunku działania siły o  $\vec{s}$ . Praca jaką wykona przy tym siła  $\vec{F}$

$$W_{AB} = F \cdot s$$



W przypadku siły działającej pod kątem w stosunku do przesunięcia praca jaką wykonuje

$$W_{AB} = F \cdot s \cdot \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

**Składowa prostopadła nie wykonują pracy!**

**Liczy się tylko równoległa składowa siły...**

# Praca i energia

## Praca

Dowolna siła  $\vec{F}$  działa na punkt materialny  $P$

Praca jaką wykonuje siła przy przesunięciu o  $d\vec{r}$

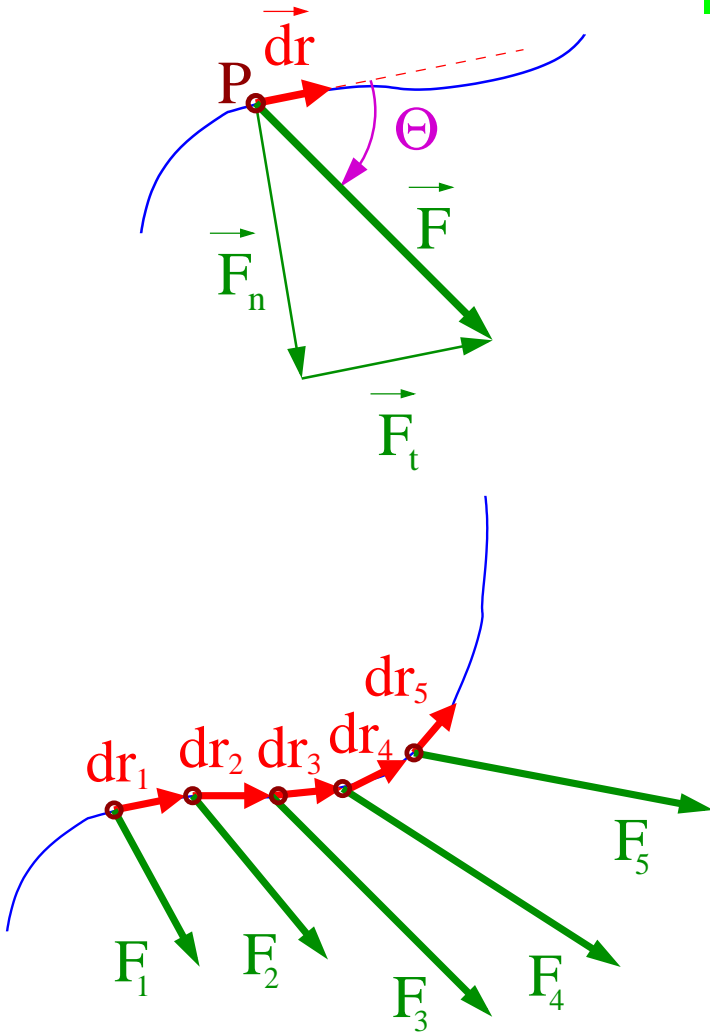
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \theta ds = F_t ds$$

Aby policzyć pracę siły  $\vec{F}$  dla dowolnej drogi, musimy posumować wkłady od kolejnych małych przesunięć  
 $\Rightarrow$  całkowanie.

Praca siły  $\vec{F}(\vec{r})$  na drodze między  $A$  i  $B$

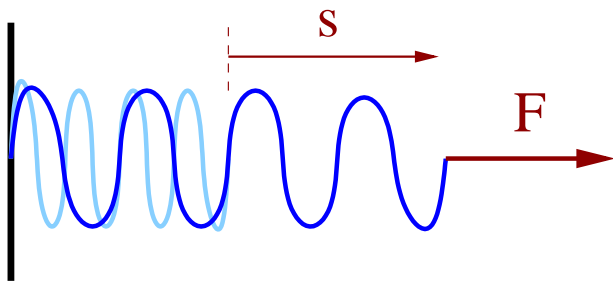
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy!  
siła Lorenza, siła Coriolisa, siły reakcji więzów...



# Praca i energia

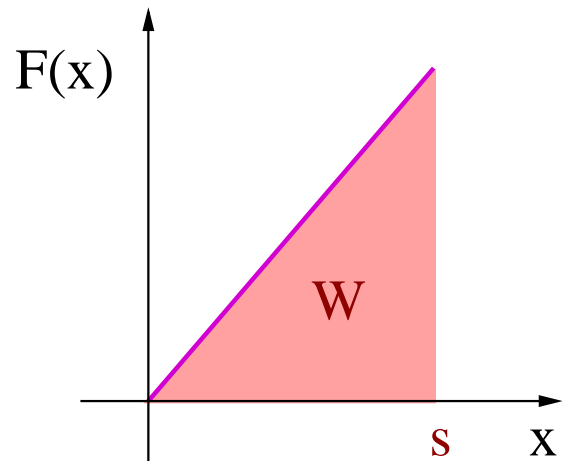
## Praca



Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy przeciwko sile sprężystości:

$$F(x) = kx$$



Wykonana praca:

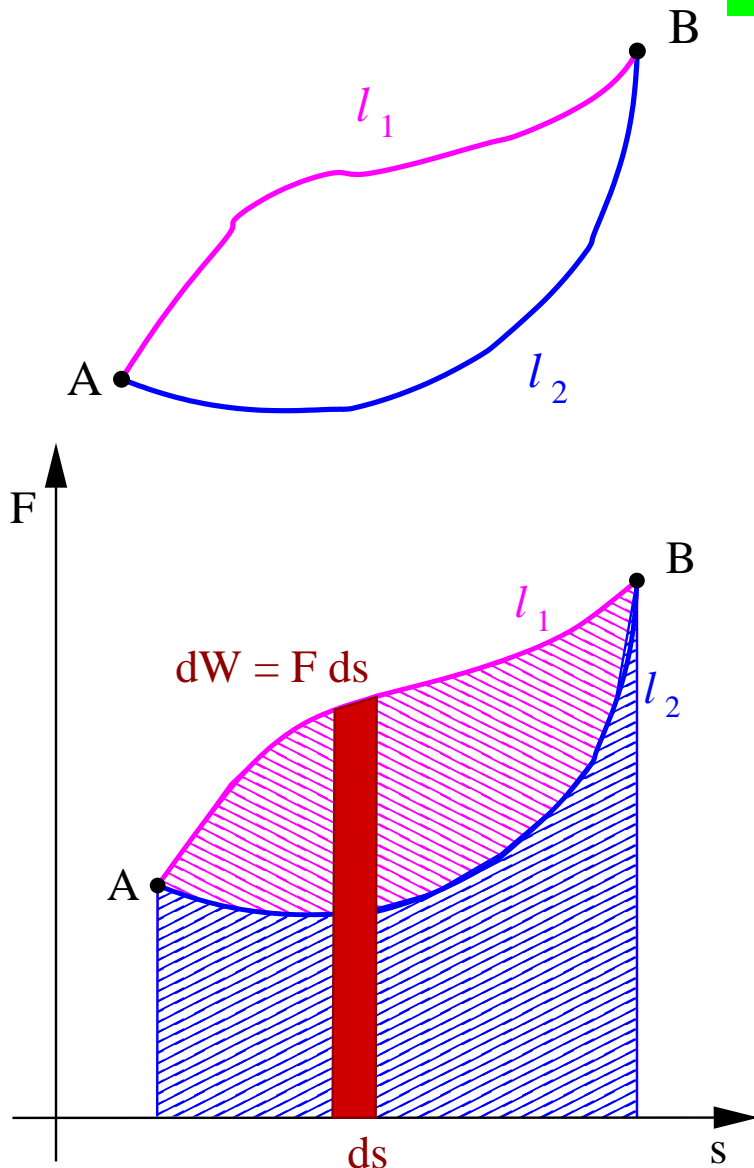
$$\begin{aligned} W &= \int_0^s F(x) \cdot dx \\ &= \int_0^s kx \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_0^s = \frac{1}{2} ks^2 \end{aligned}$$

# Praca i energia

## Praca

W ogólnym przypadku praca  $W_{AB}$  jaką wykonujemy podczas ruchu punktu z **A** do **B** może zależeć od:

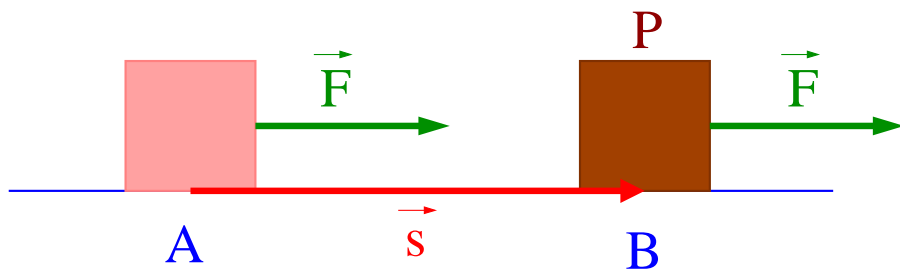
- przebytej drogi  $l$   
np. praca sił tarcia będzie proporcjonalna do  $l$
- toru ruchu  
np. jeśli siły oporu zależą od wyboru toru
- prędkości  
siły oporu w ośrodku zależą od prędkości
- czasu  
jeśli działające siły zależą od czasu



# Praca i energia

## Energia kinetyczna

Przyjmijmy, że siła  $\vec{F}$  jest siłą wypadkową działającą na ciało **P**. Zmiana prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym:



$$\begin{aligned}v_B - v_A &= \frac{F}{m} \cdot \Delta t \\ &= \frac{F}{m} \cdot \frac{s}{\langle v \rangle} = \frac{F}{m} \cdot \frac{2s}{v_A + v_B}\end{aligned}$$

Gdzie skorzystaliśmy z wyrażenia na prędkość średnią:  $\langle v \rangle = \frac{v_A + v_B}{2}$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}v_B^2 - v_A^2 &= (v_B - v_A)(v_B + v_A) = \frac{2}{m} \cdot F \cdot s = \frac{2}{m} \cdot W_{AB} \\ \Rightarrow W_{AB} &= \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k\end{aligned}$$

Pracę możemy wyrazić poprzez zmianę energii kinetycznej ciała  $E_k = \frac{mv^2}{2}$

# Praca i energia

## Energia kinetyczna

Praca jaką wykonuje siła  $\vec{F}$  przy przesunięciu P o  $ds$

$$\begin{aligned} dW &= F_t ds = m a_t ds = m \frac{dv}{dt} ds \\ \frac{dv}{dt} ds &= dv \frac{ds}{dt} \Rightarrow = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv \end{aligned}$$

Praca siły  $\vec{F}(\vec{r})$  na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B F_t(s) \cdot ds = \int_A^B m v dv = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

Niezależnie od postaci siły  $\vec{F}$  i drogi

na ciało nie działają inne siły, układ inercjalny

praca siły jest równa zmianie energii kinetycznej ciała  $E_k = \frac{mv^2}{2}$

# Praca i energia

## Moc

Moc średnia opisuje średnią pracę wykonywaną na jednostkę czasu:

$$P^{(\text{śr})} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Moc chwilowa

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Wstawiając  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Moc siły jest proporcjonalna do prędkości ciała!

Jednostką pracy jest **Dżul**:

$$1J = 1N \cdot 1m = 1 \frac{kg \ m^2}{s^2}$$

Jednostką mocy jest **Wat**:

$$1W = \frac{1J}{1s} = 1 \frac{kg \ m^2}{s^3}$$

Kiedyś używano jako jednostki mocy **konia mechanicznego**:

$$1 \ KM = 735.498 \ W$$

# Praca i energia

## Energia potencjalna

Ruch w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym  $\vec{g}$ .

Siła ciężkości działająca na masę  $m$ :  $\vec{F} = m \vec{g} = m (0, -g, 0)$

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -m \vec{g} (\vec{r}_A - \vec{r}_B) = m g (y_A - y_B)$$

Możemy wprowadzić **energię potencjalną** dla jednorodnego pola grawitacyjnego

$$E_p(\vec{r}) = -m \vec{g} \vec{r} = m g y$$

Pracę możemy wtedy wyrazić przez zmianę **energii potencjalnej**

$$W_{AB} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Mówimy, że siła ciężkości jest **siłą zachowawczą**.



# Praca i energia

## Energia potencjalna

Siła  $\vec{F}(\vec{r})$  jest **zachowawcza** (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od **położenia** punktów początkowego (A) i końcowego (B)

⇒ można ją wyrazić przez zmianę **energii potencjalnej**

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Jeśli droga jest zamknięta to praca jest równa zero

$$\int_A^A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

cyrkulacja (krążenie)  $\vec{F}$

Siłami zachowawczymi są też wszystkie siły centralne, zależne tylko od odległości  
 $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$  siła kulombowska, siła grawitacyjna, siły sprężystości...

# Praca i energia

## Siła a energia potencjalna

Praca wykonana przy infintezymalnym przesunięciu  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

zmiana energii potencjalnej  $\Rightarrow$  
$$= -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

Otrzymujemy:

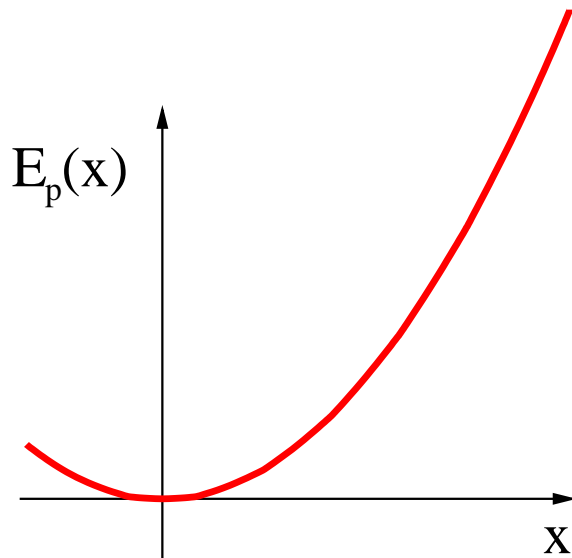
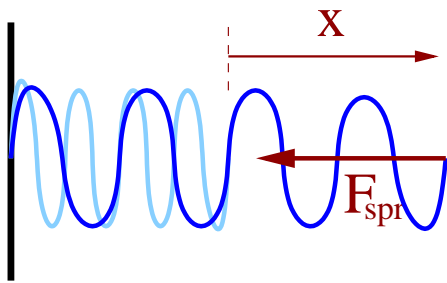
$$\vec{F} = \left( -\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$$

Znajomość potencjału siły zachowawczej jest równoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany.

# Praca i energia

## Siła a energia potencjalna



Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy.

$$W = \int_0^s F(x) \cdot dx = \frac{1}{2}ks^2$$

Koszt tej pracy rośnie energia potencjalna:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

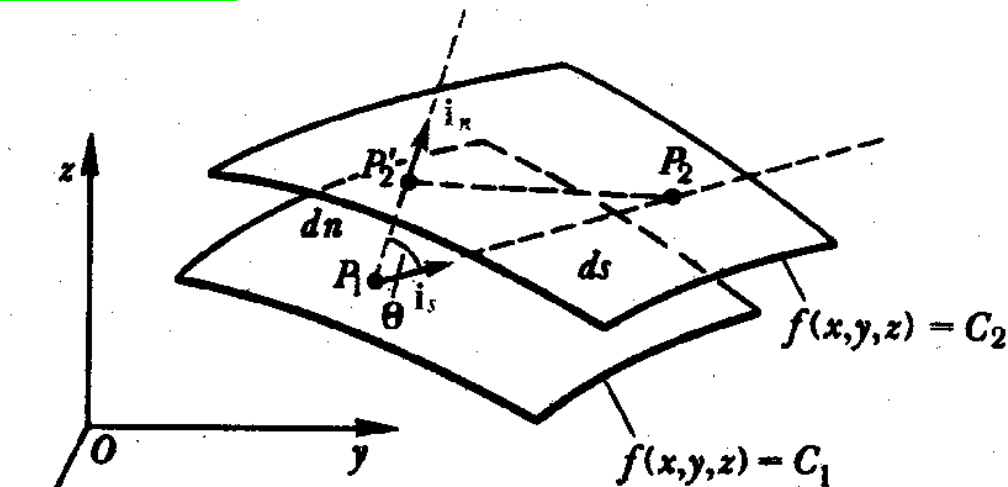
Siła sprężystości:

$$F_x^{spr}(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -kx$$

W momencie puszczenia sprężyny energia potencjalna zamienia się na kinetyczną...

# Praca i energia

## Gradient



Gradient wskazuje **kierunek** w którym następuje **największa zmiana** wartości funkcji skalarnej  $f(x, y, z)$ .

Wartość gradientu odpowiada **wartości pochodnej** funkcji  $f(x, y, z)$  wzdłuż tego kierunku.

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \vec{i}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\text{"nabla"} \Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}_n \frac{\partial f}{\partial n} \quad \vec{n} - \text{wektor normalny do } f = \text{const}$$

Siłę zachowawczą wyrażamy jako gradient energii potencjalnej:  $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$

# Zasada zachowania energii

## Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej  $\vec{F}(\vec{r})$  pomiędzy A i B wyraża się przez energię potencjalną

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B$$

Z drugiej strony, praca siły działającej na ciało zmienia energię kinetyczną:

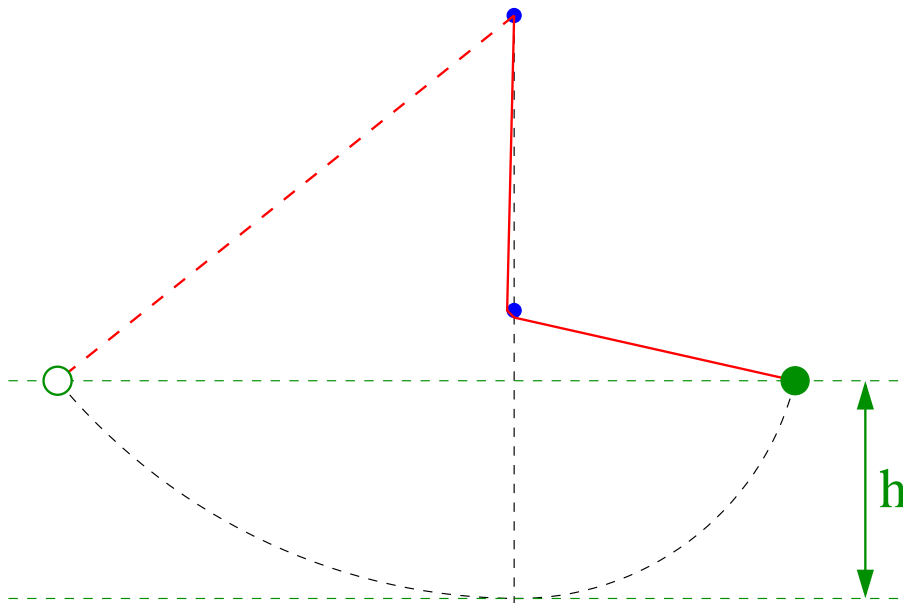
$$\begin{aligned} W_{AB} &= E_k^B - E_k^A \\ \Rightarrow E_k^B - E_k^A &= E_p^A - E_p^B \\ \Rightarrow E_k^B + E_p^B &= E_k^A + E_p^A \\ \Rightarrow E &= E_p + E_k = \text{const} \end{aligned}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

# Zasada zachowania energii

## Wahadło Galileusza

Wysokość na jaką wznosi się wahadło nie zmienia się przy zmianie długości nici:

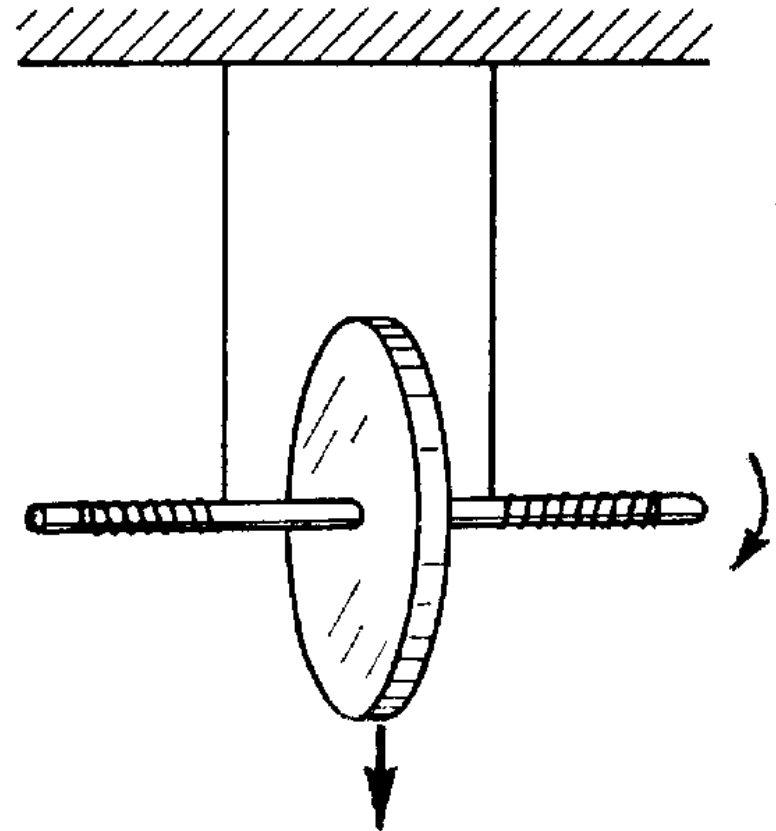


$$E_p + E_k = E = \text{const}$$

$$E_k = 0 \Rightarrow m g h = E$$

siły reakcji więzów nie wykonują pracy

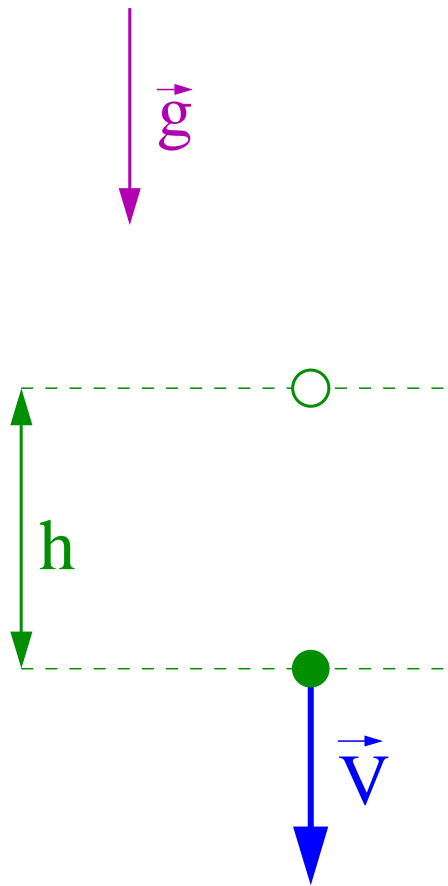
## Koło Maxwella



Przemiana energii potencjalnej w energię kinetyczną ruchu obrotowego.

# Zasada zachowania energii

## Spadek swobodny



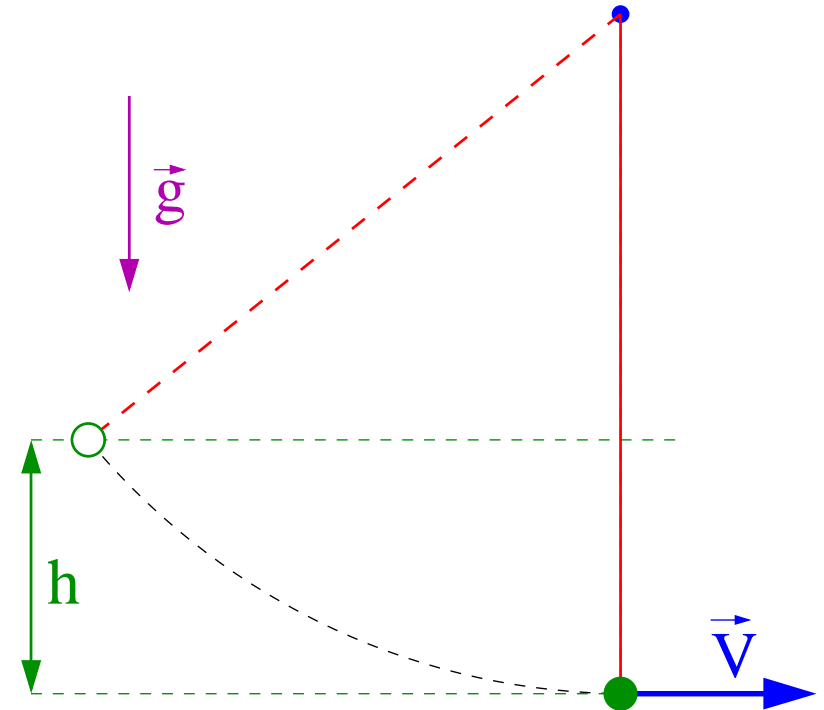
W jednorodnym polu  $\vec{g}$  ciało spada swobodnie z wysokości  $h$  ( $\vec{v}(0) = 0$ ).

**Prędkość końcowa** z zasady zachowania energii:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\frac{m v^2}{2} = m g h$$

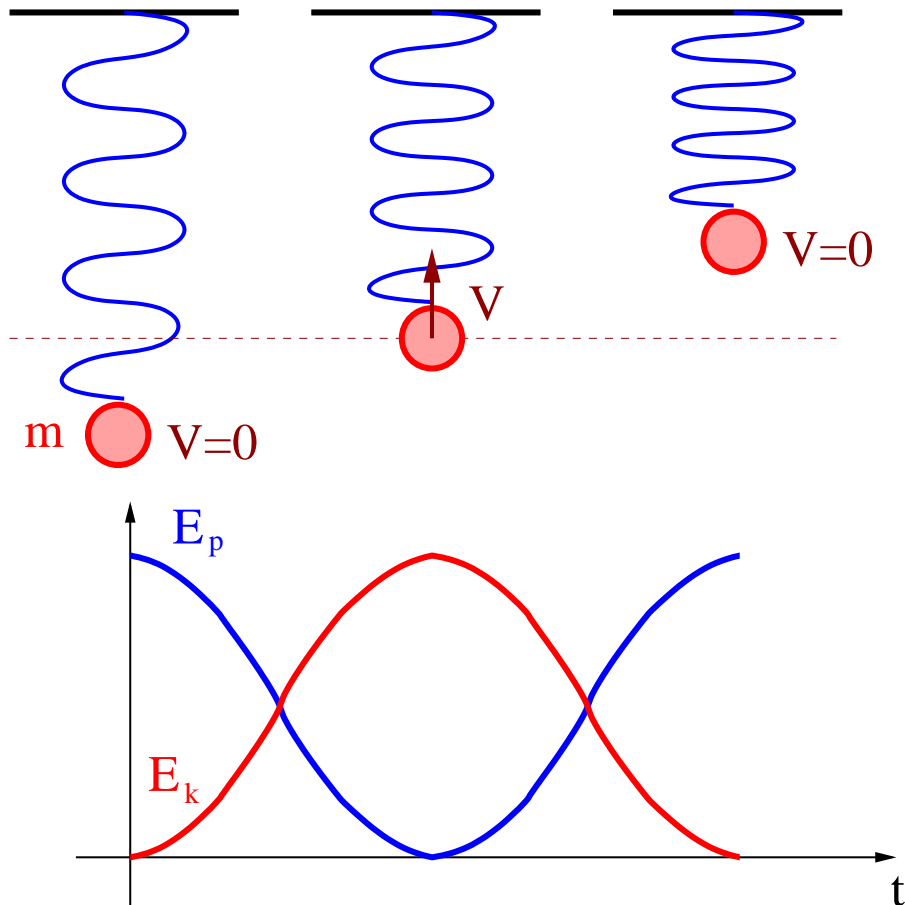
$$v = \sqrt{2 g h}$$



Taką samą prędkość uzyska wahadło puszczony z wysokości  $h$

# Zasada zachowania energii

## Siły sprężystości



Ruchu pod wpływem sił sprężystości:

$$E = E_p(x) + E_k(x) = \text{const}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

Ruch harmoniczny  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ :

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow E_p(x) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$v = \omega A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow E_k(x) = \frac{1}{2}m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$$



# Zasada zachowania energii

## Równania ruchu

Znajomość energii potencjalnej jest równoważna znajomości siły (zachowawczej):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Czy znając  $E_p(\vec{r})$  możemy rozwiązać równania ruchu ciała ?

- Możemy wyznaczyć zależność  $\vec{F}(\vec{r})$  i skorzystać z II zasady dynamiki...

albo

- Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii:

$$E = E_k(\dot{\vec{r}}) + E_p(\vec{r}) = \text{const}$$

W zależności od zagadnienia jeden albo drugi sposób może być bardziej użyteczny...

# Zasada zachowania energii

Dla ruchu prostoliniowego pod działaniem siły zachowawczej  $\vec{F}(x)$ , energia potencjalna  $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) = \text{const}$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymujemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}}$$
$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x'))}}$$

$\Rightarrow$  Znając  $E_p(x)$  możemy zawsze znaleźć związek między  $x$  i  $t$ .

# Zasada zachowania energii

**Przykład:**  $\vec{F} = F \vec{i}_x = \text{const} \Rightarrow E_p(x) = -F x \quad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

Przyjmując, że  $x = 0$  w chwili  $t = 0$  mamy:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E + F x'}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}} t = \frac{2}{F} \left[ \sqrt{E + F x'} \right]_0^x = \frac{2}{F} \sqrt{E + F x} - \frac{2}{F} \sqrt{E}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{\sqrt{2m}} t + \sqrt{E} = \sqrt{E + F x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left( \frac{F}{m} \right) \cdot t^2 + \sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot t$$
$$\frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$v_0$  - predkość w chwili  $t = 0 \Rightarrow$  energia całkowita  $E = \frac{mv_0^2}{2} > 0$

# Egzamin

## Przykładowe pytania testowe:

1. W wyniku czołowego zderzenia ciężarówka o masie 4 ton jadącej z prędkością 30 km/h z samochodem osobowym o masie 800 kg oba pojazdy zatrzymały się. Samochód osobowy poruszał się z prędkością:  
 A 80 km/h       B 120 km/h       C 150 km/h       D 180 km/h
2. Prędkość jaką może uzyskać jednostopniowa rakietka zależy od masy końcowej  $m_k$  i masy początkowej rakiety  $m_0$  jak  
 A  $\frac{m_0}{m_k} - 1$        B  $\ln \frac{m_0}{m_k}$        C  $\left(\frac{m_0}{m_k}\right)^2$        D  $\sqrt{\frac{m_0}{m_k}}$
3. Dwa kamienie o różnej masie wystrzelwane z tej samej procy (tak samo naciągniętej) będą miały równe  
 A prędkości       B zasięgi       C energie kinetyczne       D pędy
4. Dla ciała, poruszającego się w polu sił zachowawczych, zachowana(y) jest  
 A moment pędu       B pęd       C energia kinetyczna       D energia całkowita
5. Ciało  $A$  spuszczone swobodnie z wysokości cztery razy większej niż ciało  $B$ :  $h_A = 4h_B$ . Uzyskane prędkości  
 A  $v_A = 2 v_B$        B  $v_A = \sqrt{2} v_B$        C  $v_A = 4 v_B$        D  $v_A = 2\sqrt{2} v_B$



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego