



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Mechanika ruchu obrotowego

## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład VII:

- Ruch po okręgu
- Ruch w jednorodnym polu elektrycznym i magnetycznym
- Prawa ruchu w układzie obracającym się

# Pojęcia podstawowe

## Układ współrzędnych

Służy do określenia położenia ciała w danym układzie odniesienia

Położenie możemy zapisać na wiele różnych sposobów:

- układ współrzędnych kartezjańskich:

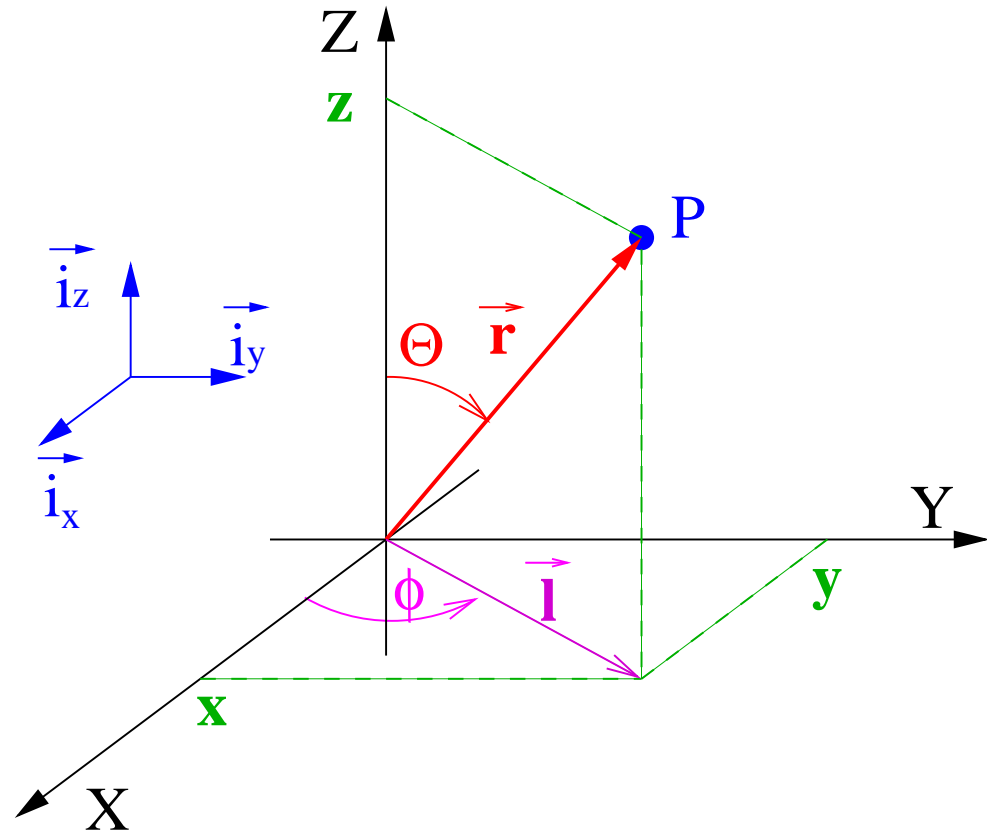
$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \cdot \vec{i}_x + y \cdot \vec{i}_y + z \cdot \vec{i}_z \\ &\equiv (x, y, z)\end{aligned}$$

- układ współrzędnych biegunowych:

$$\vec{r} = (r, \Theta, \phi)$$

- układ współrzędnych walcowych:

$$\vec{r} = (l, \phi, z)$$



# Oscylator harmoniczny

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (\text{ruch w jednym wymiarze})$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r} \quad (\text{postać ogólna})$$

Równanie oscylatora dobrze opisuje zachowanie bardzo wielu układów fizycznych: ciężarek na sprężynie, wahadło matematyczne (dla małych wychyleń), struna, itp...

Równanie oscylatora harmonicznego jest przykładem równania różniczkowego.

Ogólna postać rozwiązania:

$$1D: \quad x = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

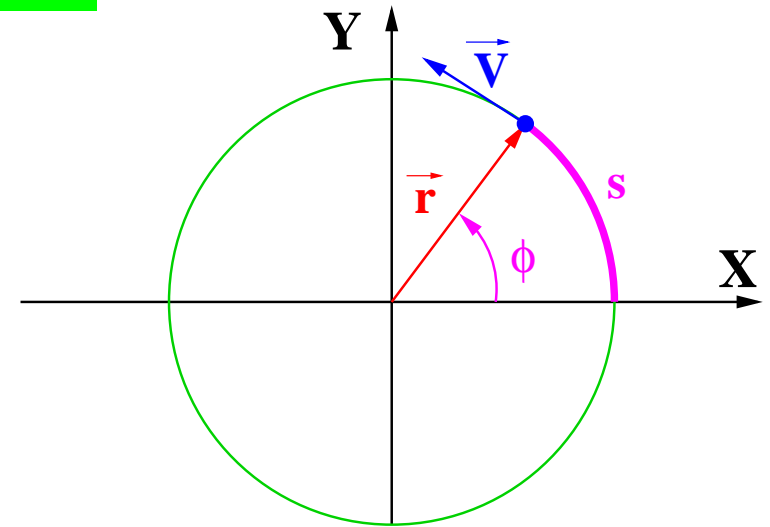
$$3D: \quad \vec{r} = \vec{A} \cdot \cos(\omega t) + \vec{B} \cdot \sin(\omega t)$$

W ogólnym przypadku ruch będzie płaski, w płaszczyźnie wyznaczonej przez początkowe położenie i prędkość:  $\vec{A} = \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \quad \omega \vec{B} = \vec{v}(0) = \vec{v}_0$ .

# Ruch po okręgu

Ruch **jednostajny po okręgu** możemy rozpatrywać jako złożeniem dwóch niezależnych ruchów harmonicznym (z różnicą faz  $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ ):

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\omega \cdot t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \\y &= r \cdot \sin(\omega \cdot t)\end{aligned}$$



Składowe przyspieszenia (jak dla ruchu harmonicznego):

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 \cdot x \\ a_y = -\omega^2 \cdot y \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r} \Rightarrow a_n = \omega^2 \cdot r = \frac{V^2}{r}$$

Przyspieszenie to jest nazywane **przyspieszeniem dośrodkowym** lub **przyspieszeniem normalnym** (prostopadłym do kierunku ruchu).

Gdy ruch po okręgu nie jest jednostajny pojawia się też składowa styczna:  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_s$

## Ciekawostka:

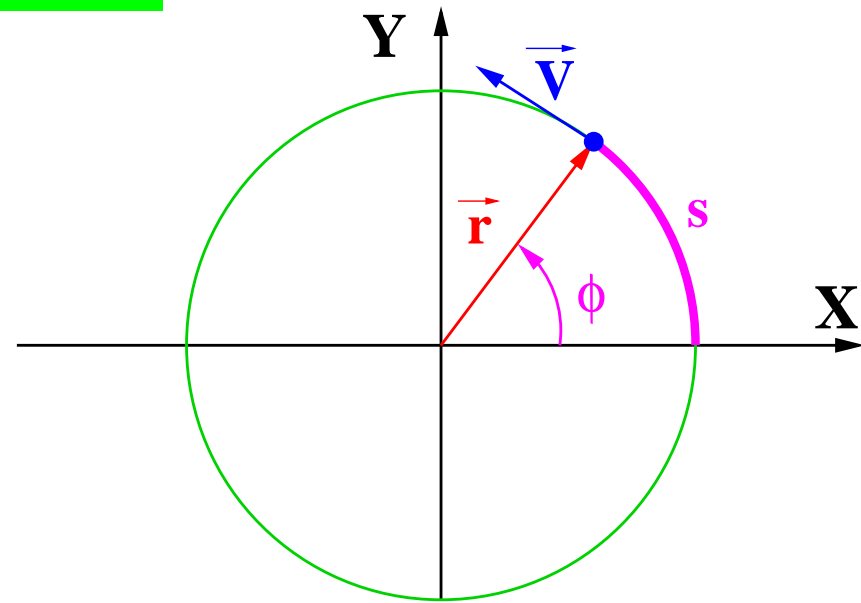
Ruch harmoniczny można przedstawić jako złożenie dwóch ruchów po okręgu...

# Ruch po okręgu

Przypadek ogólny:  $r = \text{const}$  i  $z = 0$

Położenie ciała opisane jest jedną zmienną:

- kąt w płaszczyźnie XY -  $\phi$ , lub
- długość łuku okręgu -  $s = r \cdot \phi$



Wartość prędkości:

$$V = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} = r\omega$$

$$\text{prędkość kątowa } \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

Przyspieszenie kątowe:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

Przyspieszenie styczne:  $a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = r\alpha \quad \Leftarrow \text{styczne: } \vec{a}_s \parallel \vec{V}$

Ruch jednostajny po okręgu:  $\alpha = 0 \Rightarrow \omega = \text{const} \Rightarrow V = \text{const} \Rightarrow a_s = 0$

ale  $\vec{V} \neq \text{const} \Rightarrow \vec{a}_n \neq 0 \quad !!!$

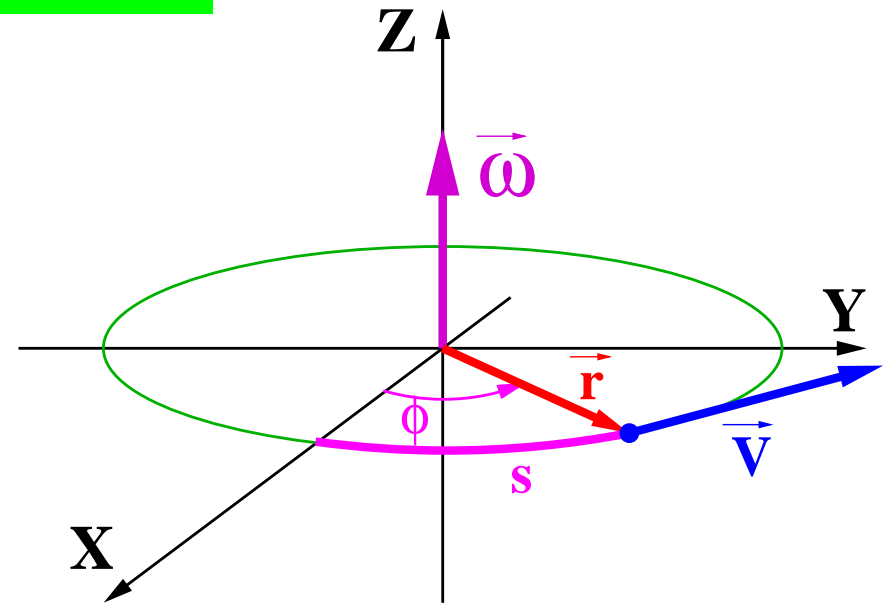
# Ruch po okręgu

Prędkość w zapisie wektorowym:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Przyspieszenie:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \\ &= \vec{a}_s + \vec{a}_n\end{aligned}$$



Oprócz przyspieszenia stycznego  $\vec{a}_s \parallel \vec{V}$ , opisującego zmianę  $|\vec{V}|$ , jest też przyspieszenie normalne  $\vec{a}_n$ , odpowiedzialne za zmianę kierunku  $\vec{V}$  w czasie.

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C) \cdot B - (A \cdot B) \cdot C$$

przyspieszenie dośrodkowe

# Równania ruchu

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu, czyli określanie ruchu ciała ze znajomości działających na nie sił.

Siła działająca na ciało może zależeć od położenia i prędkości cząstki oraz czasu  
⇒ równanie ruchu:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Ogólne rozwiązanie ma sześć stałych całkowania:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2, \dots, C_6)$$

Aby ściśle określić ruch ciała musimy poza rozwiązaniem równań ruchu wyznaczyć wartości wolnych parametrów (w ogólnym przypadku sześciu)

Najczęściej dokonujemy tego określając warunki początkowe:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$$

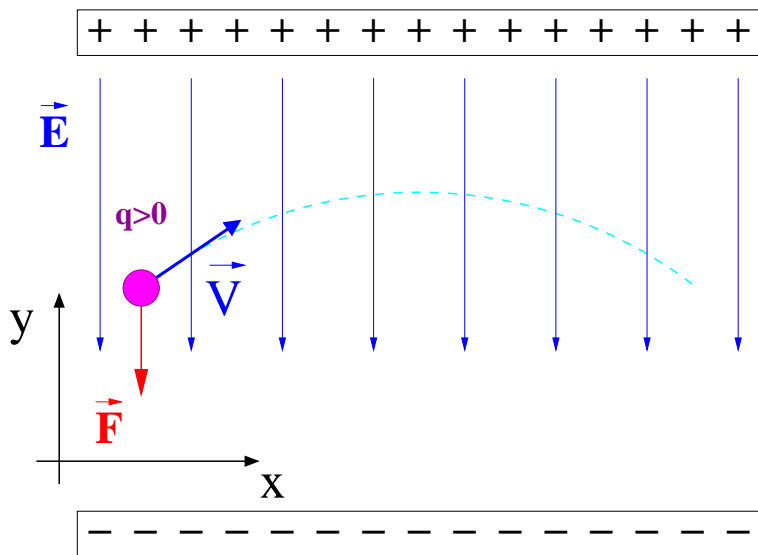
$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

$t_0$  - wybrana "chwila początkowa"

# Równania ruchu

## Pole elektryczne

Rozważmy cząstkę naładowaną o masie  $m$  i ładunku  $q$  poruszającą się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  (np. wewnątrz kondensatora płaskiego).



$$\vec{E} = (0, -E, 0)$$

Na cząstkę działa stała siła (z definicji natężenia):

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$$

Ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_E}{m} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

Pełna analogia do **poła grawitacyjnego**:

$$\vec{g} \Leftrightarrow \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

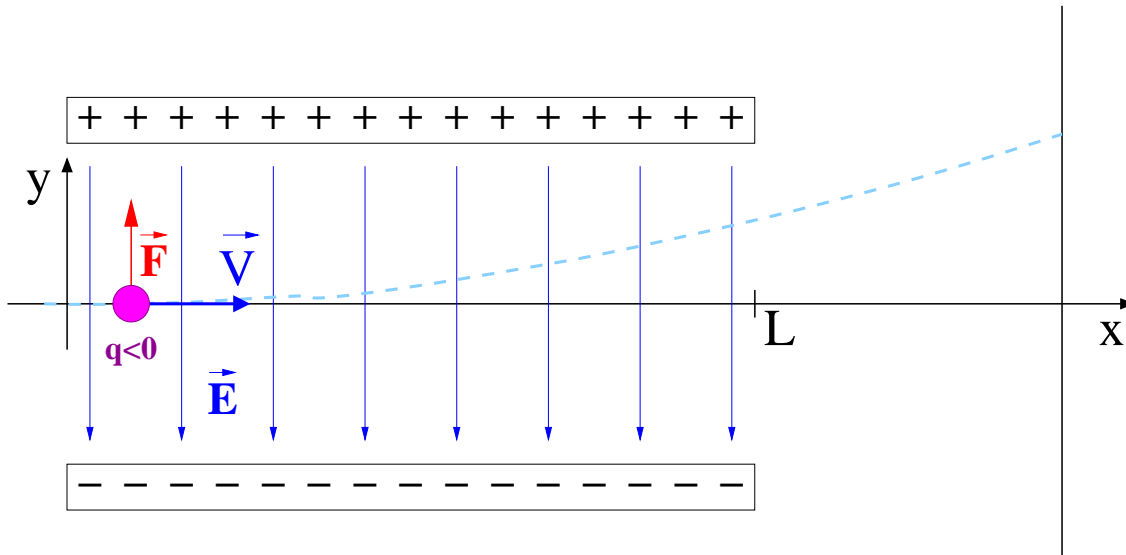
Np. energia potencjalna:

$$E_p^g = mgy \Leftrightarrow E_p^E = qEy$$



# Równania ruchu

## Pole elektryczne



Stałe jednorodne pole elektryczne  $\vec{E} = (0, E, 0)$

W chwili  $t_0 = 0$  w punkcie  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$  w pole wlatuje z prędkością  $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$  cząstka o masie  $m$  i ładunku  $Q$

$$\vec{F}_E = Q \vec{E}$$

Równania ruchu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Q E$$

Całkowanie + warunki początkowe

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = \frac{Q E}{2m} \cdot t^2$$

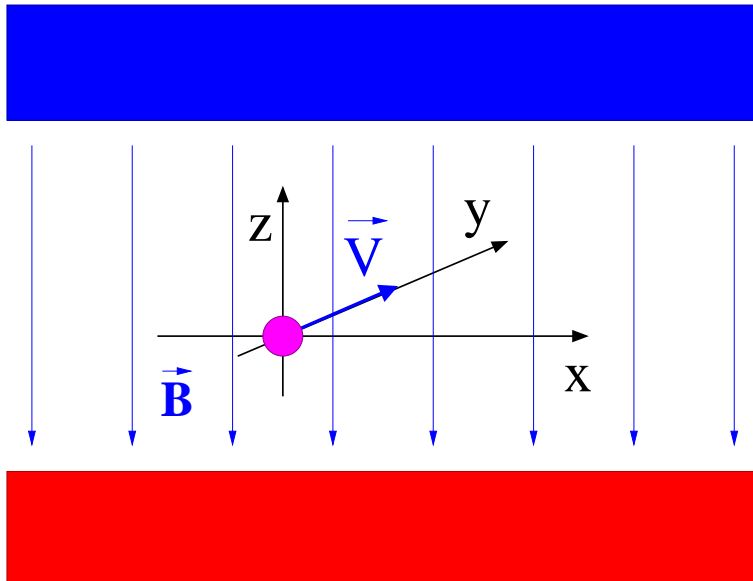
$$\Rightarrow \text{równanie toru: } y = \frac{Q E}{2m v_0^2} \cdot x^2$$

Kąt odchylenia:

$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{Q E L}{m v_0^2}$$

# Równania ruchu

## Pole magnetyczne



Stałe jednorodne pole  $\vec{B} = (0, 0, B)$

W chwili  $t_0 = 0$  w punkcie  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$   
w pole wlatuje z prędkością  $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$   
cząstka o masie  $m$  i ładunku  $Q$

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{siła Lorentza}$$

Z definicji iloczynu wektorowego

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = Q \cdot \begin{pmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Układ dwóch równań:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Q B \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Q B \frac{dx}{dt}$$

Całkując pierwsze równanie

$$m \frac{dx}{dt} = Q B (y - y_c)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = - \left( \frac{Q B}{m} \right)^2 (y - y_c)$$

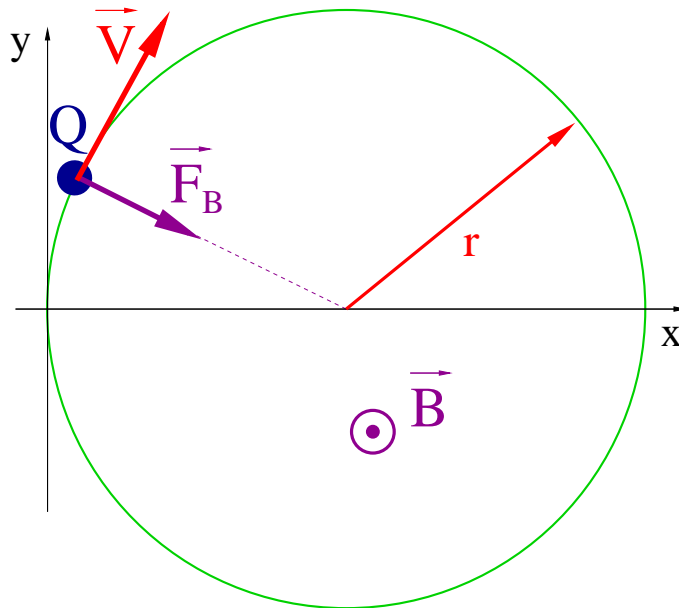
# Równania ruchu

## Pole magnetyczne

Otrzymujemy równania ruchu:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 (y - y_c) \quad \text{oscylator}$$
$$\frac{dx}{dt} = \omega (y - y_c) \quad \omega = \frac{Q B}{m}$$

⇒ ruch po okręgu  $\omega$  - częstość cyklotronowa



Rozwiązanie:

$$x = r \cdot \sin(\omega t + \phi_0) + x_c$$
$$y = r \cdot \cos(\omega t + \phi_0) + y_c$$

gdzie  $r$  - promień cyklotronowy:

$$r = \frac{m v_0}{Q B}$$

Z warunków początkowych  
( $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  i  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ ):

$$x = r \cdot (1 - \cos \omega t)$$
$$y = r \cdot \sin \omega t$$

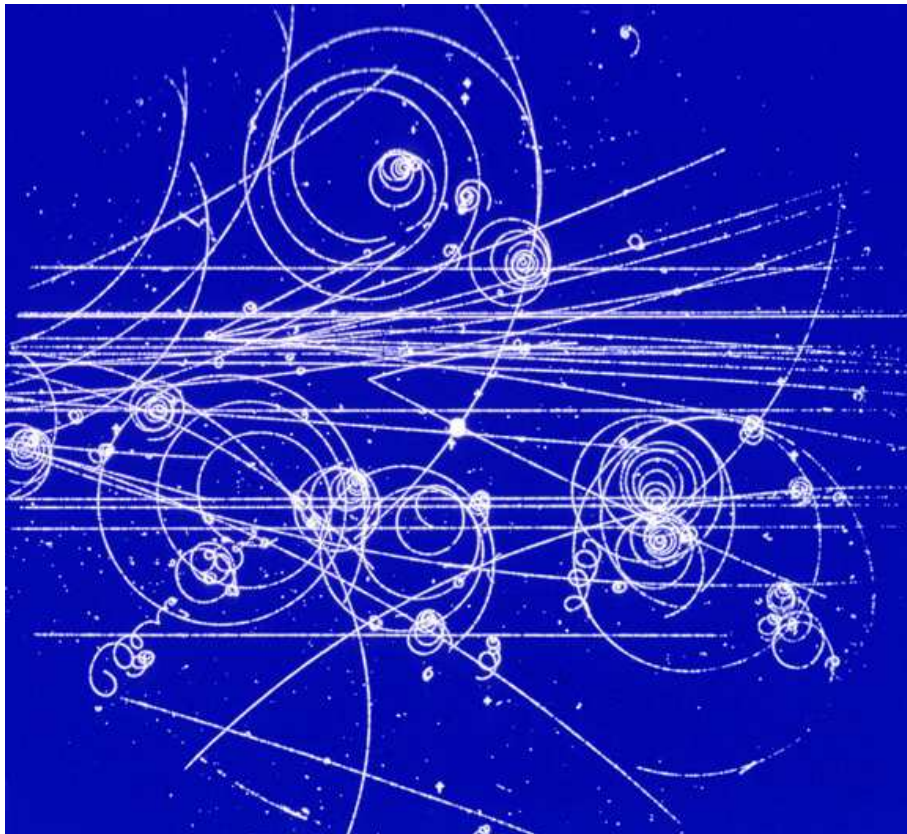
Ruch w polu magnetycznym  
jest jednostajny:  $v = \text{const}$

$$r = \frac{m v}{Q B} = \frac{p}{Q B}$$

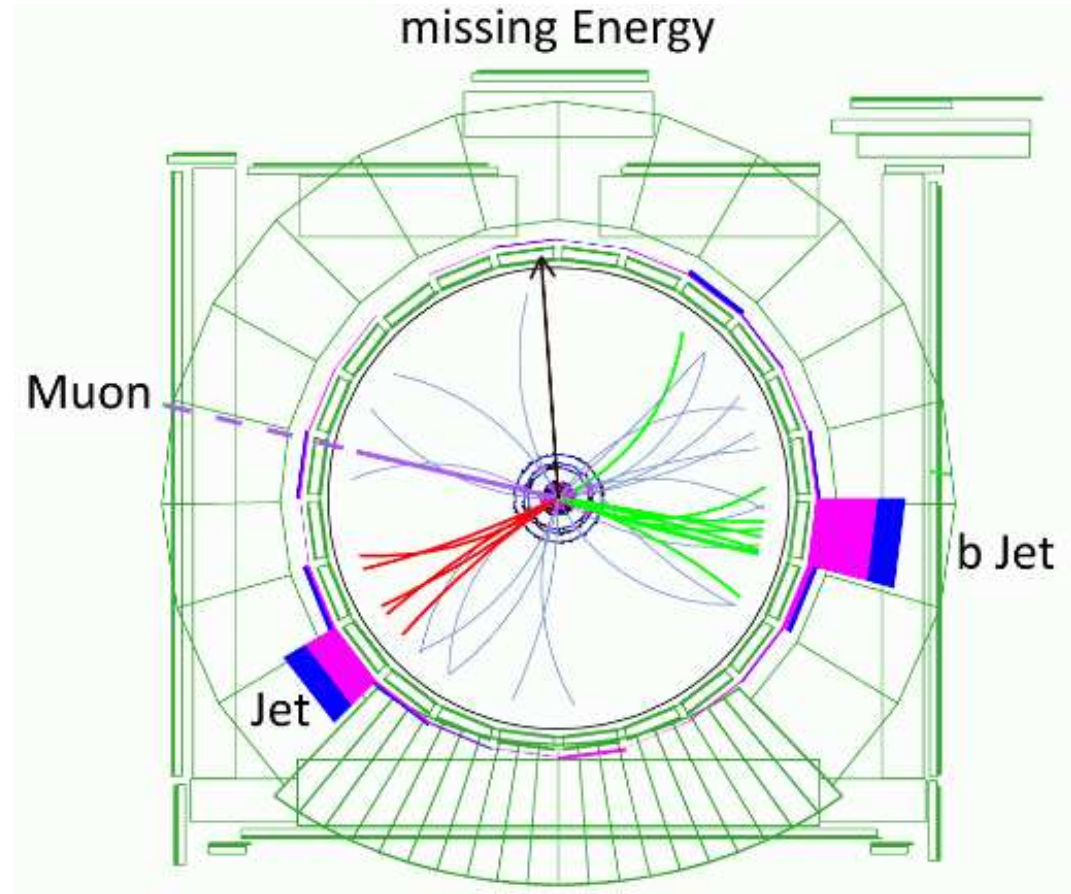
# Równania ruchu

W fizyce cząstek **pole magnetyczne** powszechnie wykorzystywane jest do **pomiaru pędu cząstek**. Wszystkie długożyciowe cząstki naładowane mają ładunek  $\pm 1e...$

Komora pęcherzykowa w CERN



Detektor CDF w Fermilab



# Równania ruchu

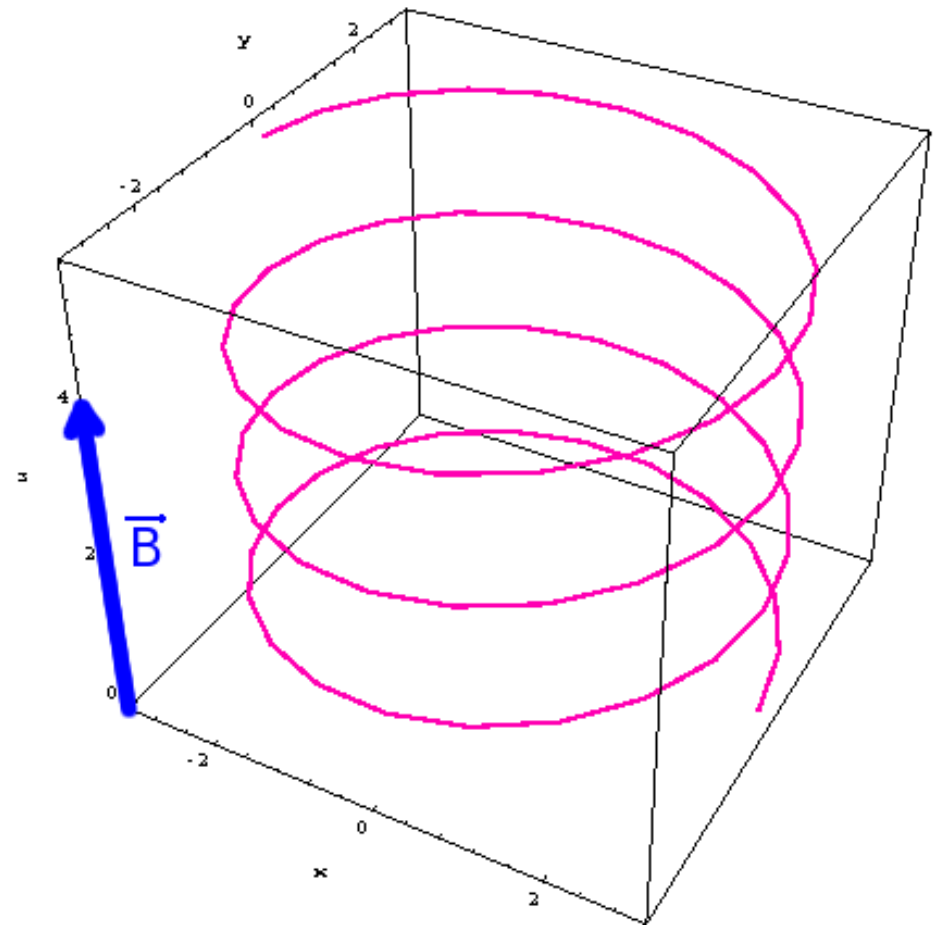
## Pole magnetyczne

W ogólnym przypadku prędkość cząstki  $\vec{V}$  nie musi być prostopadła do wektora indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$ .

Jednak siła Lorentza zawsze prostopadła do  $\vec{B} \Rightarrow$  na kierunku równoległym do pola znika!

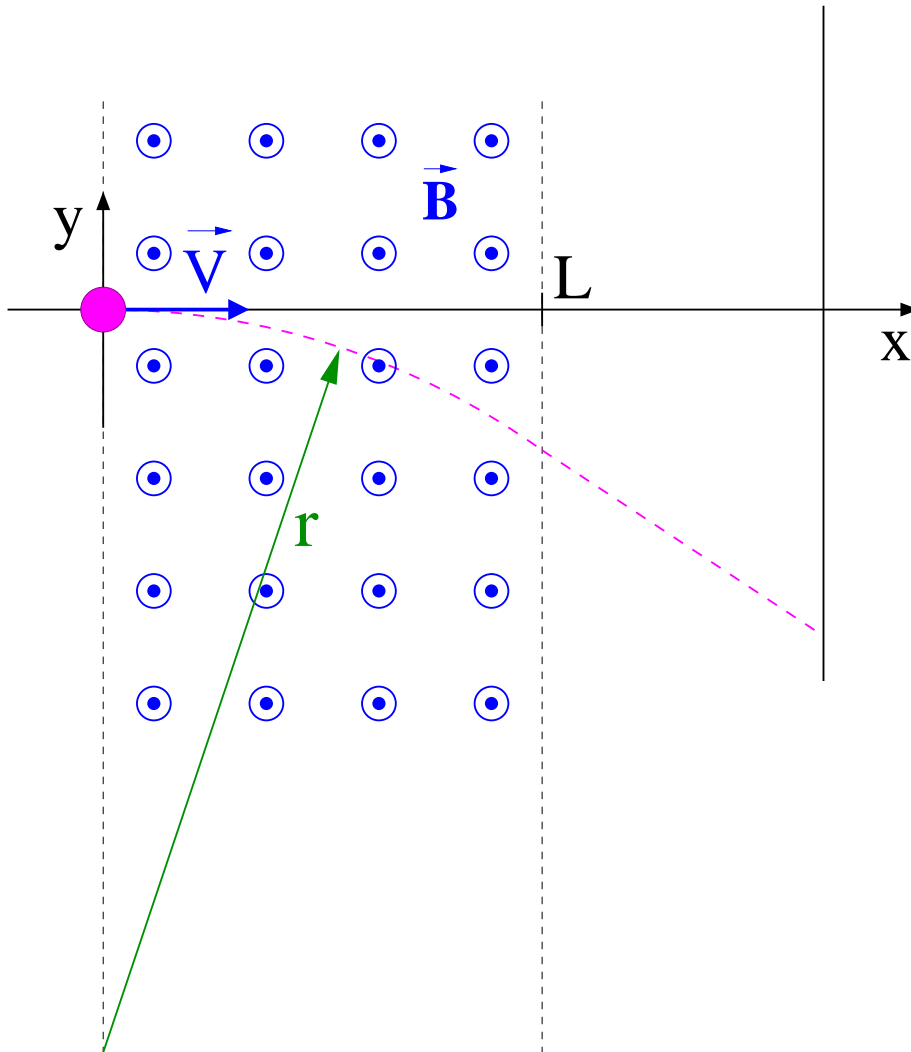
W kierunku wektora pola ruch cząstki jest ruchem jednostajnym.

W ogólnym przypadku torem ruchu jest spirala.



# Równania ruchu

## Pole magnetyczne



Odchylenie cząstki przelatującej przez wąski obszar jednorodnego pola zakładamy  $\omega t \ll 1$ :

$$x \approx r \cdot \omega t$$

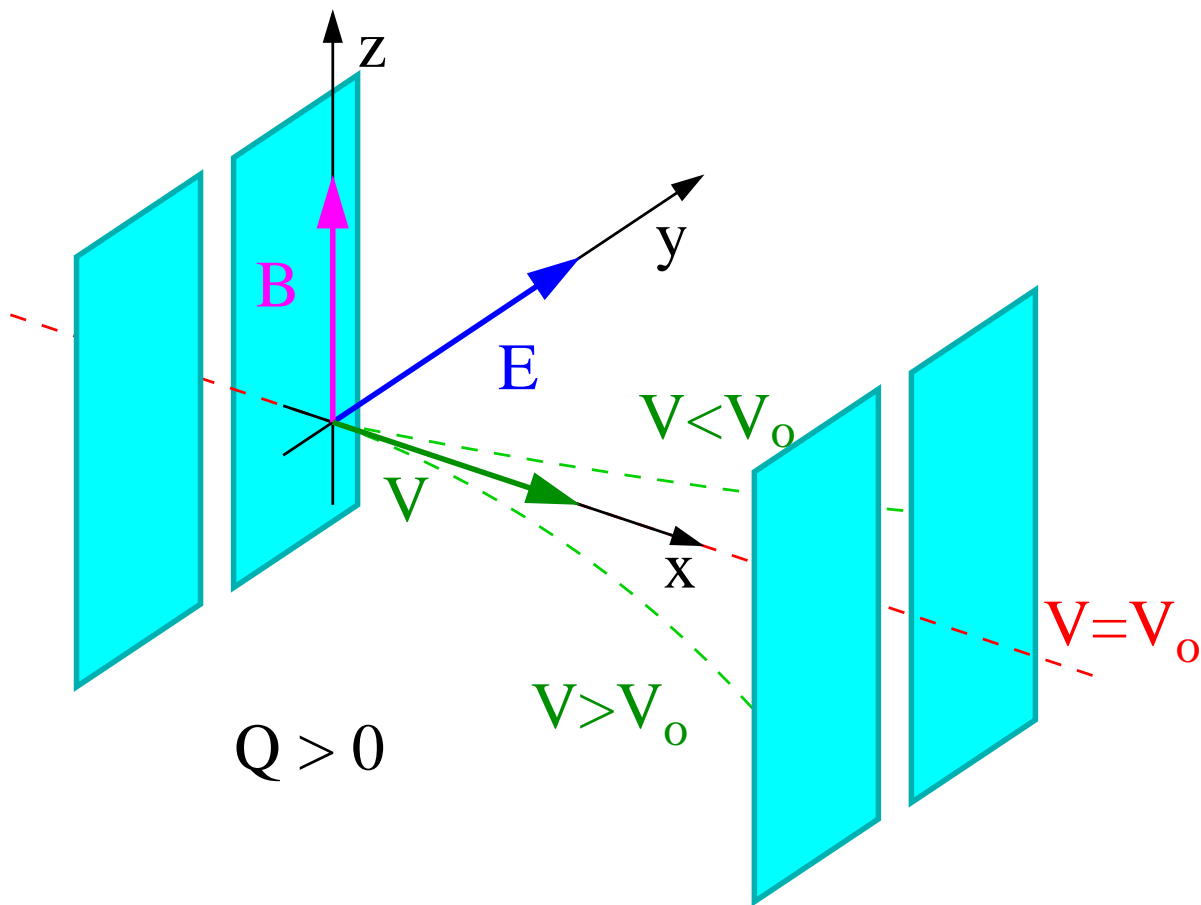
$$y \approx r \cdot \left[ \left( 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} \right) - 1 \right]$$
$$= - \frac{x^2}{2 r}$$

Kąt odchylenia:

$$\tan \theta = \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{L}{r} = \frac{Q B L}{m v_0}$$

# Równania ruchu

## Selektor prędkości



Cząstka w skrzyżowanych  
jednorodnych polach  $\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\vec{F}_E = Q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla prędkości  $V_0 = \frac{E}{B}$   
wypadkowa siła  $\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$

$\Rightarrow$  tor prostoliniowy

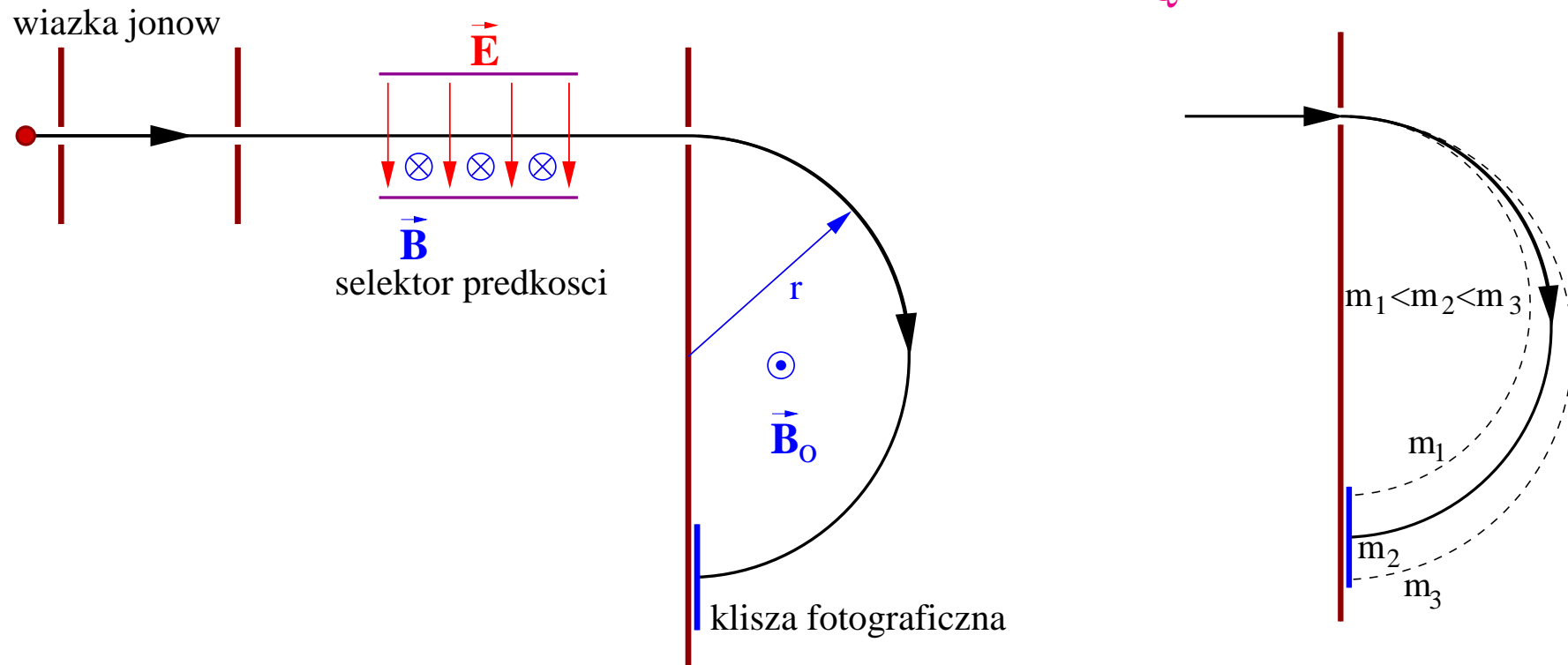
$\Rightarrow$  metoda selekcji cząstek  
o ustalonej prędkości

niezależnie od ich  $Q$  i  $m$

# Równania ruchu

## Spektrometr Bainbridge'a

Mierzimy promień cyklotronowy  $r = \frac{m v_0}{Q B}$   
dla cząstek o ustalonej prędkości  $v_0 = \frac{E}{B}$   
 $\Rightarrow$  pomiar  $\frac{m}{Q}$



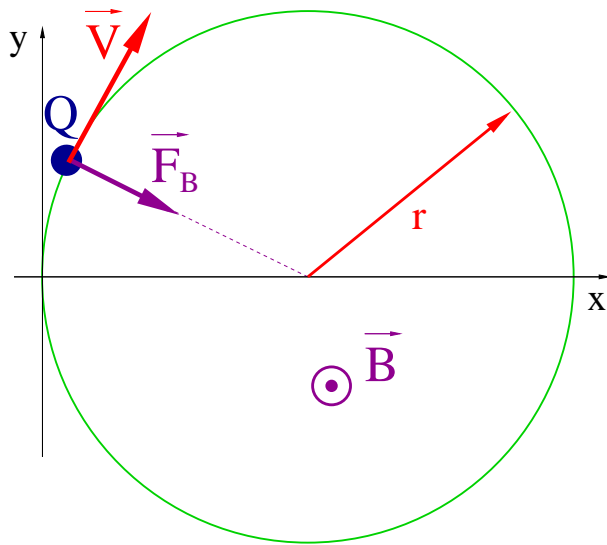
Cząstki o różnych masach zaczernią kliszę w różnych odległościach od szczeliny



# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa

Cząstka naładowana w polu magnetycznym



Siła Lorenza:

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla  $\vec{v} \perp \vec{B}$ :

$$F_B = Q v B$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{Q B}{m v} m v^2 = \frac{1}{r} m v^2$$

Promień cyklotronowy:

$$r = \frac{m v}{Q B} = \frac{p}{Q B}$$

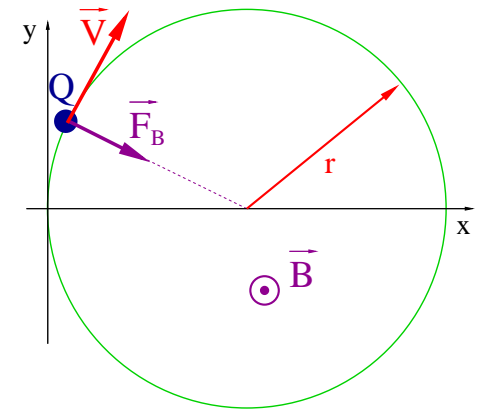
$$F_B = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r$$

# Ruch po okręgu

## Zasada bezwładności

“Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.” I. Newton

⇒ aby ciało pozostawało w ruchu po okręgu konieczne jest działanie siły ⇒ **siła dośrodkowa**



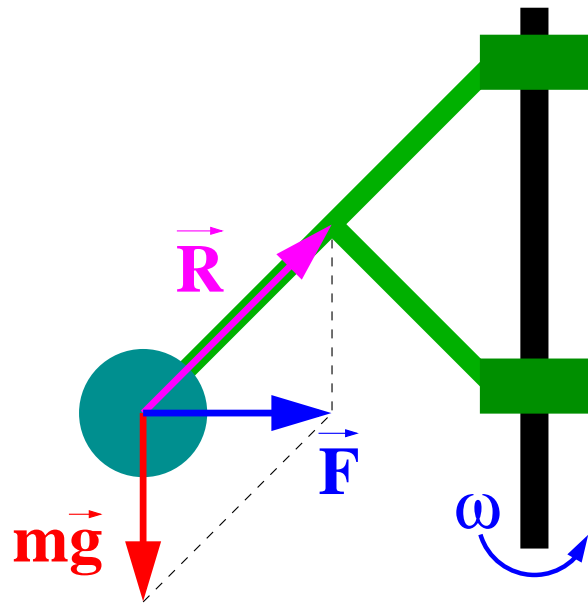
Ruch po okręgu może być wynikiem działania różnego rodzaju sił:

- siły zewnętrzne
  - ⇒ siła Lorenza (pole magnetyczne)
  - ⇒ siły sprężystości
- siły reakcji więzów (kulka na nitce)
- wypadkowej sił reakcji i sił zewnętrznych (regulator Watta, kulka w wirującym naczyniu...)

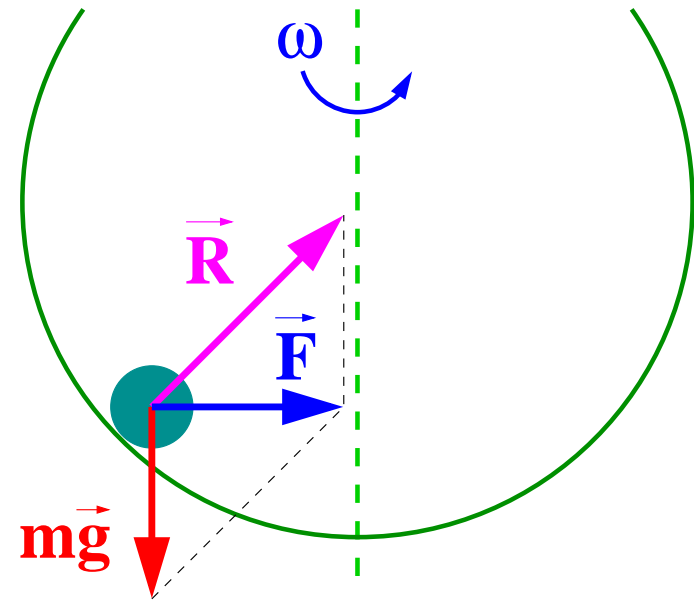
# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu

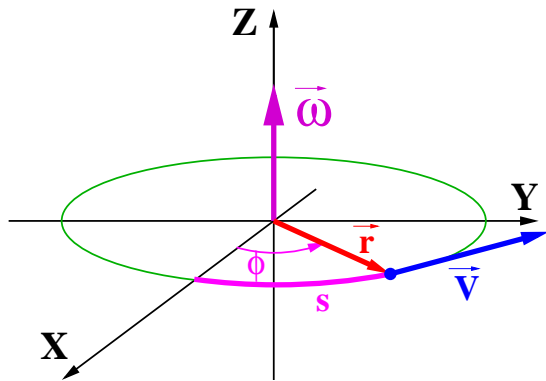


Siła dośrodkowa jest wypadkową siły reakcji i siły ciężkości:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa



$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$z \equiv 0$$

$$\Rightarrow a_x = -\omega^2 r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a_y = -\omega^2 r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

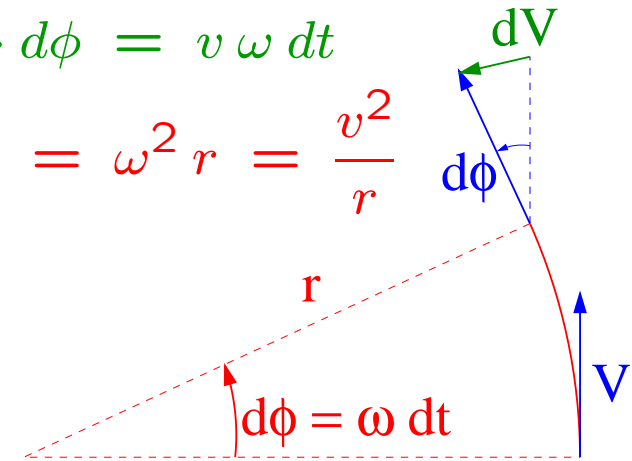
$$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dv = v \cdot d\phi = v \omega dt$$

$$a = v \omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$



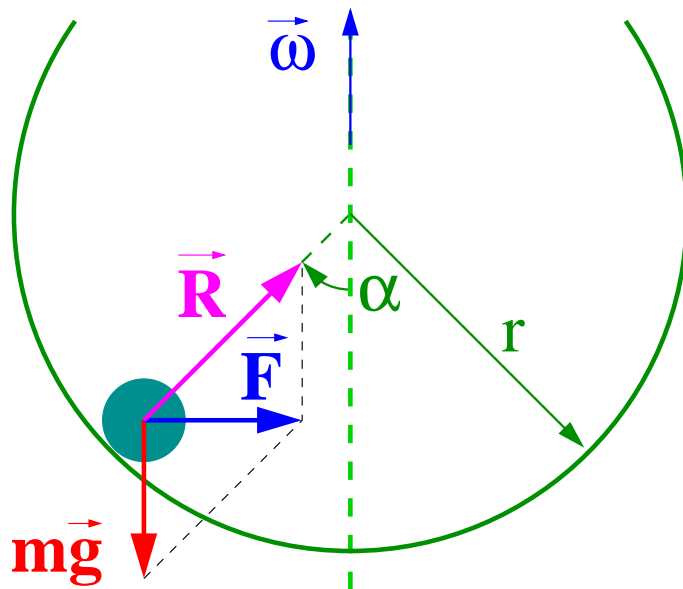
W zapisie wektorowym:  $\vec{\omega} = \text{const}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= -\omega^2 \cdot \vec{r}_{\perp} \quad \vec{r}_{\perp} = (x, y, 0) \end{aligned}$$

# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa

### Kulka w wirującym naczyniu



$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Siła dośrodkowa skierowana poziomo ze składania sił:

$$\Rightarrow R \cdot \cos \alpha - mg = 0$$

$$F = R \cdot \sin \alpha = mg \cdot \tan \alpha$$

Z równania ruchu:

$$F = m\omega^2 r_{\perp} = m\omega^2 r \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 r}$$

Kulka odchyli się dopiero dla  $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}} = \omega_0$

$\omega_0$  - częstość drgań wahadła matematycznego o długości  $r$

# Układy nieinercyjne

## Prawa ruchu

Niech układ  $O'$  porusza się względem układu inercyjnego  $O$ .

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)

Niech  $\vec{r}_o(t)$  opisuje położenie układu  $O'$  w  $O$ . Przyspieszenie:  $\vec{a}_o = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}$

Prawa ruchu w układzie inercyjnym  $O$ :

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym  $O'$ :

$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_o$$

⇒ w układzie nieinercyjnym musimy wprowadzić siłę bezwładności  $\vec{F}_b = -m\vec{a}_o$

Czy możemy to podejście zastosować także w przypadku, gdy układy obracają się względem siebie?

Problem komplikuje się, bo przyspieszenie względne zależy od położenia...

## Układ obracający się

Niech układ  $O'$  obraca się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$  względem układu inercyjnego  $O$ .

Dla uproszenia przyjmijmy, że początki obu układów pokrywają się.

Rozważmy ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie  $O'$ :

Z punktu widzenia obserwatora  $O$  ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

W układzie  $O'$ , aby opisać równowagę sił (ciało pozostaje w spoczynku) musimy wprowadzić siłę bezwładności:

$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

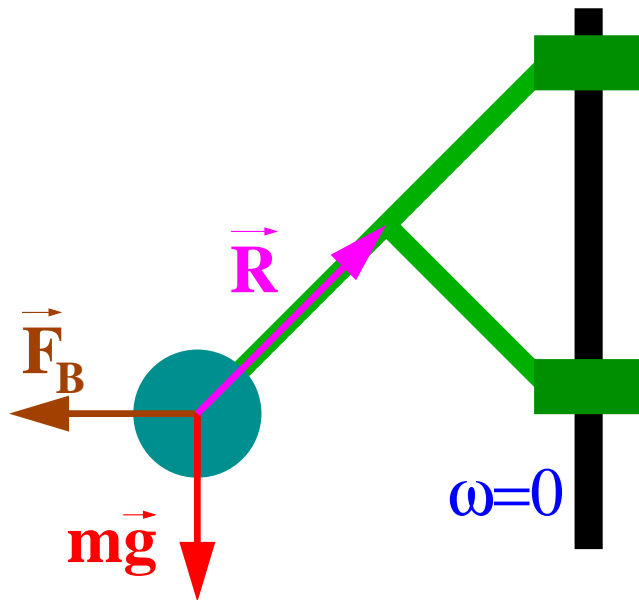
$\Rightarrow$  siła odśrodkowa

Siły bezwładności są siłami pozornymi, wynikającymi z nieinercyjnego charakteru układu odniesienia

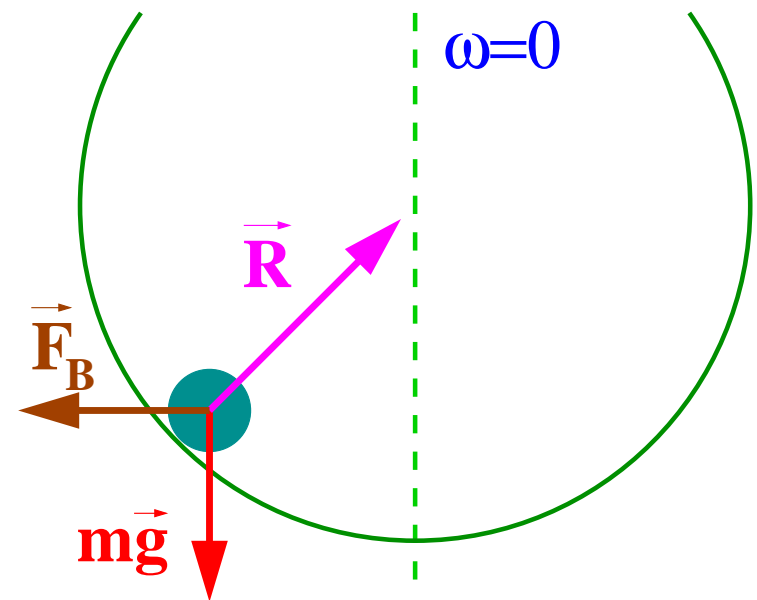
# Układ obracający się

## Siła odśrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu



Równowaga sił w układzie obracającym się:

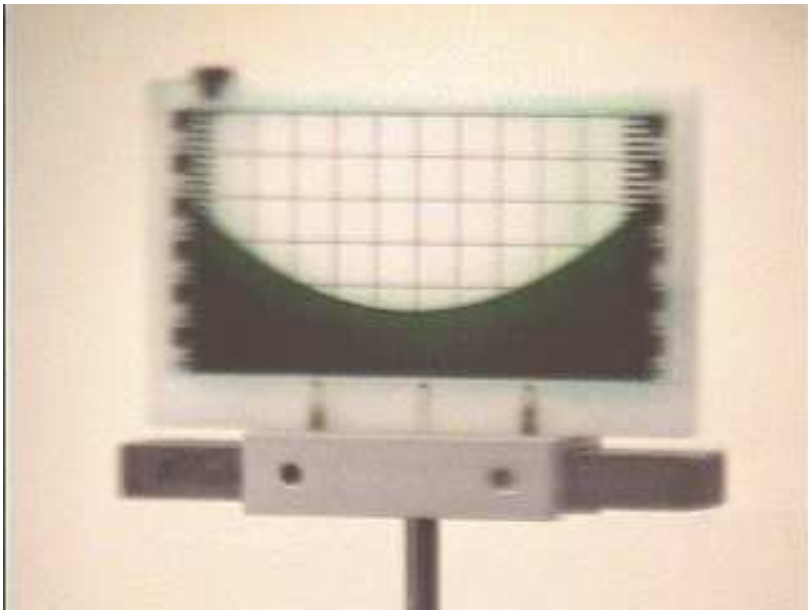
$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_b = m\vec{a}' = 0$$



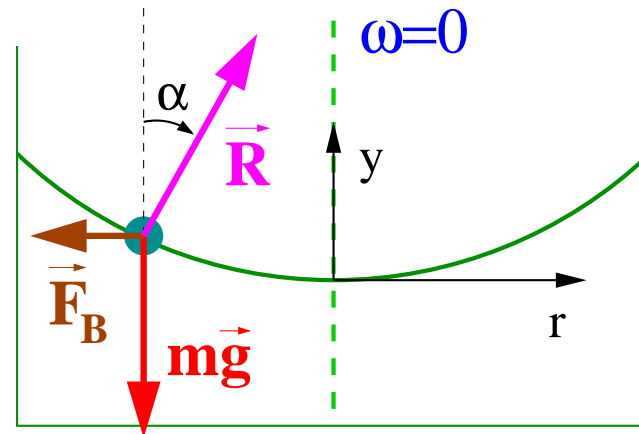
# Układ obracający się

## Siła odśrodkowa

Ciecz w wirującym naczyniu



Powierzchnia cieczy przyjmuje kształt paraboliczny



Równowaga drobiny na powierzchni cieczy:

$$mg \sin \alpha - m\omega^2 r \cos \alpha = 0$$

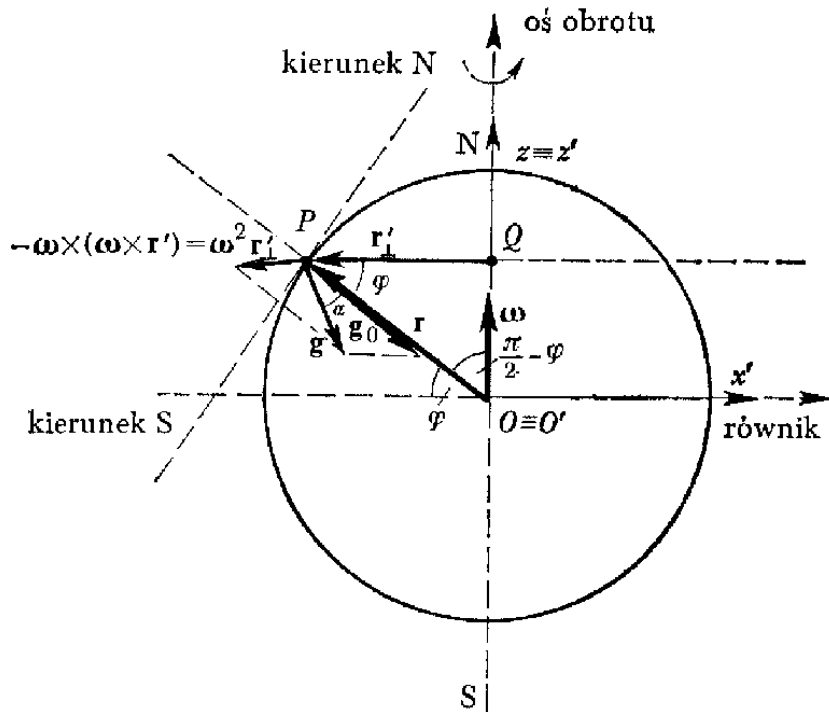
(rzut na powierzchnie cieczy)

$$\frac{dy}{dr} = \tan \alpha = \frac{\omega^2}{g} r$$

$$\Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2 + y_0$$

# Układ obracający się

## Ruch obrotowy Ziemi



$$\omega \approx \frac{2\pi}{23^h 56^m 04^s} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$$

Ciała nieruchome względem powierzchni Ziemi. Zmiana efektywnego przyspieszenia ziemskiego związana z ruchem obrotowym Ziemi:

$$\Delta g = -\omega^2 r_{\perp} \cos \phi = -\omega^2 r_Z \cos^2 \phi$$

$$\approx -0.033 \frac{m}{s^2} \cdot \cos^2 \phi \quad \phi - \text{szerokość geo.}$$

Wyniki pomiarów:

biegun N  $g = 9.83216 \frac{m}{s^2}$

Warszawa  $g = 9.81230 \frac{m}{s^2}$

równik  $g = 9.78030 \frac{m}{s^2}$

Efekt większy ze względu na spłaszczenie Ziemi

## Układ obracający się

Układ  $O'$  obraca się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$  względem układu inercyjnego  $O$ .

Rozważmy teraz ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie  $O$ :

Z punktu widzenia obserwatora  $O'$  ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

W układzie  $O'$  działa tymczasem pozorna siła odśrodkowa

$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

$\Rightarrow$  musimy wprowadzić kolejną siłę ?!

Aby “uratować” równania ruchu potrzebujemy

$$\vec{F}_c = -2 m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

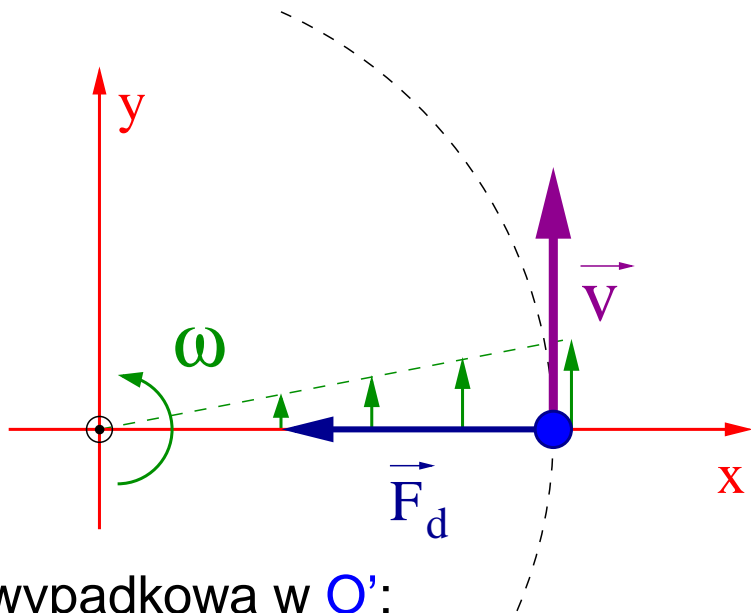
$\Rightarrow$  czy to w ogóle ma sens ?...

# Układ obracający się

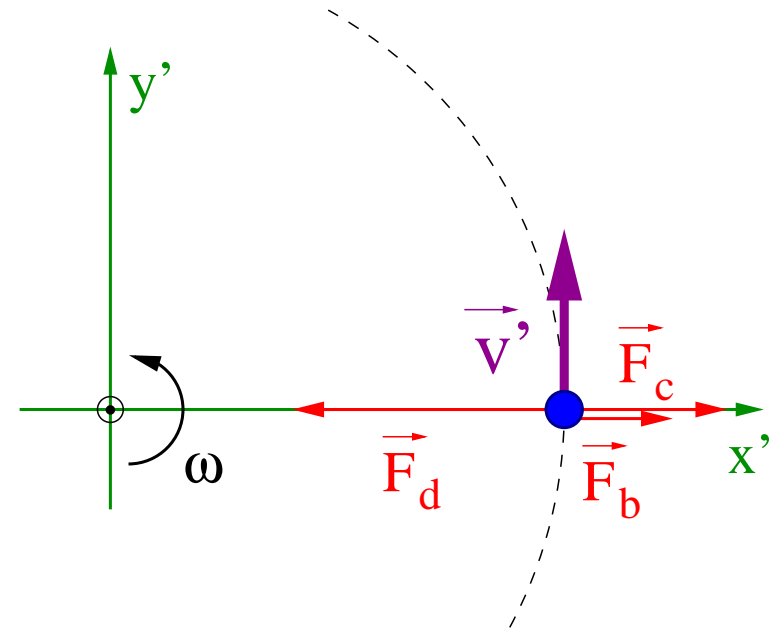
Punkt materialny poruszający się po okręgu w układzie  $O$ , siła dośrodkowa  $F_d = m \frac{V^2}{r}$ .

W układzie obracającym się  $O'$  prędkość punktu wynosi  $V' = V - \omega r$

Układ  $O$



Układ  $O'$



Siła wypadkowa w  $O'$ :

$$F'_d = m \frac{V'^2}{r} = m \frac{(V' + \omega r)^2}{r} - 2m\omega V' - m\omega^2 r = F_d - F_c - F_b$$

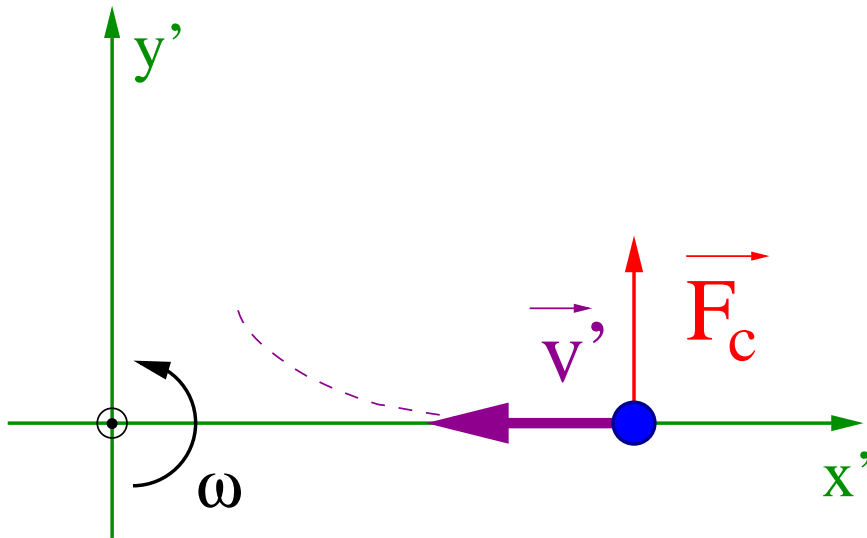
Dodatkowa siła pozorna  $\vec{F}_c$  (siła **Coriolisa**) konieczna do opisanie ruchu po okręgu w  $O'$

## Układ obracający się

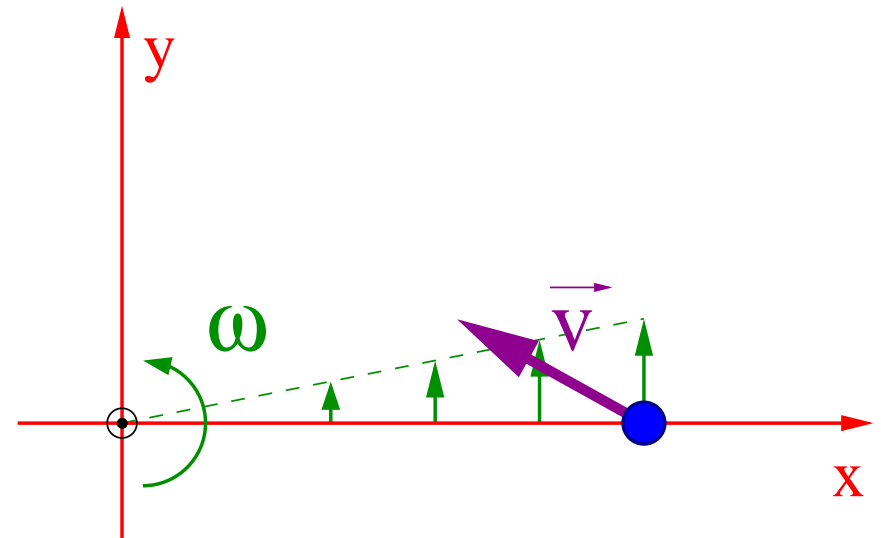
Rozważmy teraz punkt materialny poruszający się radialnie w układzie  $O'$ .

W inercyjnym układzie  $O$  zbliżający się do centrum układu punkt materialny zaczyna “wyprzedzać” punkty układu  $O'$ , gdyż ich prędkość w ruchu obrotowym maleje...

Układ  $O'$



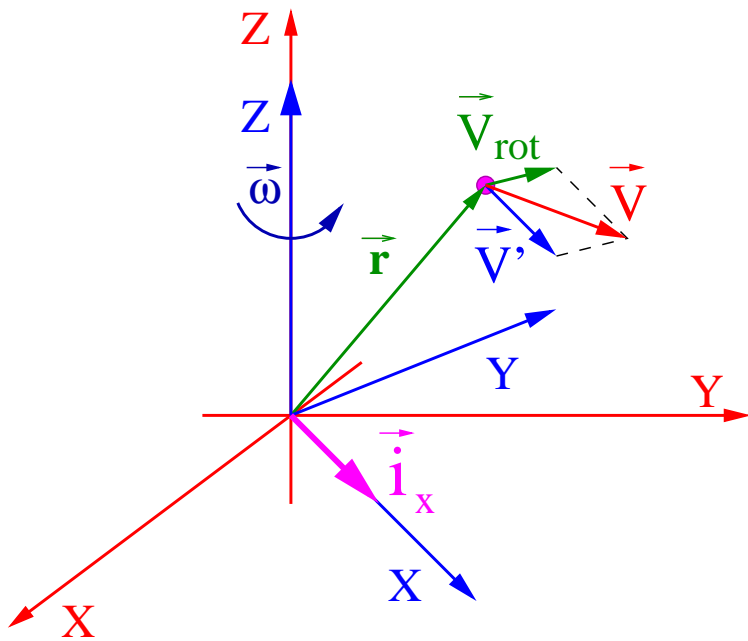
Układ  $O$



Pozorna siła Coriolisa pojawia się w układzie obracającym się (nieinercyjnym), żeby opisać odchylenie od toru prostoliniowego...

# Układ obracający się

Układ  $O'$  obraca się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$  względem układu inercyjnego  $O$ .



Dodawanie prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{rot} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Pochodna dla wektora  $\vec{o}$  z układu  $O'$ :  $(\vec{r}' \text{ i } \vec{v}')$

$$\frac{d\vec{o}'}{dt} = \frac{d\vec{o}'}{dt'} + \vec{\omega} \times \vec{o}'$$

pochodna w  $O'$  + obrót osi  $O'$

$$\Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\vec{a}'}_{\text{przyp. w } O'} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}_{\text{przyp. } O'} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{przyp. dośrodkowe}} + \underbrace{2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{przyp. Coriolisa}}$$

przyp. w  $O'$

przyp.  $O'$

przyp. dośrodkowe

przyp. Coriolisa

# Układ obracający się

## Równanie ruchu

W układzie inercyjnym O:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym O':

$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

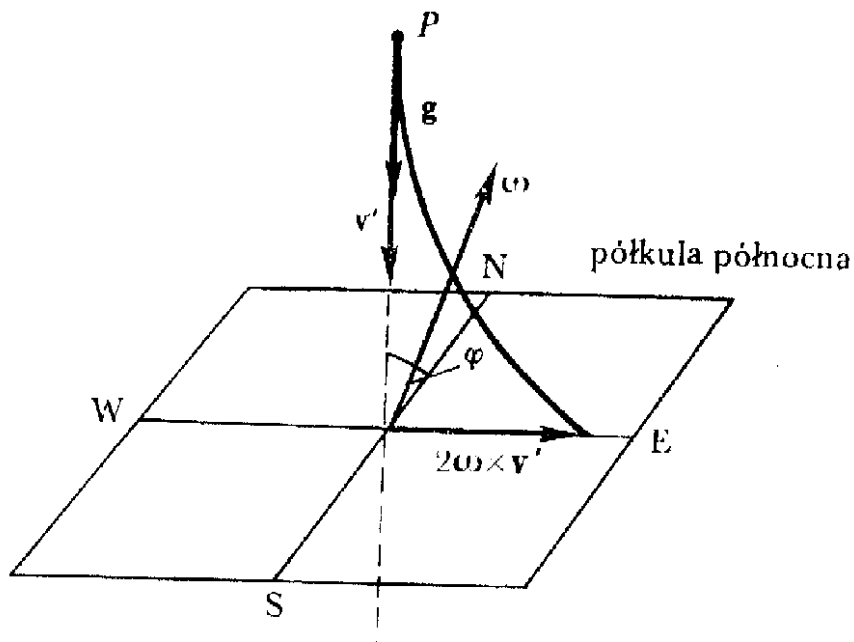
W układzie obracającym się wprowadzamy dwie pozorne siły bezwładności:

- siłę odśrodkową  $\vec{F}_o = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = +m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$
- siłę Coriolisa  $\vec{F}_c = -2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

# Układ obracający się

## Ruch obrotowy Ziemi

Spadek swobodny z dużej wysokości



Siła Coriolisa odchyła tor ciała  
w kierunku wschodnim (obie półkule!)

Spadek swobodny z wysokości  $h=5.5$  km,  
zaniedbując opory powietrza:

$$y = h - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = -gt$$

Zaniedbując odchylenie od pionu:

$$a_c = 2\omega |v_y| \cos \phi = 2\omega g \cos \phi \cdot t$$

Ruch w poziomie (całkując  $a_x = a_c$ ):

$$v_x = \omega g \cos \phi \cdot t^2, \quad x = \frac{1}{3}\omega g \cos \phi \cdot t^3$$

Końcowe odchylenie toru od pionu:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 33s \Rightarrow \Delta \approx 9 \text{ m} \cdot \cos \phi$$

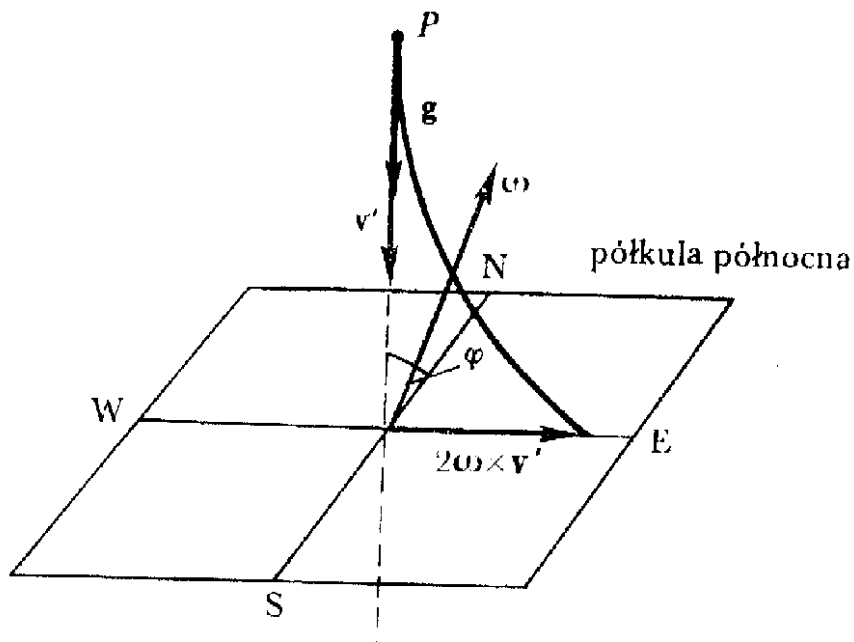
w Warszawie około 5.5 m



# Układ obracający się

## Ruch obrotowy Ziemi

### Spadek swobodny z dużej wysokości



Siła Coriolisa odchyła tor ciała  
w kierunku wschodnim (obie półkule!)

Opory powietrza  $\Rightarrow$  przez większość czasu  
spadek z prędkością  $v \approx 55 \text{ m/s}$ :

$$a_c = 2\omega v \cos \phi \\ \approx 0.008 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos \phi$$

Spadek z  $5.5 \text{ km}$  zajmie  $t \approx 100 \text{ s}$ .  
Końcowe odchylenie toru od pionu:

$$\Delta = \frac{a_c t^2}{2} \approx 40 \text{ m} \cdot \cos \phi$$

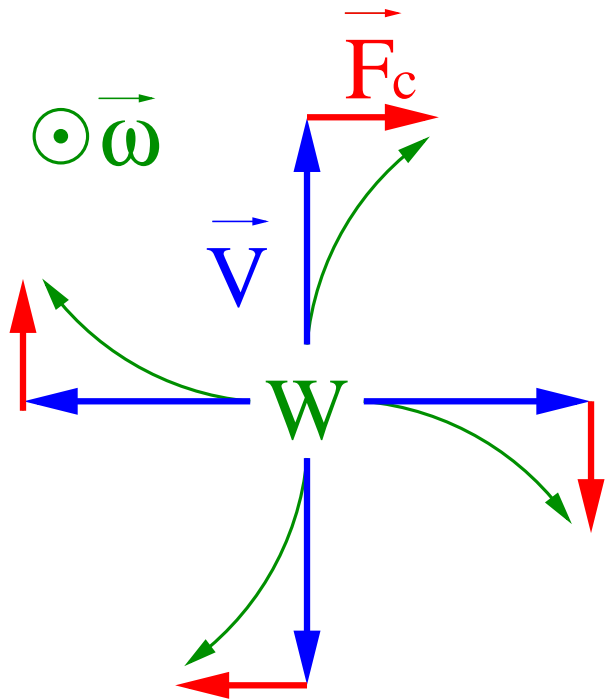
w Warszawie około 25 m

# Układ obracający się

## Siła Coriolisa

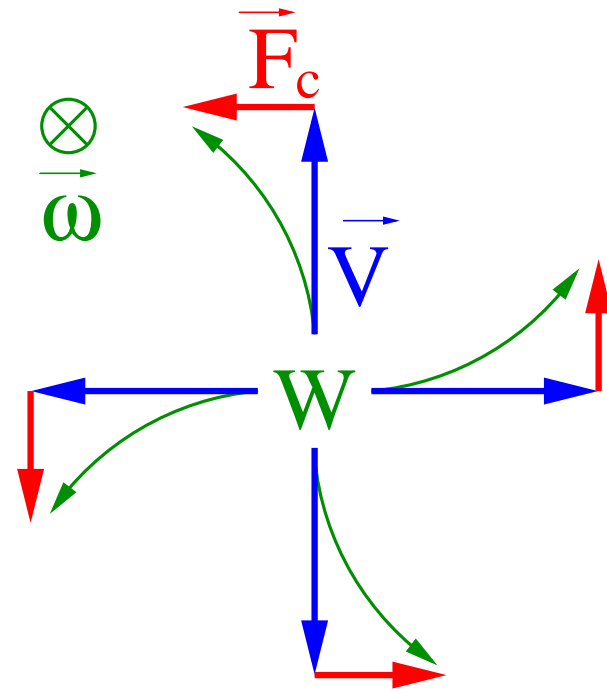
$$\vec{F}_c = -2 \cdot m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Półkula północna



Wiatry zakręcają “w prawo”; wyż “kręci się” zgodnie z ruchem wskazówek zegara

Półkula południowa

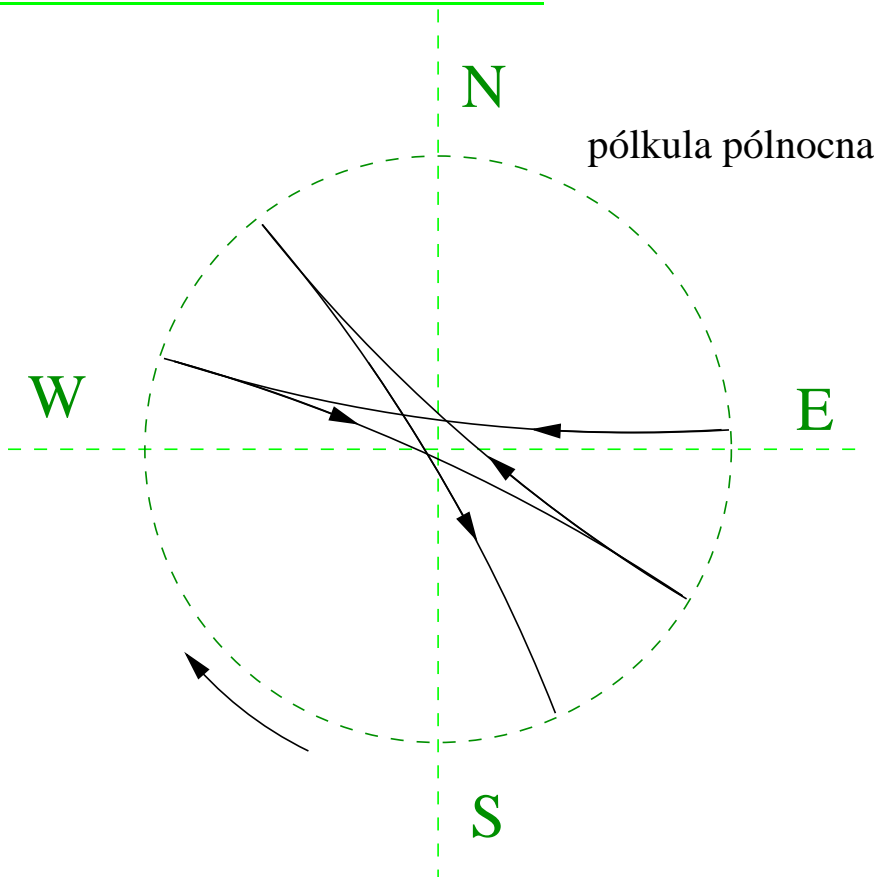


Wiatry zakręcają “w lewo”; wyż “kręci się” przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

# Układ obracający się

## Wahadło Foucault'a

1851 r.



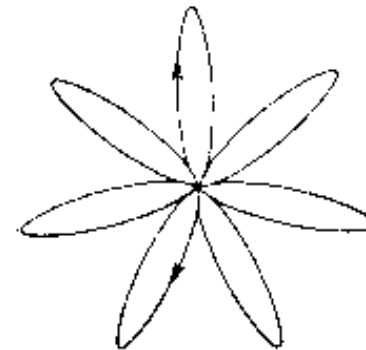
start z wychylenia maksymalnego

Dla obserwatora na Ziemi płaszczyzna ruchu wahadła obraca się z prędkością kątową

$$\omega_1 = \omega \cdot \sin \phi$$

w Warszawie ( $\phi = 52^\circ$ ):  $\omega_1 \approx 12^\circ/h$

dla startu z położenia równowagi:



# Egzamin

## Przykładowe pytania testowe:

1. W jednorodnym polu magnetycznym cząstka naładowana nie może poruszać się po  
 A linii śrubowej       B okręgu       C elipsie       D prostej
2. W ruchu jednostajnym po okręgu wartość siły dośrodkowej wynosi  
 A  $m\omega^2 r$        B  $\frac{m\omega^2}{r}$        C 0       D  $mv^2 r$
3. Przyspieszenie ziemskie wyznaczone z pomiaru spadku swobodnego  
 A jest największe dla  $\phi = 45^\circ$        B nie zależy od położenia na Ziemi  
 C jest największe na biegunie       D jest największe na równiku
4. W idealnie pionową studnię upuszczamy kamień. W którą ścianę studni uderzy  
 A wschodnią       B południową       C północną       D zachodnią
5. Okres precesji (obrotu płaszczyzny drgań) wahadła Foucaulta znajdującego się na równiku wynosi  
 A 24 h       B nie ma precesji       C 12 h       D 48 h



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego