



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Mechanika ośrodków ciągłych

Fizyka I (Mechanika)

Wykład X:

- Bryła sztywna
 - tensor momentu bezwładności
- Statyka cieczy
- Prawo Bernoulliego
- Opory ośrodka

Porównanie

Punkt materialny

ruch postępowy

- przesunięcie \vec{x}
- prędkość $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$
- przyspieszenie $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
- masa m
- pęd $\vec{p} = m\vec{v}$
- układ izolowany $\vec{p} = \text{const}$

Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

- ⇒ kąt obrotu $\vec{\phi}$
- ⇒ prędkość kątowa $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
- ⇒ przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
- ⇒ moment bezwładności I
- ⇒ moment pędu $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- ⇒ układ izolowany $\vec{L} = \text{const}$

Porównanie

Punkt materialny ruch postępowy

- siła

$$\vec{F}$$

- równania ruchu

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- praca

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

- energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

- ⇒ moment siły

$$\vec{M}$$

- ⇒ równania ruchu

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

- ⇒

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

- ⇒ praca

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

- ⇒ energia kinetyczna

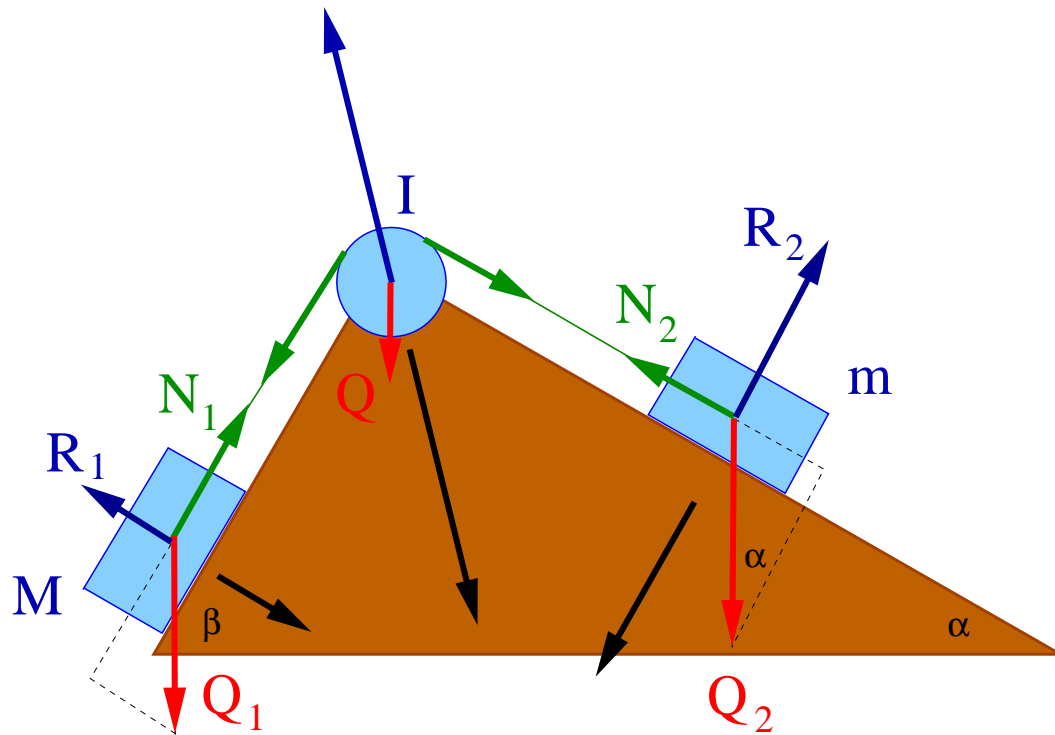
$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Dla ruchu obrotowego względem ustalonej osi, pokrywającej się z osią **symetrii** bryły !!!

Prawa ruchu

Przykład

Dwa klocki na równi poruszające się bez tarcia, połączone nieważką nicią przerzuconą przez **ważki** bloczek o **momencie bezwładności I**.



Powierzchnia równi jest więzem, który ogranicza ruch klocków do kierunku równoległego do powierzchni równi.

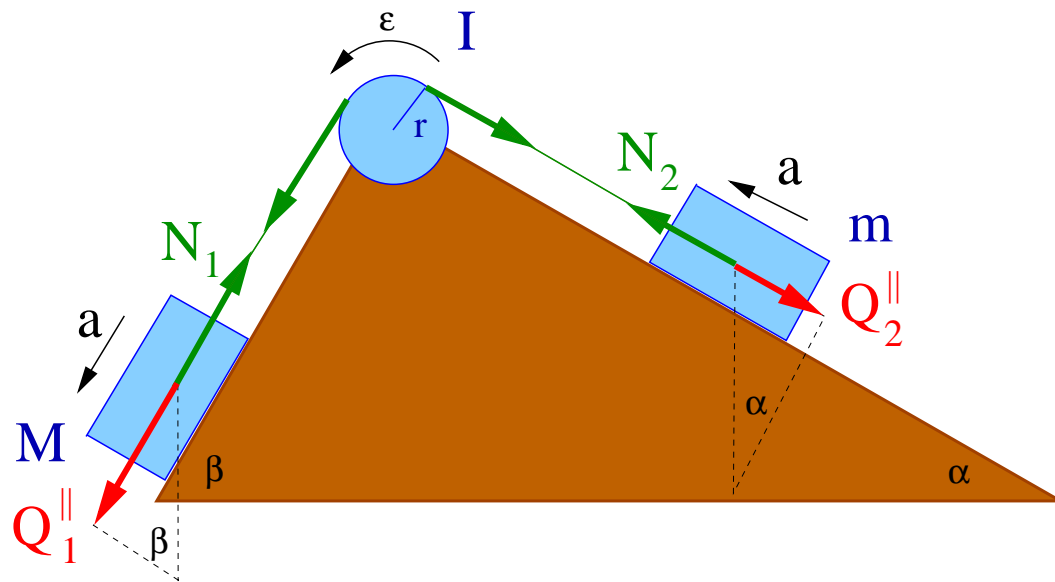
Możemy zredukować problem do ruchu jednowymiarowego.

W przypadku ważkiego bloczka, jeśli układ nie jest w równowadze, siły naprężenia mogą być różne!

$$N_1 \neq N_2$$

Prawa ruchu

Przykład



Wybieramy dodatni kierunek przyspieszenia jak na rysunku. Przyspieszenia ciał:

$$a_1 = a_2 = a \quad \epsilon r = a$$

nierozciągliwa nić nie ślizga się po bloczku

Równania ruchu:

$$Ma = Q_1^{\parallel} - N_1 = Mg \sin \beta - N_1$$

$$ma = N_2 - Q_2^{\parallel} = N_2 - mg \sin \alpha$$

$$I\epsilon = I \frac{a}{r} = N_1 r - N_2 r$$

Układ trzech równań z trzema niewiadomymi (a , N_1 i N_2).

Dodajemy stronami dwa pierwsze i podstawiamy $N_1 - N_2$ z trzeciego.

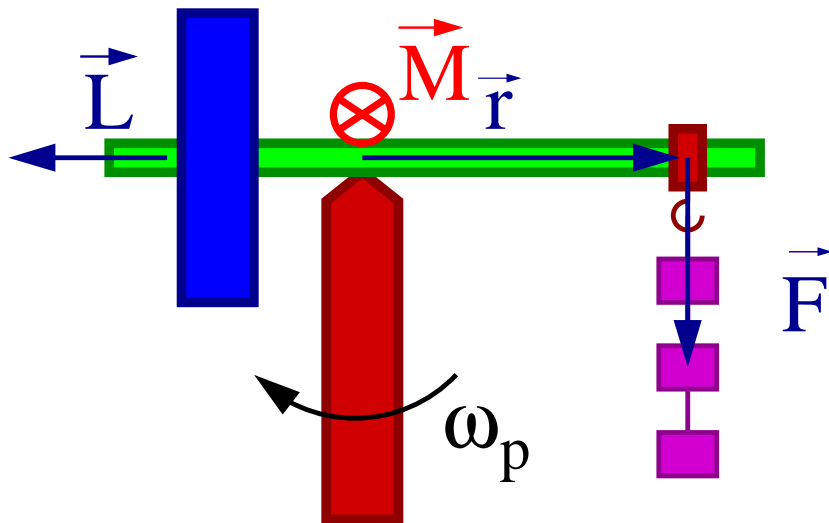
Otrzymujemy:

$$a = g \frac{M \sin \beta - m \sin \alpha}{M + m + \frac{I}{r^2}}$$

Żyroskop

Precesja

zwiększone obciążenie



Niezerównoważony moment siły ciężkości względem punktu podparcia O :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = mgr$$

Pojawia się **moment siły** \vec{M} skierowany prostopadle pionu (\vec{g}) i do osi żyroskopu (\vec{r})

Wektor momentu pędu $\vec{L} \perp \vec{M}$

\Rightarrow wartość momentu pędu nie ulega zmianie

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

\Rightarrow kierunek momentu pędu zmienia się \Rightarrow **precesja**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} = \vec{M} \Rightarrow \omega_p = \frac{m r g}{L}$$

Moment pędu

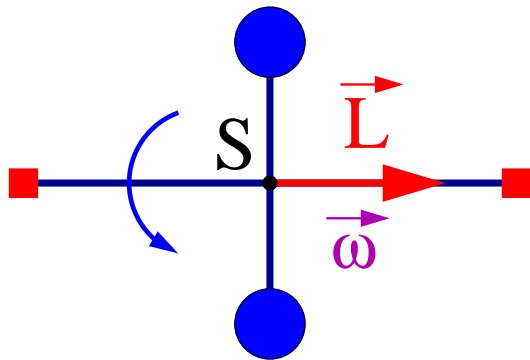
Do tej pory rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy względem ustalonej osi.

Na ogół była to oś symetrii bryły, lub oś do niej równoległa.

W ogólnym przypadku problem jest dużo bardziej skomplikowany

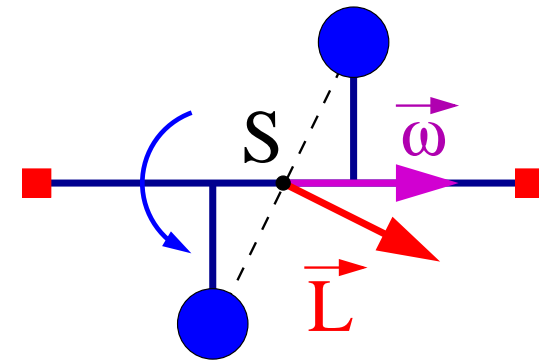
Przykład - dwa wirujące ciężarki

Ciężarki w jednej płaszczyźnie \perp osi



Oś obrotu jest osią symetrii $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Ciężarki rozsunięte wzdłuż osi obrotu



Oś obrotu nie jest osią symetrii $\Rightarrow \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

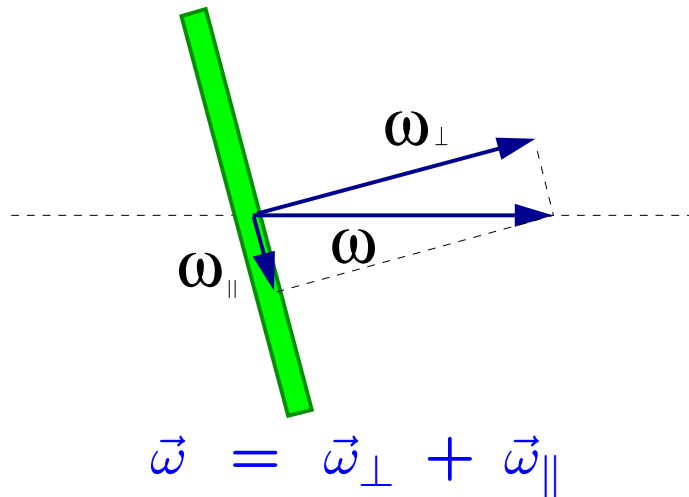
$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \perp \vec{r}_i$$

Moment pędu

Przykład II

Dysk wirujący wokół osi nachylonej do osi symetrii

Prędkość kątową możemy rozłożyć na składową równoległą i prostopadłą do osi symetrii

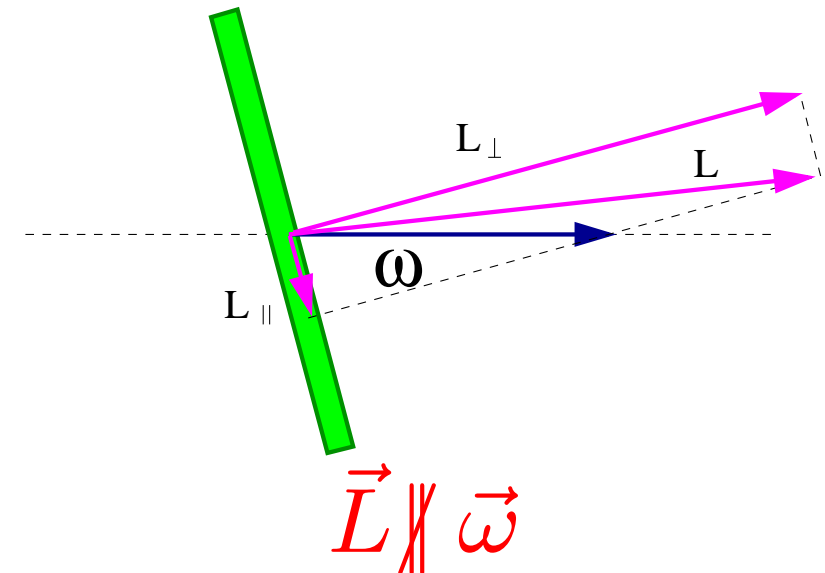


Moment bezwładności dysku: (wykład 9)

$$I_\perp = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_\parallel = \frac{1}{4}mr^2 = \frac{1}{2}I_\perp$$

Moment pędu dysku

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel \\ &= I_\perp \vec{\omega}_\perp + I_\parallel \vec{\omega}_\parallel \\ &= I_\perp \left(\vec{\omega}_\perp + \frac{1}{2} \vec{\omega}_\parallel \right)\end{aligned}$$



Moment pędu

W ogólnym przypadku bryła sztywna może nie mieć żadnej osi symetrii.

Jak wtedy wyznaczyć moment pędu, znając prędkość kątową $\vec{\omega}$?

Z definicji momentu pędu:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Z definicji bryły sztywnej:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Otrzymujemy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

korzystamy z tożsamości wektorowej: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

Kierunek \vec{L} zależy od kierunku $\vec{\omega}$ jak i położeń poszczególnych elementów bryły \vec{r}_i .

Moment pędu

Rozpisując na składowe:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_i \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

Otrzymujemy (na przykładzie L_x):

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] \\ &= \omega_x \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \cdot \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \cdot \sum_i m_i x_i z_i \end{aligned}$$

L_x zależy w ogólności od **wszystkich składowych** prędkości kątowej !

Podobnie:

$$\begin{aligned} L_y &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i y_i + \omega_y \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \cdot \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y \cdot \sum_i m_i y_i z_i + \omega_z \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{aligned}$$

Tensor momentu bezwładności

Wyrażenie na składowe \vec{L} możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

tensor momentu bezwładności

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

ogólna postać ($u, v = x, y, z$)

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{uv} = \sum m_i (\delta_{uv} r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

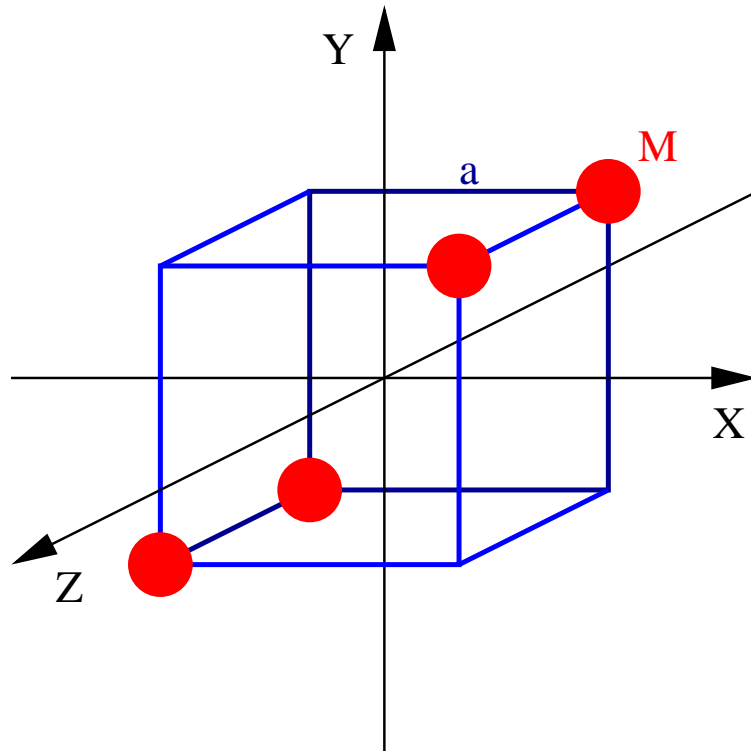
$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r}) (\delta_{uv} r^2 - u v)$$

delta Kroneckera: $\delta_{uv} = 1$ dla $u = v$ i 0 dla $u \neq v$

Tensor momentu bezwładności

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M a^2$$

Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera
(tensor symetryczny \Rightarrow 6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak **obrócić osie układu** odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne zniknęły: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

\Rightarrow pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (wartości własne)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xx} \omega_x, I_{yy} \omega_y, I_{zz} \omega_z)$$

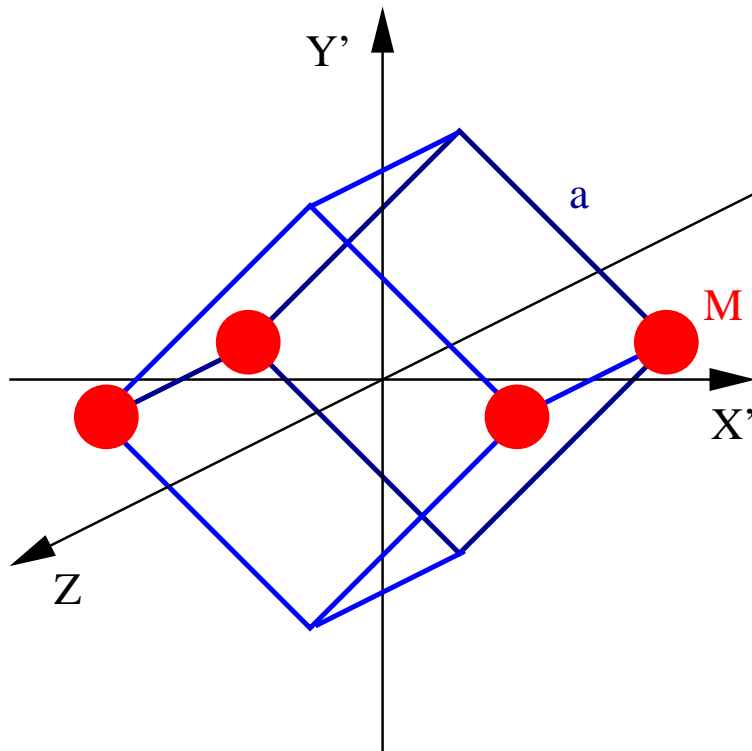
Dla obrotu wokół osi głównej $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$$\text{np. } \vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$$

Osie główne

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześciangu:



Tensor bezwładności

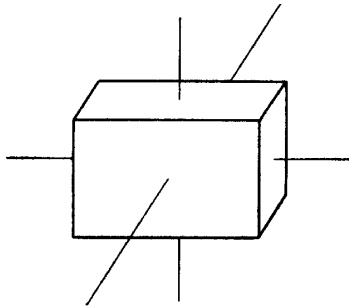
$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M a^2$$

Osie X', Y' i Z są osiami głównymi \hat{I} :

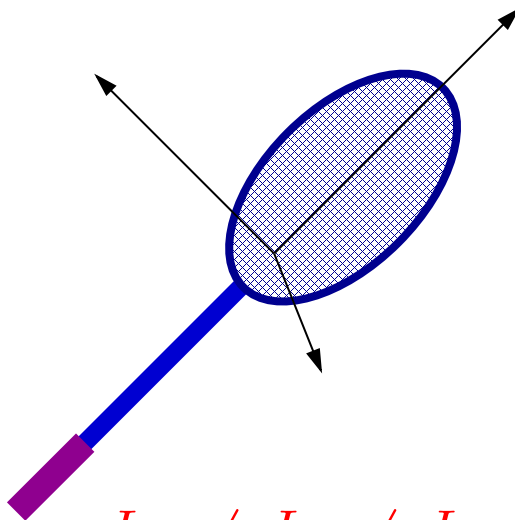
- oś X' - najmniejszy moment bezwładności
- oś Y' - największy moment bezwładności
- oś Z - pośredni moment bezwładności

Osie główne

Prostopadłościan

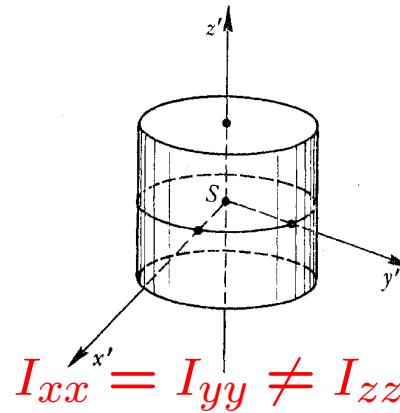


Rakieta tenisowa



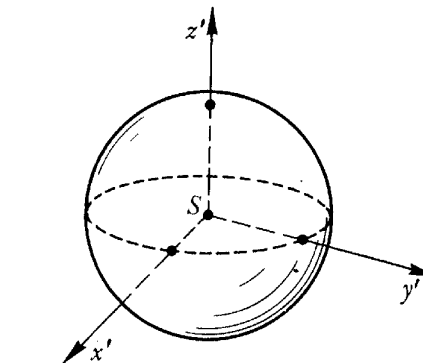
$$I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz}$$

Walec



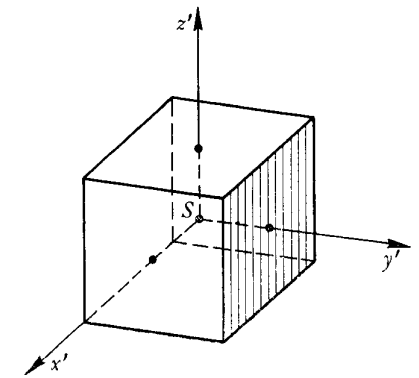
$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$$

Kula



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Sześcian



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Tak jak dla kuli !

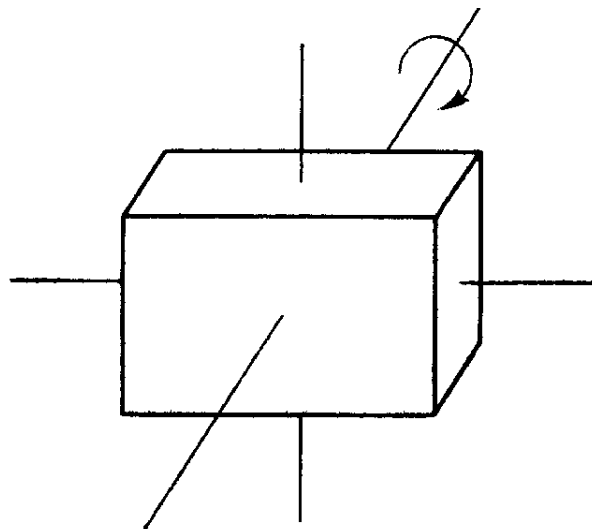
Osie główne

W przypadku bryły wirującej **swobodnie** (stała wartość \vec{L}) stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora $\vec{\omega}$) możliwy jest **tylko** wokół osi głównych o **największym** i **najmniejszym** momencie bezwładności

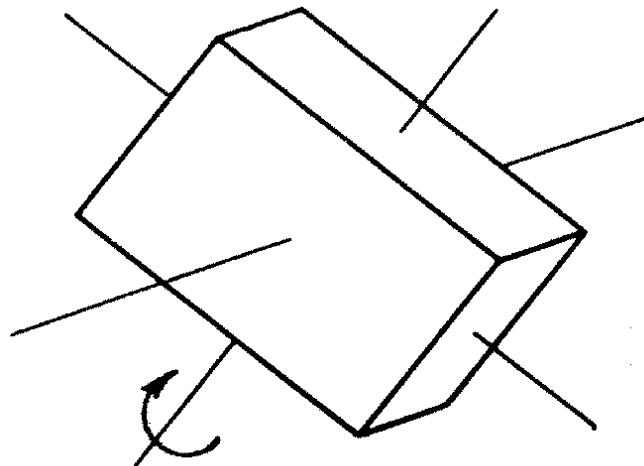
Oś o największym I

Oś o pośrednim I

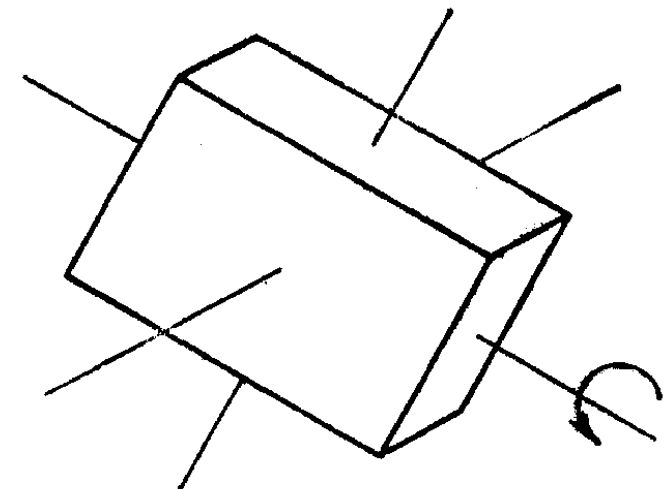
Oś o najmniejszym I



obrót stabilny



obrót niestabilny



obrót stabilny

Osie główne

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

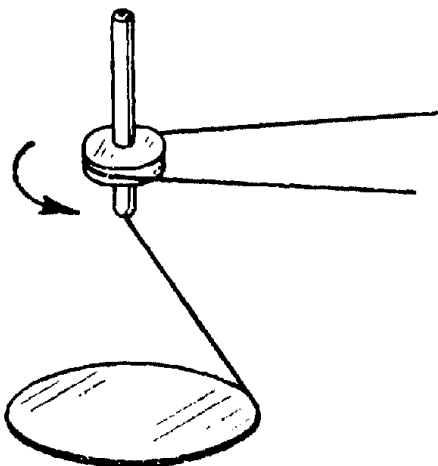
$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

Jeśli nałożymy **więzy** narzucające obrót ciała ze **stałą prędkością kątową** $\vec{\omega}$ to przyjmie ono ułożenie odpowiadające **maksymalnej energii kinetycznej**

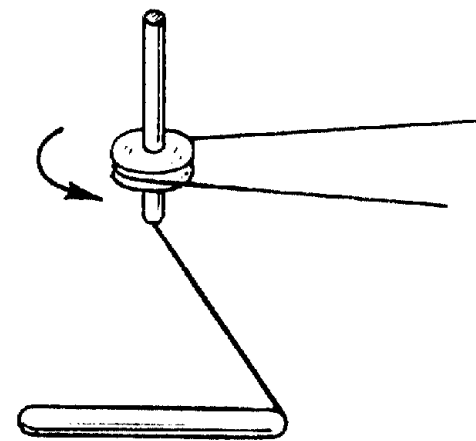
⇒ obrót wokół osi o **największym momencie bezwładności**

⇒ maksymalna wartość **momentu pędu**

Wirujący dysk



Wirujący pręt



Osie główne

Wirujący łańcuszek

Przybiera kształt obręczy
odpowiadający **maksymalnemu momentowi bezwładności**

⇒ maksymalnej wartości momentu pędu

⇒ **maksymalnej energii kinetycznej**

W układzie obracającym się

Siła odśrodkowa dąży do rozmieszczenia masy jak najdalej od osi obrotu.

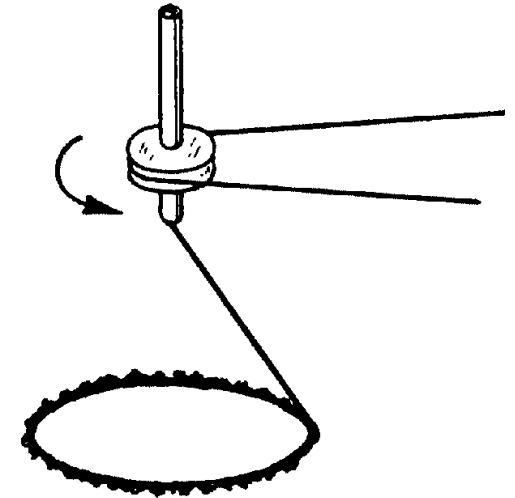
Stabilny jest stan odpowiadający minimum energii potencjalnej (siły odśrodkowej)

$$\vec{F}_i = m_i \omega^2 \vec{r}_{i\perp} \Rightarrow E_{p,i} = -\frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{i\perp}^2$$

$$E_p = \sum_i E_{p,i} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 I = -E_k$$

Minimum energii potencjalnej odpowiada maksimum energii kinetycznej.

W układzie laboratoryjnym ⇒ masa “oddala się” od osi zgodnie z zasadą bezwładności



Mechanika płynów

Płyn

Substancja, która może **dowolnie zmieniać swój kształt** w zależności od naczynia, w którym się znajduje, a także **swobodnie się przemieszczać** (przepływać) pod wpływem przyłożonych sił (ciśnień).

W tej ogólnej definicji do płynów zaliczamy zarówno ciecze jak i gazy!

Mikroskopowo płynem nazwiemy substancje, której molekuly mogą swobodnie przemieszczać się względem siebie (w odróżnieniu od molekuł w kryształach).

Przy czym w cieczech molekuly pozostają związane wzajemnymi oddziaływaniami, a w gazie nie są ze sobą związane.

Płyn doskonały (idealny)

Płynem doskonałym nazwiemy ciecz nieściśliwą, w której nie występują opory ruchu (poza bezwładnością cieczy).

Pojęcia podstawowe

Gęstość

Definiujemy jako stosunek masy do objętości (tak jak dla ciał stałych):

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

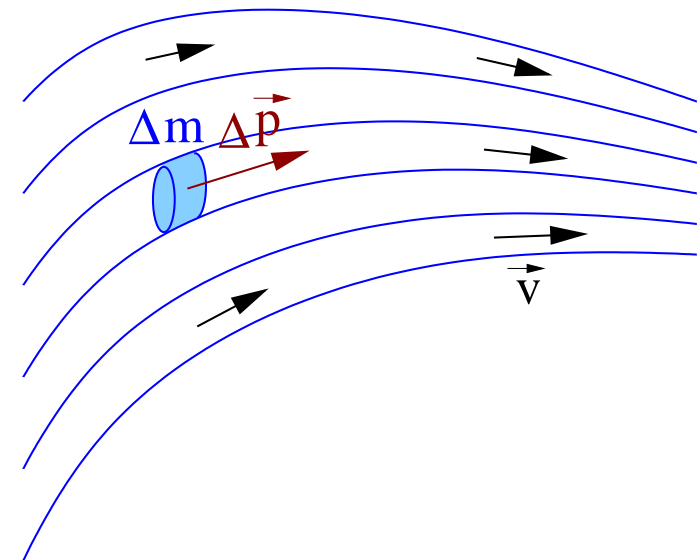
W przypadku płynu doskonałego $\rho = \text{const.}$ W ogólnym przypadku $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

Prędkość przepływu

Definiujemy jako granicę średniej prędkości niewielkiej objętości płynu.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta m}$$

W ogólnym przypadku, także dla płynu doskonałego, zależy od położenia i czasu: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$.



Przepływ stacjonarny: niezależny od czasu, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$

Pojęcia podstawowe

Równanie ciągłości

W przypadku przepływu stacjonarnego, zmiana prędkości przepływu wzdłuż linii prądu wiąże się ze zmianą przekroju poprzecznego: przepływ masy przez kolejne powierzchnie musi być taki sam

$$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2$$

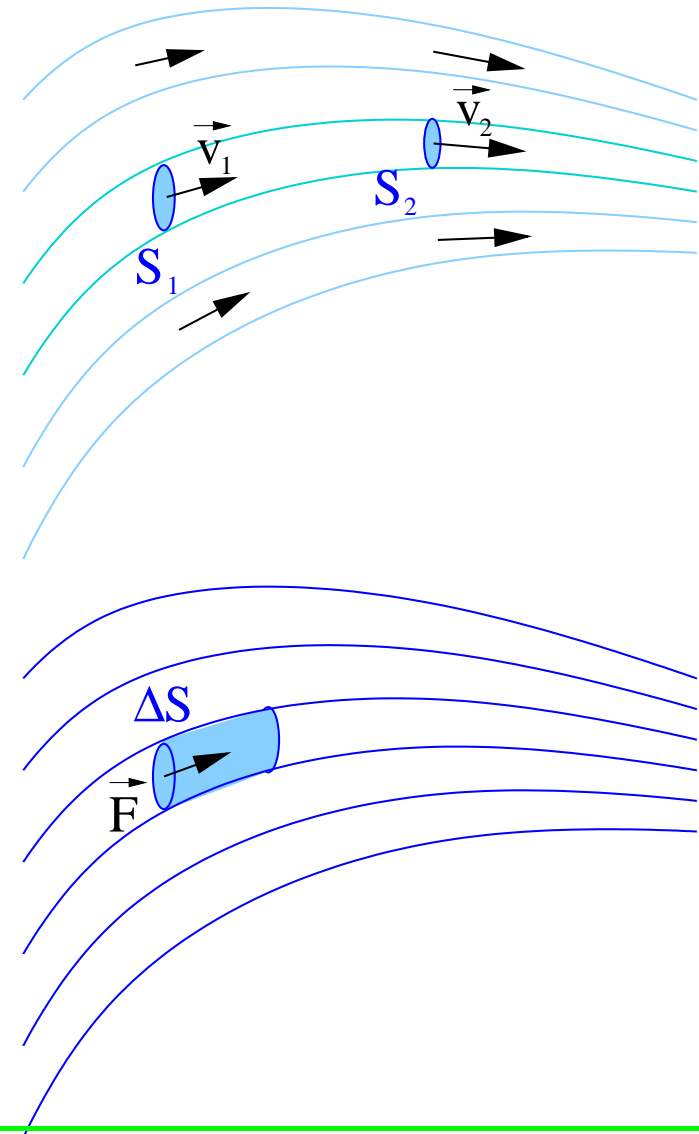
Dla płynu idealnego:

$$S v = \text{const}$$

Ciśnienie

Siła działająca na jednostkę powierzchni elementu płynu ze strony płynu lub ścianek naczynia

$$p = \frac{|\vec{F}|}{\Delta S}$$



Statyka

Prawo Pascala

Sformułowane w połowie XVIIw. przez Blaise'a Pascala

Jeżeli na ciecz lub gaz w zbiorniku zamkniętym wywierane jest **ciśnienie zewnętrzne**, to ciśnienie wewnątrz zbiornika jest **wszędzie jednakowe** i równe ciśnieniu zewnętrznemu.

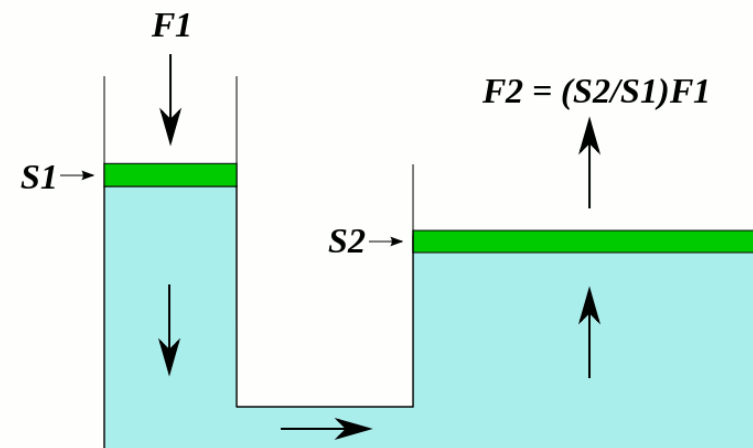
Prawo to obowiązuje w przypadku **statycznym** (płyn nie porusza się). Nie uwzględnia też wpływu oddziaływania grawitacyjnego (ciśnienia hydrostatycznego).



Prasa hydrauliczna

Przykład wykorzystania prawa Pascala

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$



Statyka

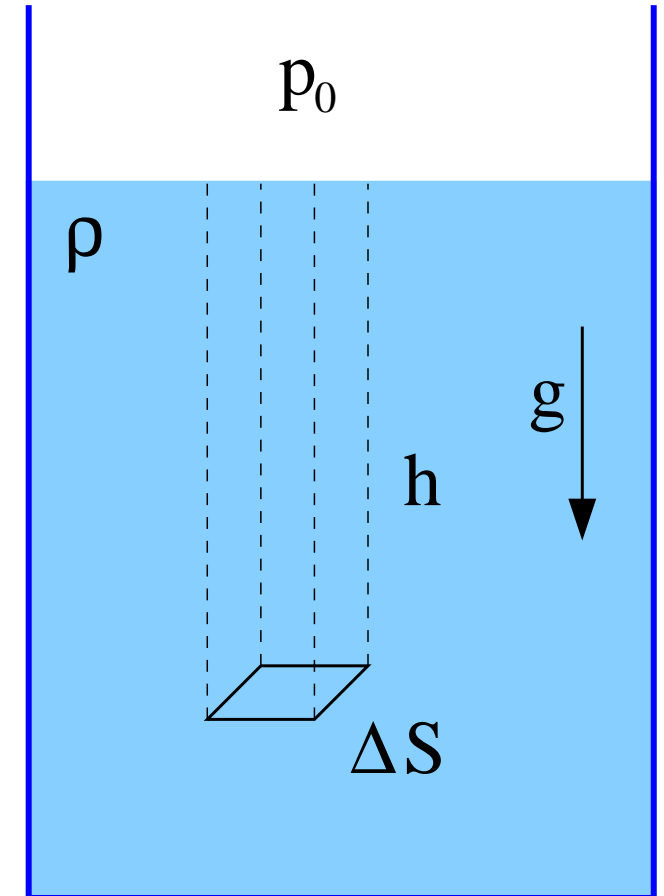
Ciśnienie hydrostatyczne

Szczególnym przypadkiem oddziaływania na ciecz jest pole grawitacyjne Ziemi. Na element o powierzchni ΔS znajdujący się na głębokości h wywierane jest zewnętrzne ciśnienie p_0 oraz dodatkowy nacisk słupa cieczy

$$N = \Delta Q = \rho g h \Delta S$$

Całkowite ciśnienie na głębokości h wyniesie więc:

$$p = \rho g h + p_0$$



Statyka

Siła wyporu

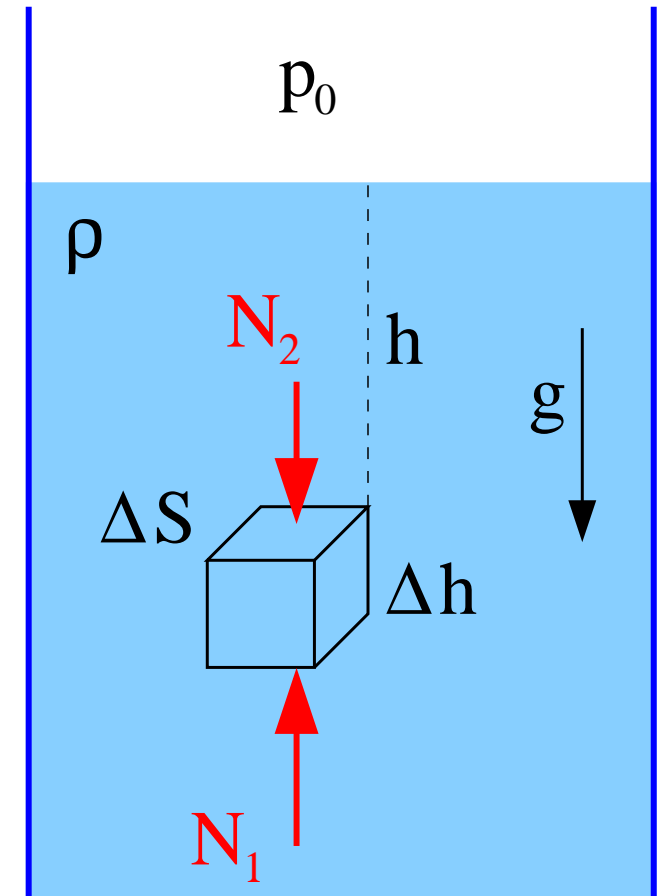
Prawo Arhimedesa wynika wprost ze wzoru na ciśnienie hydrostatyczne. Dla prostopadłościanu zanurzonego całkowicie w cieczy o gęstości ρ :

$$\begin{aligned} W &= N_1 - N_2 = \rho g (h + \Delta h) \Delta S - \rho g h \Delta S \\ &= \rho g \Delta h \Delta S \\ &= \rho g V \end{aligned}$$

gdzie V jest objętością ciała, czyli objętością wypartej cieczy.

Siła wyporu jest równa co do wartości ciężarowi cieczy wypartej przez ciało (ale przeciwnie skierowana)

$$\vec{W} = -\rho V \vec{g}$$



Statyka

Siła wyporu

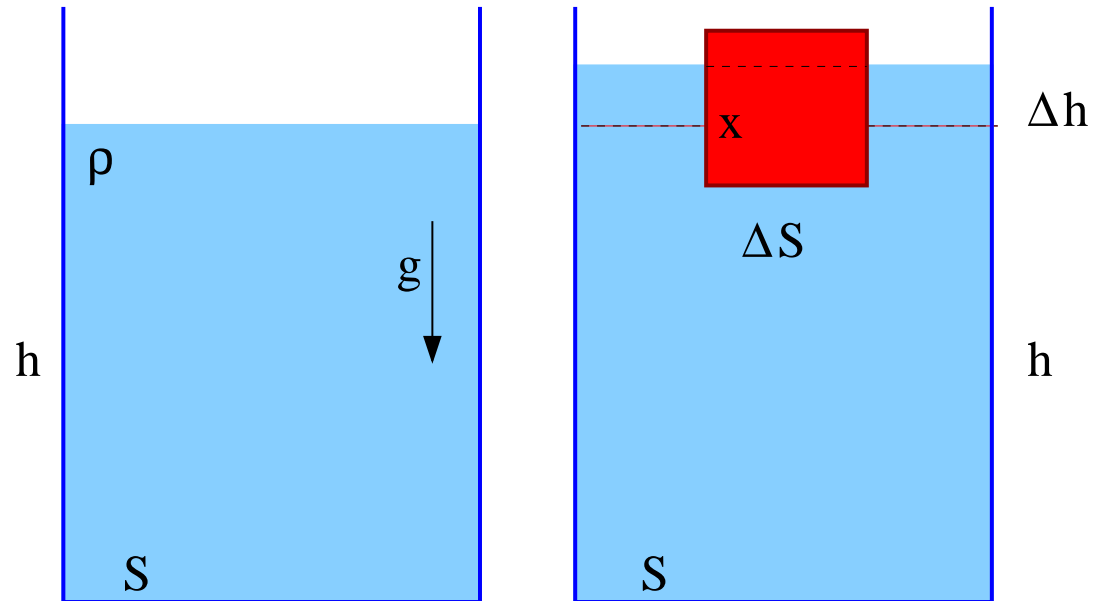
Rozważmy naczynie z cieczą, do którego wkładamy ciało o gęstości mniejszej od gęstości cieczy.

Nowa wysokość cieczy w naczyniu

$$(h + \Delta h)S = hS + x\Delta S$$

Zanurzenie x wynika z siły wyporu

$$g \rho x \Delta S = Q$$



Nacisk cieczy na dno naczynia po włożeniu ciała wyniesie

$$N = g \rho (h + \Delta h)S = g \rho h S + g \rho x \Delta S = g \rho h S + Q$$

Nacisk zwiększa się dokładnie o ciężar pływającego ciała.

Przepływ płynu

Płyn idealny

Dla płynu idealnego nie występują opory ruchu - przepływ odbywa się bez strat energii.

Płyn idealny jest też nieściśliwy - nie zmienia się jego energia wewnętrzna (pomijamy zmiany temperatury). Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii do opisu przepływu!

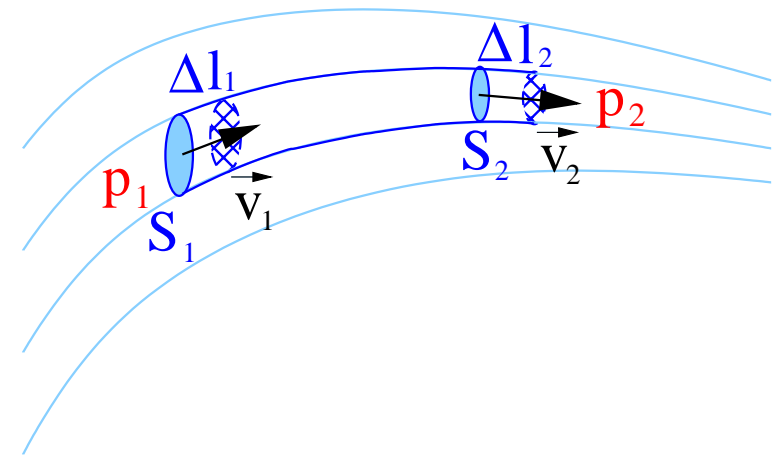
Rozważmy objętość płynu ograniczoną powierzchniami S_1 i S_2 . W czasie Δt przesunie się ona odpowiednio o

$$\Delta l_1 = v_1 \Delta t \quad \Delta l_2 = v_2 \Delta t$$

Praca sił ciśnienia działającego na rozważaną objętość płynu wyniesie

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 \\ &= p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \end{aligned}$$

gdzie z równania ciągłości: $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 = \Delta V$



Przepływ płynu

Jeśli przepływ jest stacjonarny to zmianę energii kinetycznej wybranej objętości cieczy możemy policzyć zauważając, że po czasie Δt objętość ΔV poruszająca się z prędkością \vec{v}_1 zastępuje objętość ΔV poruszająca się z prędkością \vec{v}_2

$$\Delta E_k = \frac{\Delta V \rho v_2^2}{2} - \frac{\Delta V \rho v_1^2}{2}$$

Zmiana energii kinetycznej wynika z pracy wykonanej przez siły ciśnienia

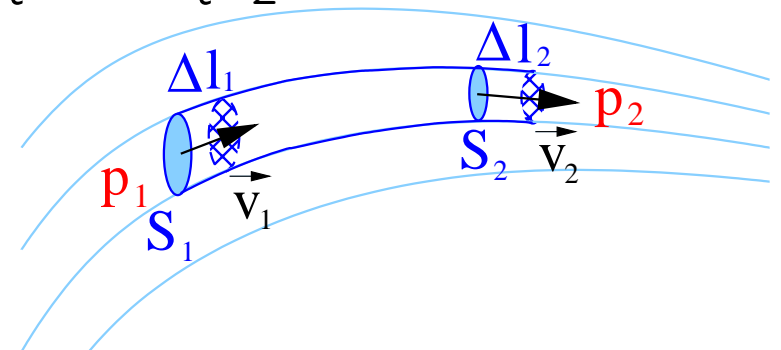
$$\Delta W_p = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{\Delta V \rho v_2^2}{2} - \frac{\Delta V \rho v_1^2}{2} = \Delta E_k$$

dzieląc przez ΔV

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}$$

Ale powierzchnie S_1 i S_2 mogliśmy wybrać dowolnie. Musi więc być spełnione

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$



Prawo Bernouliego

Jeśli przepływ odbywa się w polu grawitacyjnym g to dodatkowo trzeba uwzględnić zmianę energii potencjalnej:

$$\Delta E_p = \Delta V \rho g y_2 - \Delta V \rho g y_1$$

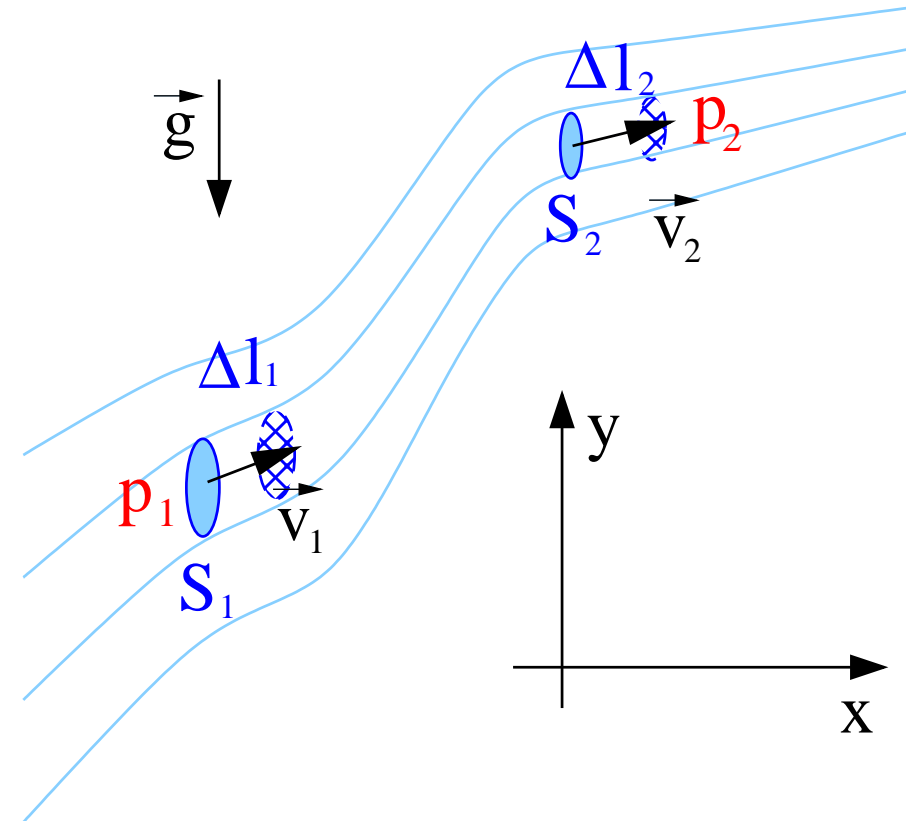
Z zachowania energii mamy wtedy:

$$\Delta W_p = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Co prowadzi do ostatecznego wzoru:

$$p + \rho g y + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

zwanego **prawem Bernouliego**



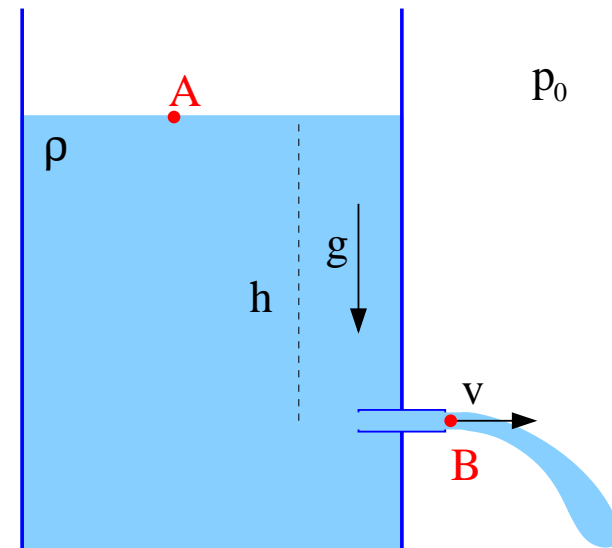
Prawo Bernouliego

Przykład

Z jaką prędkością wypływa ciecz z naczynia, jeśli otwór znajduje się h poniżej poziomu cieczy?

Stosując prawo Bernouliego do punktów A i B:

$$p_o + \rho gh = p_o + \frac{\rho v^2}{2}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



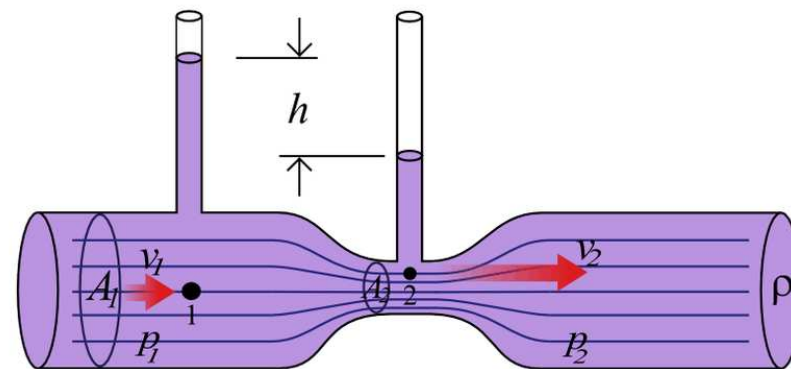
Tak jak przy spadku swobodnym lub wahadle!

Zaniedbujemy opory!

Dysza Venturiego

Przyrząd służący do pomiaru prędkości cieczy lub gazu

$$\Delta p = \rho gh = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho v_1^2}{2} \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)$$

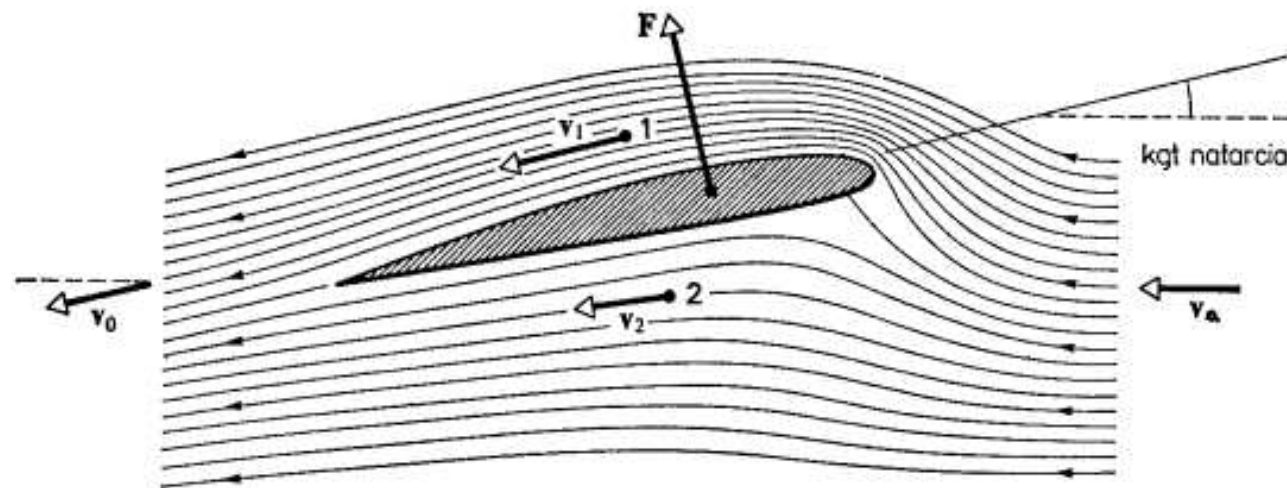


Ruch w ośrodku

Siła nośna

Prawo Bernoulliego tłumaczy także powstawanie siły nośnej w przypadku ciał (na przykład skrzydła samolotu) poruszających się w ośrodku.

Ciśnienie jest mniejsze w obszarze większych prędkości opływania ($p + \frac{\rho v^2}{2} = const$)
 \Rightarrow ciało jest “wciągane” w obszar większych prędkości

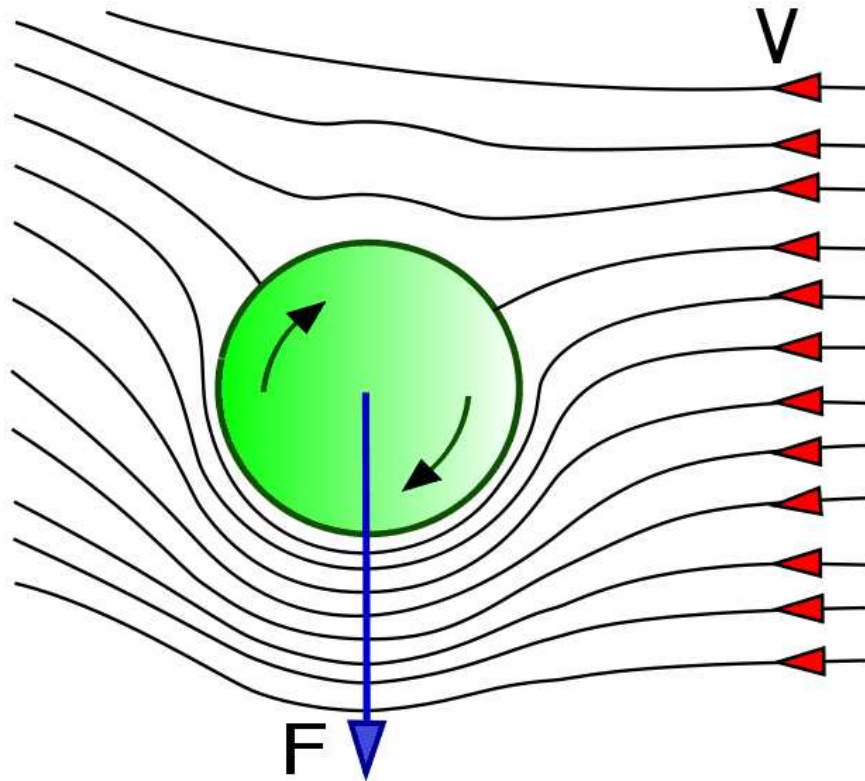


Ale można na to spojrzeć też z punktu widzenia **praw Newtona!** Siła nośna jest siłą **reakcji!** Ciało wymusza zmianę kierunku ruchu cząsteczek ośrodka, pcha go “w dół”...

Ruch w ośrodku

Zjawisko Magnusa

Walec wirujący w przepływającej poprzecznie do osi obrotu cieczy lub gazy.



zgodne kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu wzrasta
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe rośnie
- ⇒ ciśnienie maleje

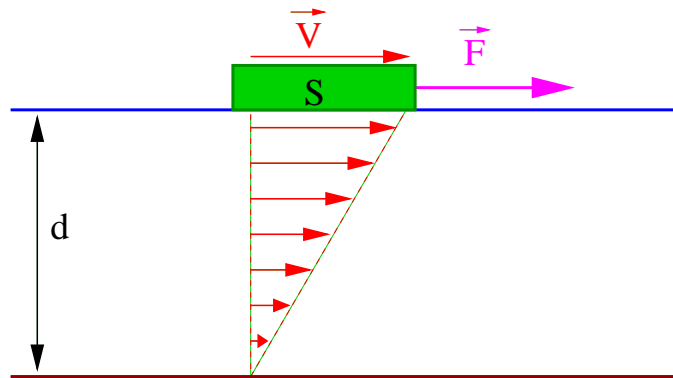
przeciwnie kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu maleje
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe maleje
- ⇒ ciśnienie wzrasta

⇒ wypadkowa siła nośna $\vec{F}_N \perp \vec{v}$

Lepkość

Ciało poruszające się
po powierzchni cieczy:



Warstwa cieczy przylegająca do
ciała porusza się wraz z nim.

Warstwa cieczy przylegająca do
dna spoczywa.

“tarcie wewnętrzne” pomiędzy warstwami cieczy
poruszającymi się z różnymi prędkościami.

Formuła empiryczna:

$$\vec{F}_L = -\vec{i}_V \eta \frac{v S}{d}$$

gdzie: v - prędkość ciała
 S - powierzchnia styku z cieczą
 d - głębokość naczynia
 η - współczynnik lepkości

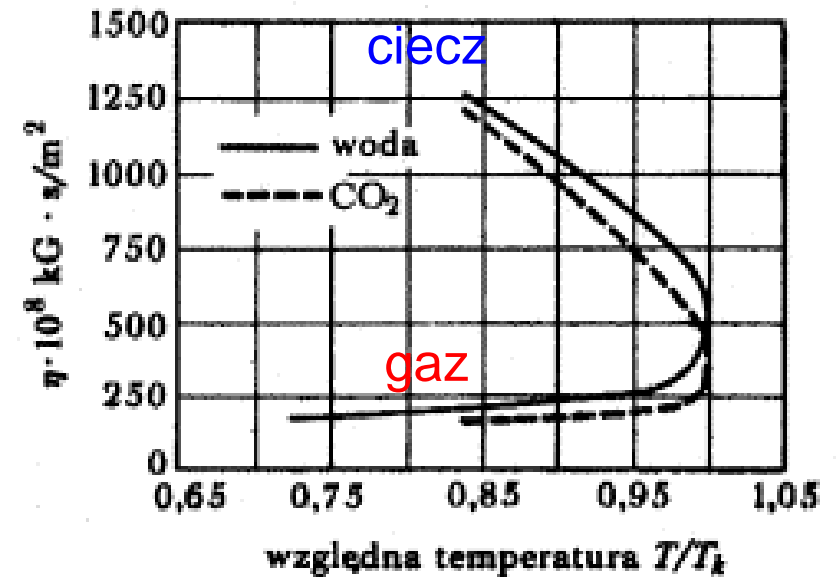
Lepkość

Typowe wartości:

eter	0.0002	Ns/m^2
woda	0.001	Ns/m^2
gliceryna	1.5	Ns/m^2
miód	500.	Ns/m^2
wodór	0.000009	Ns/m^2
powietrze	0.000018	Ns/m^2
tlen	0.000021	Ns/m^2

Lepkość cieczy maleje z temperaturą

Lepkość gazów rośnie z temperaturą

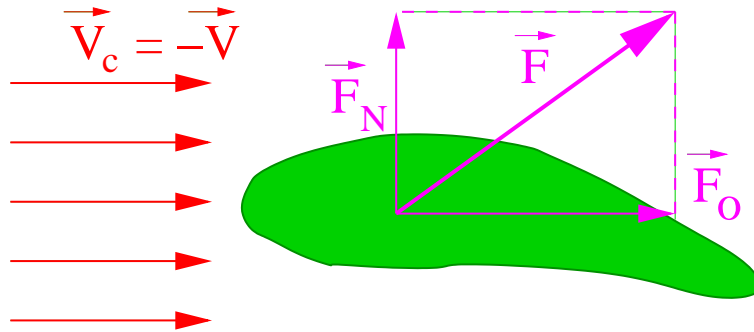


Ruch w ośrodku

Opór czołowy

Siły jakie działają na ciało poruszające się w ośrodku możemy podzielić na:

- siłę oporu czołowego $\vec{F}_o \updownarrow \vec{v}$
- siłę nośną $\vec{F}_N \perp \vec{v}$



Z analizy wymiarowej:

$$\vec{F}_o = -\vec{i}_v \frac{C}{2} \rho v^2 S \quad \text{wzór Newtona}$$

gdzie: v - prędkość ciała
 S - powierzchnia poprzeczna
 ρ - gęstość cieczy

C - bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu ciała, jego orientacji względem \vec{v} oraz **bezwymiarowej** kombinacji parametrów:

$$Re = \frac{v l \rho}{\eta}$$

Re - liczba Reynoldsa, l - wymiar poprzeczny

O.Reynolds (1883): skalowanie przepływów cieczy

Ruch w ośrodku

Opór czołowy

Dla ciała kulistego i $Re \ll 1$
istnieje ścisłe rozwiązanie problemu:
(G.Stokes 1851)

$$C = \frac{24}{Re}$$

$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v}$$

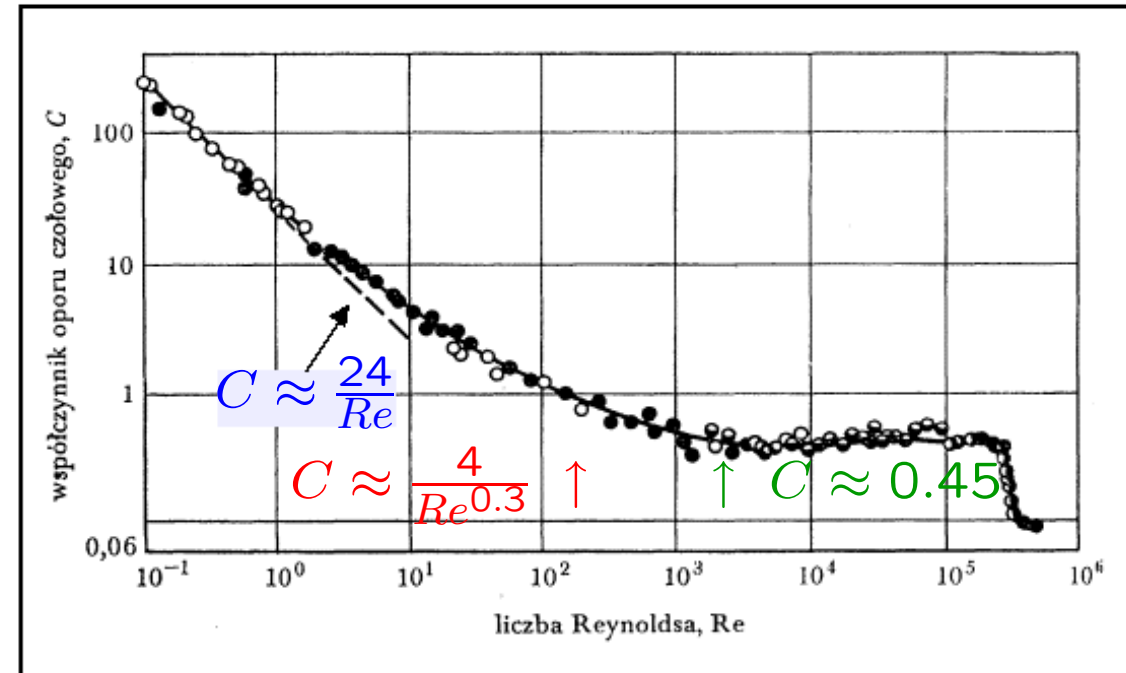
siła oporu proporcjonalna do v

W obszarze dużych wartości Re

$$C \approx \text{const}$$

$$F_o \sim v^2$$

Wyniki pomiarów współczynnika C dla kuli:

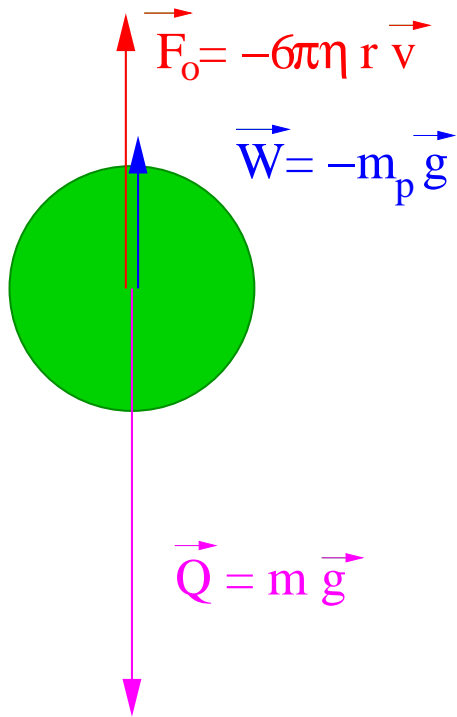


małe prędkości

duże prędkości

Ruch w ośrodku

Prędkość graniczna

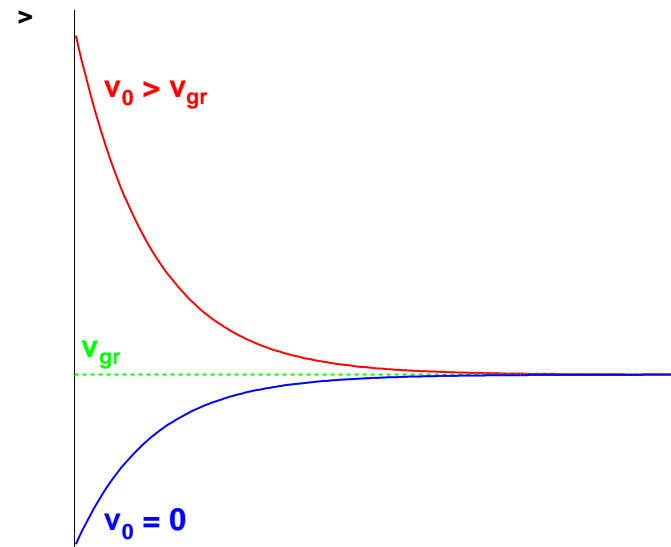


Równanie ruchu kuli spadającej w cieczy ($Re \ll 1$)

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_p\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

Rozwiązanie (ruch w pionie):

$$v(t) = v_{gr} + (v_0 - v_{gr}) \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m} t\right)$$



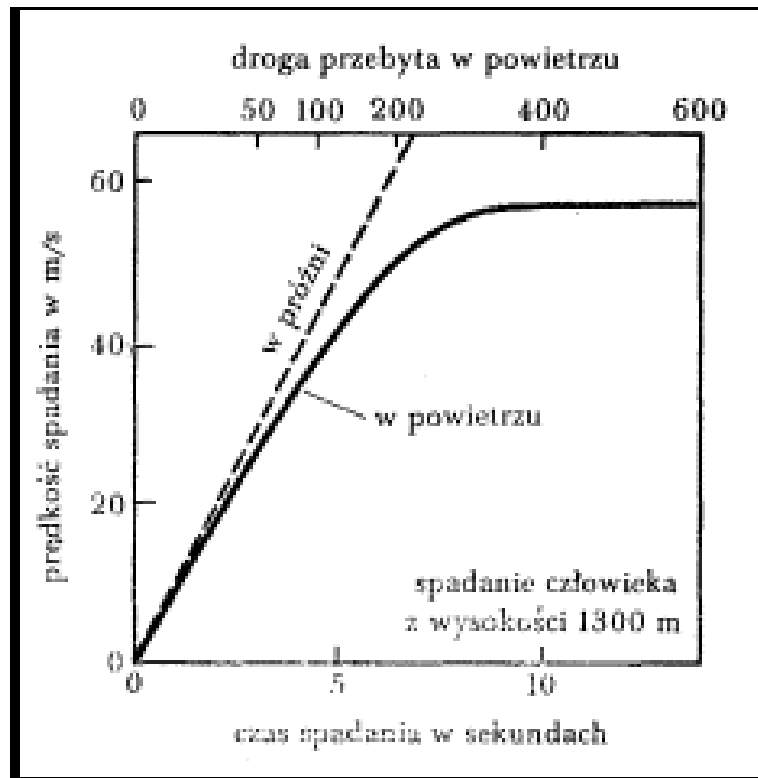
v_{gr} - prędkość graniczna^t

Ruch w ośrodku

Prędkość graniczna

Dla kuli spadającej w cieczy ($Re \ll 1$)

$$v_{gr} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho - \rho_p)}{\eta}$$



Zależność od kształtu

Kula:

$$\begin{aligned}\vec{F}_o &= -6\pi \eta r \vec{v} \\ &\approx -18.8 \eta r \vec{v}\end{aligned}$$

Dysk ($\perp \vec{v}$):

$$\vec{F}_o = -16 \eta r \vec{v}$$

Dysk ($\parallel \vec{v}$):

$$\vec{F}_o = -\frac{32}{3} \eta r \vec{v}$$

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Wektor momentu pędu \vec{L} jest równoległy do prędkości kątowej $\vec{\omega}$
 A dla symetrycznego tensora \hat{I} B dla diagonalnego tensora \hat{I} C zawsze
 D dla $\vec{\omega} \parallel$ osi głównej
2. Swobodnie wirująca bryła sztywna ma stabilnych osi obrotu przynajmniej
 A dwie B sześć C trzy D jedną
3. Równanie ciągłości dla przepływu płynów wynika z zachowania
 A energii B masy C gęstości D pędu
4. Prędkość z jaką wypływa woda przez otwór w dolnej krawędzi beczki, wraz z obniżaniem się poziomu wody w beczce
 A jest stała B rośnie C maleje D zależy od kierunku otworu
5. Siła lepkości, działająca na ciało poruszające się po powierzchni cieczy, nie zależy od
 A powierzchni B gęstości cieczy C prędkości ciała D głębokości naczynia



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego