



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Kinematyka relatywistyczna

Fizyka I (Mechanika)

Wykład XI:

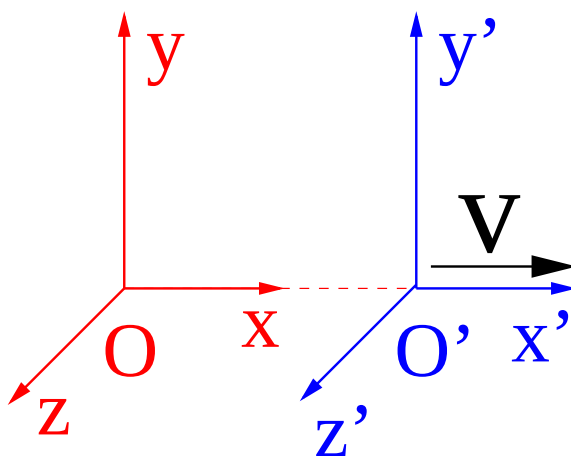
- Transformacja Galileusza
- Zdarzenia i czasoprzestrzeń
- Prędkość światła
- Postulaty Einsteina
- Transformacja Lorentza

Transformacja Galileusza

Przypomnienie (Wykład 2)

Rozważmy dwa układy odniesienia związane z obserwatorami O i O' poruszające się względem siebie ruchem **jednostajnym, prostoliniowym**.

Przyjmijmy, że osie układów są równoległe i ruch względny zachodzi w kierunku osi X . W chwili $t = t' = 0$ początki układów pokrywały się.

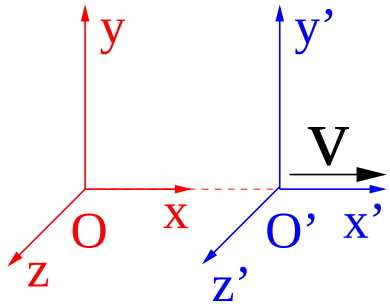


Obserwując **ten sam ruch** obserwatorzy mierzą **inną zależność** położenia od czasu.

Jeśli wiemy jak obserwatorzy poruszają się względem siebie, znamy $\vec{V}$, powinniśmy móc wyznaczyć transformacje $(x, y, z) \Leftrightarrow (x', y', z')$

Transformacja Galileusza

Transformacja współrzędnych przestrzennych



$$\text{Transformacja Galileusza} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + V t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Transformacja Galileusza prowadzi do wzoru na składanie prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

$\vec{V}$ - prędkość względna

Uniwersalność czasu

Czas nie zależy od układu odniesienia: $t \equiv t'$

Jest to **podstawowe założenie** w fizyce klasycznej (Newtonowskiej).

Zdarzenia i czasoprzestrzeń

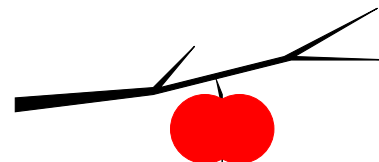
Doświadczenie to (najczęściej) pomiar jakiejś wielkości fizycznej lub (rzadziej) obserwacja jakiegoś zjawiska (np. zmiany stanu skupienia).

Oba przypadki możemy sprowadzić do rejestracji jakiegoś zdarzeń.

Przykład:

pomiar przyspieszenia spadającego jabłka

- Zdarzenie A: jabłko odrywa się od gałęzi
- Zdarzenie B: jabłko upada na ziemię



Aby wyznaczyć przyspieszenie (zakładając, że ruch jest jednostajnie przyspieszony) musimy znać zarówno czas jak i położenie jabłka dla obu zdarzeń.

Zdarzenia i czasoprzestrzeń

Zdarzenie

Zdarzenie: jednoczesne określenie czasu i położenia.

Zjawisko zachodzące w pewnym miejscu w przestrzeni i w pewnej chwili czasu.

Przykłady:

- obserwacja (pomiar) położenia jabłka (w danej chwili czasu)
- zderzenie kulek (zaniedbując ich rozmiary)
- rozszczepienie jądra atomowego
- start rakiety
- lądowanie rakiety na Księżycu
- wysłanie lub rejestracja impulsu laserowego, cząstki itp.

$$\text{ZDARZENIE} = \text{CZAS} + \text{POŁOŻENIE}$$

Od pierwszego wykładu zajmowaliśmy się różnego typu zdarzeniami...

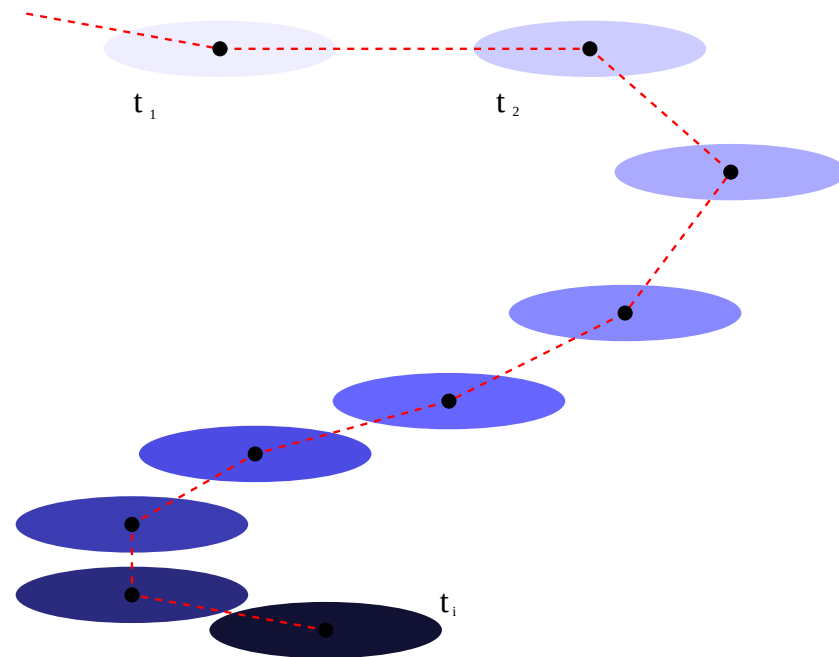
Zdarzenia i czasoprzestrzeń

Linia świata

Możemy wyróżnić pewne szczególne zbiory zdarzeń.

Wyobraźmy sobie, że obserwujemy jakiś obiekt (np. UFO) i rejestrujemy w sposób ciągły zmiany jego położenia w czasie. Mamy ciągłą serię pomiarów.

Zbiór zdarzeń opisujących ruch konkretnego ciała nazywamy "linią świata" tego ciała.



W wymiarach przestrzennych linia świata to po prostu tor.

Znając linię świata wiemy dokładnie jak poruszało się dane ciało.

Oczywiście kształt linii świata zależy od wybranego układu odniesienia.

Transformacja Galileusza

Uniwersalność czasu

Była **podstawowym założeniem** w fizyce klasycznej (Newtonowskiej)
Czas nie zależał od układu odniesienia.

Klasyczna transformacja współrzędnych zdarzeń

$$\text{Transformacja Galileusza} \Rightarrow \begin{cases} t = t' \\ x = x' + V t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Konsekwencją uniwersalności czasu jest **względność prędkości**

Każda prędkość, także prędkość światła zmienia się przy zmianie układu odniesienia

$$v = v' + V$$

Tr. Galileusza

Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza zapewnia **niezmienniczość** klasycznych praw ruchu (zasad dynamiki Newtona) przy zmianie **układu odniesienia**!

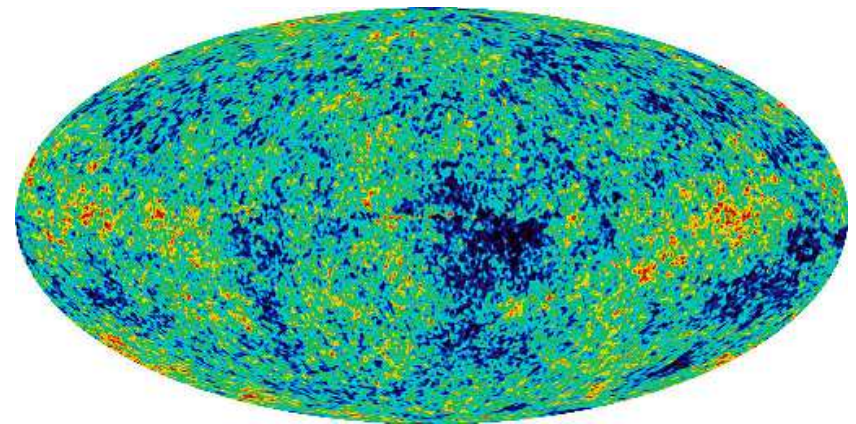
W roku 1604 **Galileusz** sformułował **zasadę względności**:

“Wszystkie układy odniesienia poruszające się względem siebie ze stałą prędkością są równoważne”

Zasada względności nie oznacza wcale, że nie istnieje wyróżniony układ odniesienia.

Obserwacje **mikrofalowego promieniowania tła**, pozostałości **Wielkiego Wybuchu**, w którym powstał Wszechświat, pozwalają wskazać związany z nim **układ odniesienia**.

Ale to temat na osobny wykład...



Czy tylko transformacja Galileusza jest zgodna z zasadą względności?!

Prędkość światła

Historia pomiarów

Już **Galileusz** zastanawiał się nad prędkością rozchodzenia się światła.

Jako pierwszy zaproponował pomiar prędkości światła metodą **czasu przelotu**.

Jednak przy ówczesnych dokładnościach pomiarów ($\Delta L \sim 1 \text{ m}$, $\Delta t \sim 1 \text{ s}$) było to niewykonalne. **Nie w warunkach ziemskich...**

W **1676** **Ole Rømer** zauważył, że obserwowany na Ziemi czas **zaćmień satelity Io** Jowisza zależy od położenia Ziemi względem Jowisza.

Maksymalne opóźnienie czasu zaćmienia wynosi około **16 minut**.

Według ówczesnych pomiarów orbity Ziemi oszacował $c = 214000 \text{ km/s}$

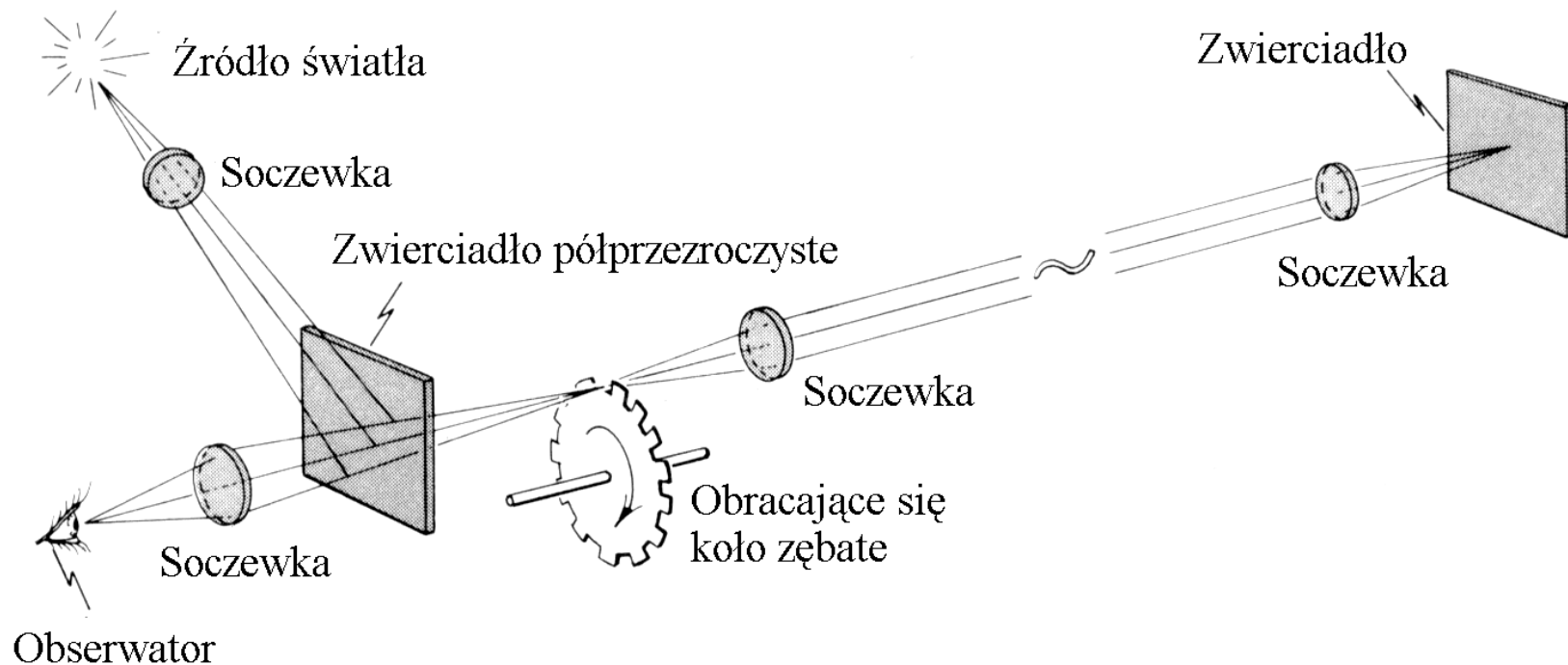
W **1727** **William Bradley** wyznaczył prędkość światła z **aberracji gwiazd**.

Gwiazdy zmieniają w ciągu roku swoje położenie na sferze niebieskiej o ok. 20.5 sekundy łuku, co jest wywołane przez ruch Ziemi dookoła Słońca (**przy skończonej prędkości rozchodzenia się światła**). Na tej podstawie wyznaczył $c = 301000 \text{ km/s}$

Prędkość światła

Pomiar H.L. Fizeau 1849

Pierwszy pomiar w warunkach “laboratoryjnych” (ziemskich)



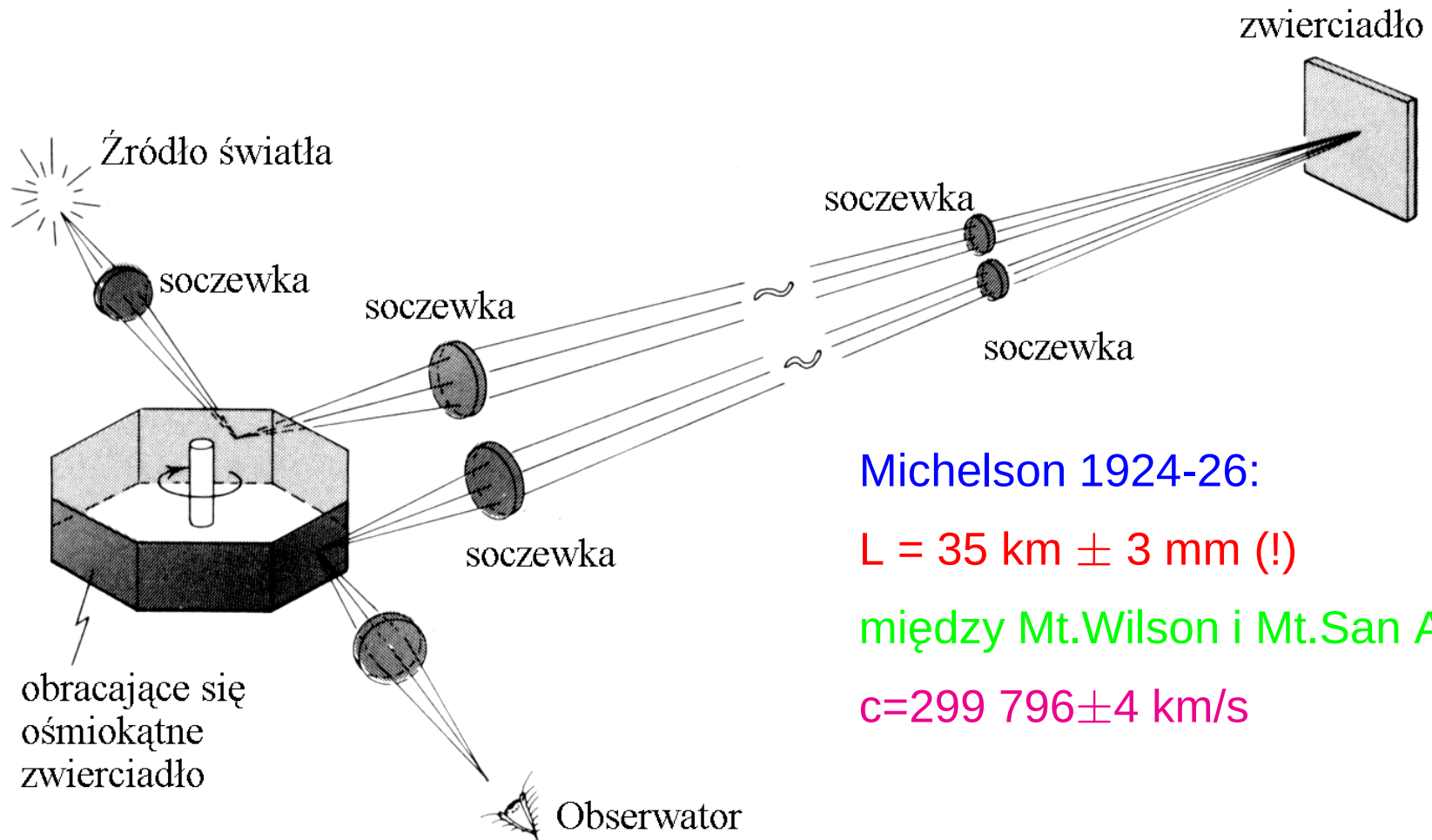
odległość $L = 8633$ m, zębów w “przesłonie” $N = 720$

liczba obrotów przy pierwszym “zaćmieniu” $n = 12.86 \text{ s}^{-1} \Rightarrow c \approx 315300 \text{ km/s}$

Prędkość światła

Metoda Foucault od 1850

Metoda wirującego zwierciadła



Michelson 1924-26:

$L = 35 \text{ km} \pm 3 \text{ mm (!)}$

między Mt.Wilson i Mt.San Antonio

$c = 299\,796 \pm 4 \text{ km/s}$

Prędkość światła

W latach 70 XX wieku prędkość światła zmierzono z dokładnością do około 1 m/s !

Mierzono też prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w innych zakresach częstości (od fal radiowych $\nu \sim 10^7$ Hz do promieniowania γ $\nu \sim 10^{24}$ Hz).

Brak różnic w granicach błędów pomiarowych.

Dziś już nie mierzymy prędkości światła !

W 1983 roku prędkość światła została zdefiniowana jako

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (\text{dokładnie !})$$

wybrana wartość zgodna z wcześniejszymi pomiarami

Teraz 1 metr jest zdefiniowany jako odległość jaką pokonuje światło w próżni w czasie równym 1/299792458 sekundy...

Prędkość światła

Na początku XX wieku panowało powszechne przekonanie o **falowej** naturze światła, która przejawiała się m.in. w zjawiskach dyfrakcji i interferencji.

Rozchodzenie się światła jako fali elektromagnetycznej opisywały **Równania Maxwella** (1865):

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Prędkość rozchodzenia fali elektromagnetycznej: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Problem: Równania Maxwella nie są niezmiennicze względem **transformacji Galileusza**. W szczególności wartość **prędkości światła** jest określona przez parametry równania i **nie zależy od układu odniesienia!**

Prędkość światła

Z równań Maxwella wynika, że prędkość światła zależy jedynie od **stałych** opisujących oddziaływania **magnetyczne** i **elektryczne** (prawo Ampera i prawo Coulomba).

Z transformacji Galileusza wynika, że powinna zależeć od układu odniesienia!

Ale ten sam problem możemy dostrzec w przypadku **dźwięku**.

Prędkość rozchodzenia się dźwięku wyraża się przez **parametry ośrodka** (!). Z definicji jest więc ustalona tylko **względem ośrodka** (w układzie w którym ośrodek spoczywa).

Dzięki temu **nie ma sprzeczności** z transformacją Galileusza i jego prawem “dodawania” prędkości.

Podobnie mogłoby być w przypadku światła: jeśli jesteśmy w stanie wskazać **ośrodek** w którym światło się rozchodzi, to **równania Maxwella** nie są sprzeczne z transformacją Galileusza.

Poszukiwany ośrodek nazwano eterem...

Doświadczenie Michelsona-Morleya

1887

Pomiar prędkości Ziemi względem eteru

Czas przelotu światła w ramionach interferometru:

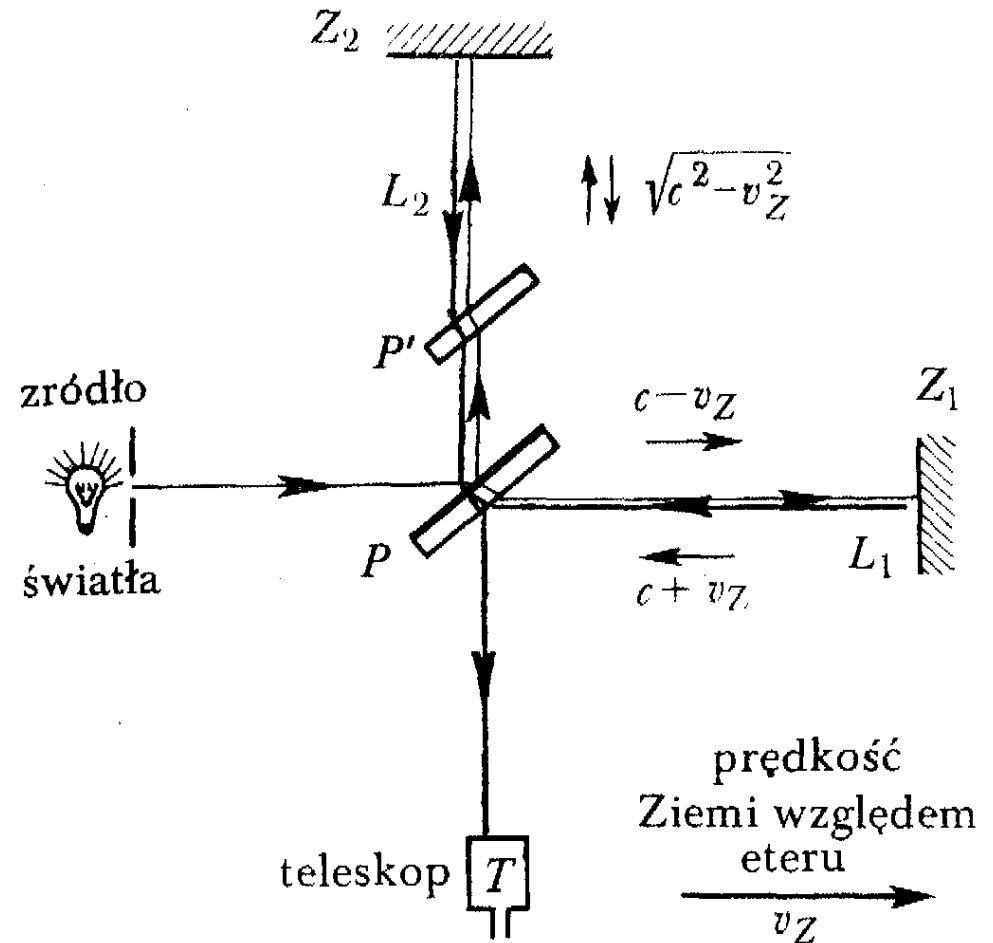
$$\Delta t_1 = \frac{L_1}{c + v_Z} + \frac{L_1}{c - v_Z}$$

$$= \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\Delta t_2 = \frac{2L_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

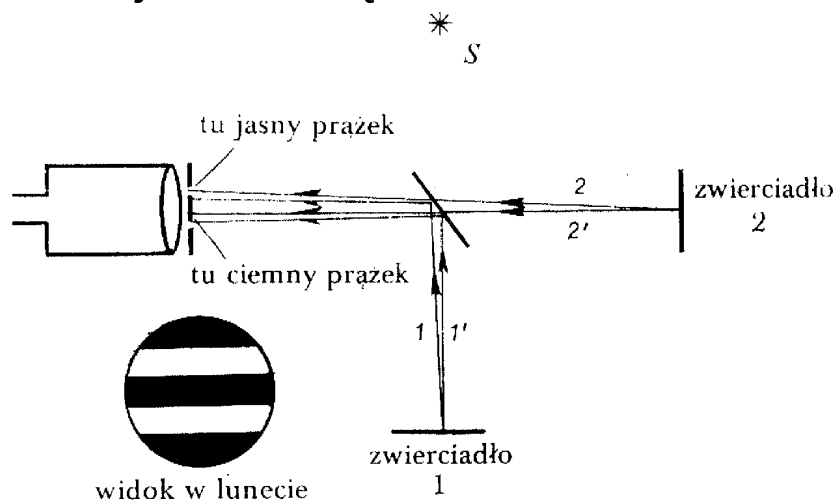
Kierunek ruchu względem eteru jest wyróżniony !



Doświadczenie Michelsona-Morleya

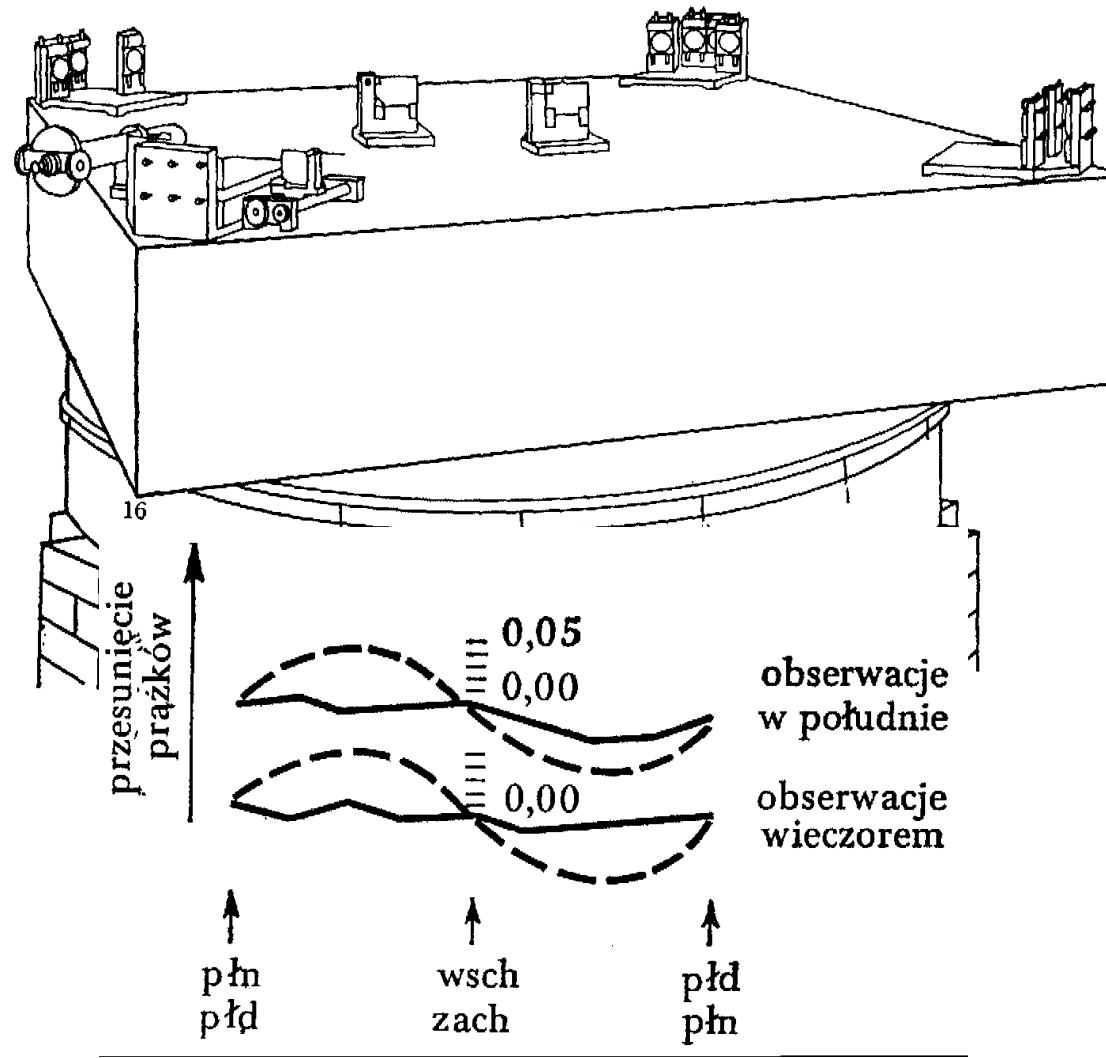
Wyniki

Światło z dwóch ramion interferometru interferuje ze sobą



Przy obrocie interferometru oczekujemy

- ⇒ zmiany $\Delta t_1 - \Delta t_2$
- ⇒ zmiany fazy
- ⇒ przesunięcia prążków interferencyjnych



Brak efektu !!!

Doświadczenie Michelsona-Morleya

Wyniki

Negatywny wynik doświadczenia Michelsona-Morleya wskazywał, że Ziemia **nie porusza się** względem **ośrodka**, w którym rozchodzi się **światło**.

Doświadczenia tego typu powtarzano **wielokrotnie**, także w dłuższych okresach (aby wykorzystać zmianę kierunku prędkości Ziemi w **ruchu orbitalnym**) zawsze z **wynikiem negatywnym**.

Wszystkie wyniki wskazywały, że **prędkość światła** jest stała **(względem źródła)** i **nie zależy od układu odniesienia**.

W świetle tych wyników **równania Maxwella** nie dawały się pogodzić z **transformacją Galileusza** (postulatem uniwersalności czasu).

Postulaty Einsteina

W roku 1905 Einstein opublikował pracę “O elektrodynamice ciał w ruchu”.

Zawarł w niej dwa postulaty, które *“wystarczają do podania prostej, wolnej od sprzeczności elektrodynamiki ciał w ruchu, opartej na teorii Maxwella...”*

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (zasada względności)
- prędkość światła w próżni, c , jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od wzajemnego ruchu obserwatora i źródła (uniwersalność prędkości światła)

Drugi postulat oznacza odrzucenie transformacji Galileusza na rzecz równań Maxwella.

Okazuje się, że transformacja Galileusza nie jest jedyną transformacją, która zgodna jest z zasadą względności.

Jeśli odrzucimy postulat uniwersalności czasu istnieje drugie rozwiązanie
⇒ transformacja Lorentza.

Teoria względności Einsteina

Uniwersalność prędkości światła nie da się pogodzić z uniwersalnością czasu !

Rozważmy obserwatora O' , który porusza się z prędkością v względem układu O

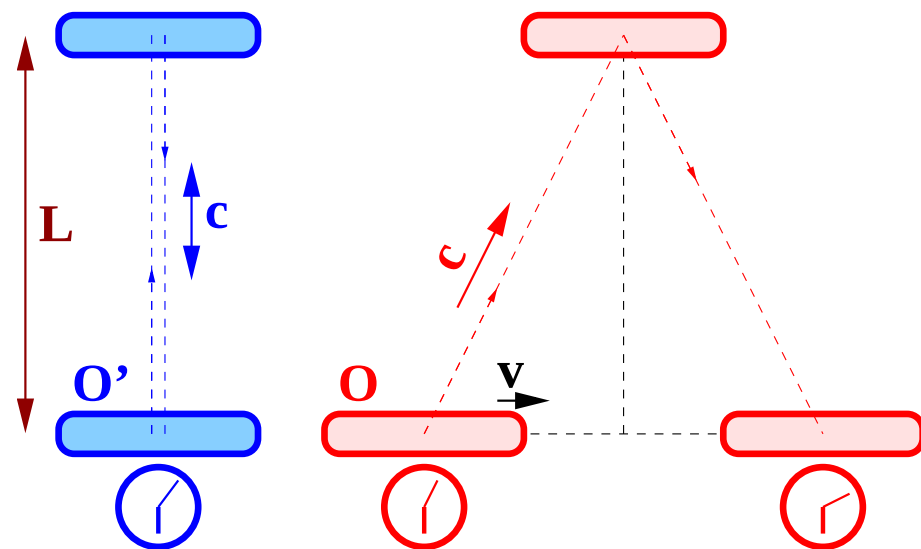
Względność czasu

Obserwator O' odmierza czas przy pomocy zegara świetlnego takt $\Delta t' = \frac{2l}{c}$

Dla obserwatora O światło pokonuje dłuższą drogę $\Rightarrow \Delta t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

Dylatacja czasu: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Dla obserwatora O zegar w O' chodzi wolniej !?!...



Konstrukcja układu współrzędnych

Z naszych rozważań wynika, że czas w jednym układzie będzie wolniejszy niż w drugim.

Ale przecież żaden układ nie powinien być wyróżniony !?...

Musimy bliżej zastanowić się nad konstrukcją układu współrzędnych!

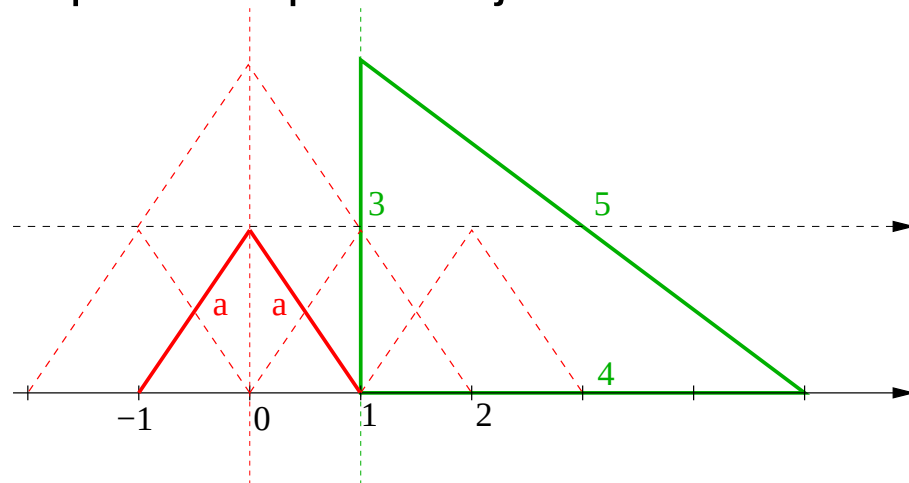
Dla współrzędnych przestrzennych jest to proste:

wystarczy, że mamy wzorec jednostki długości, odkładając ten wzorec wzdłuż prostej (toru ciała swobodnego) otrzymujemy pierwszą oś współrzędnych.

Kolejne osie układu konstruujemy prostopadłe do pierwszej.

Nie potrzebujemy kątomierza.

Wystarczą nam jednakowej długości tyczki lub sznurki, które pozwolą nam na konstrukcję trójkąta równoramiennego.

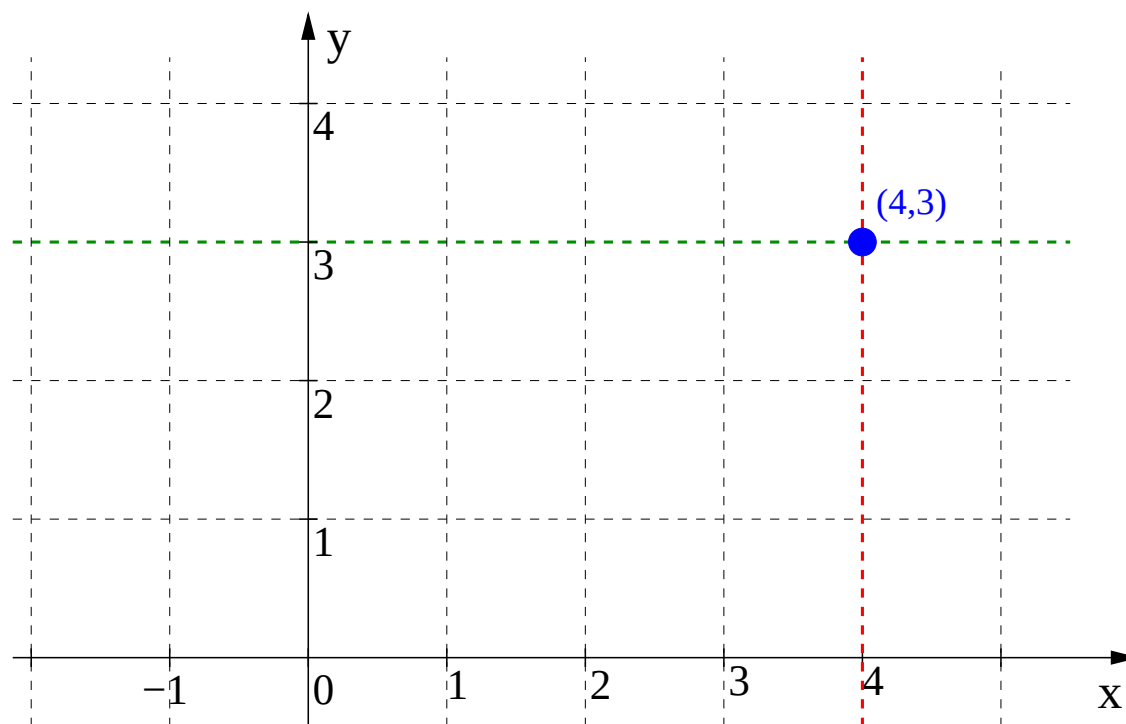


Możemy też skorzystać z twierdzenia Pitagorasa...

Konstrukcja układu współrzędnych

Dodatkowo kreśląc **linie równoległe** do osi przechodzących przez początek układu otrzymujemy **siatkę współrzędnych**.

Pozycję zdarzenia możemy zdefiniować poprzez podanie najbliższego węzła siatki.



Zakładamy przy tym, że przestrzeń jest płaska.

Wbrew pozorom nie jest to oczywiste założenie!...

Konstrukcja układu współrzędnych

Pozostaje nam "oś czasu".

Czy wystarczy nam jeden zegar w początku układu współrzędnych?

NIE !

Potrzebny jest nam zegar referencyjny, ale do określenia współrzędnej czasowej zdarzenia potrzebny jest zegar w każdym węźle siatki.

Inaczej pomiar będzie zależał od metody odczytu wskazań zegara referencyjnego.

Zegary siatki muszą być oczywiście zsynchronizowane z zegarem referencyjnym.

Nie można (jak się później przekonamy) zrobić tego synchronizując zegary w początku układu, a następnie roznosząc je do poszczególnych węzłów siatki -

ruch może wpływać na bieg zegarów

(wyobraźmy sobie, że mamy zegary wahadłowe).

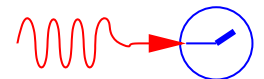
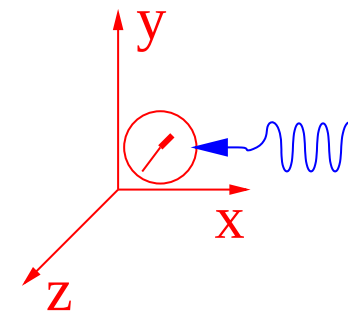
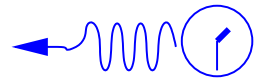
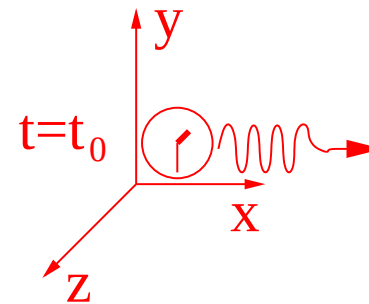
Konstrukcja układu współrzędnych

Synchronizację można przeprowadzić poprzez wysłanie impulsów światła.

O określonej godzinie wysyłamy impuls z wybranego zegara do zegara referencyjnego oraz z zegara referencyjnego do wybranego zegara.

Jeśli oba impulsy dotarły o tej samej godzinie (odczytanej na zegarze do którego dotarł impuls) to oznacza, że zegary są zsynchronizowane.

Jeśli nie to połowa różnicy tych czasów daje nam poprawkę dla wybranego zegara.



Aby zastosować tą metodę synchronizacji nie musimy znać prędkości światła.

Ale zakładamy, że nie zależy ona od kierunku rozchodzenia!

Konstrukcja układu współrzędnych

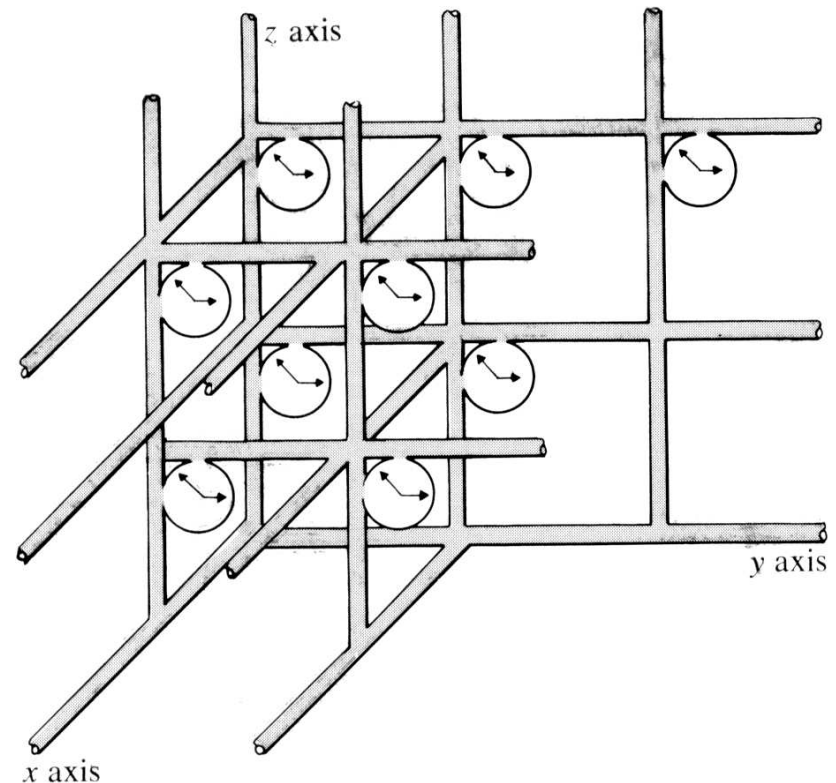
Wszystkie zegary rozmieszczone w węzłach skonstruowanej przez nas siatki układu współrzędnych spoczywają w tym układzie.

Jest to warunek konieczny, żeby synchronizacja była trwała (zakładamy, że zegary chodzą poprawnie, nie mają usterek)

⇒ Relatywistyczny układ współrzędnych to rodzina zsynchronizowanych zegarów.

Jeśli przyjmiemy, że na zegary są swobodne (nie działają na nie żadne siły) to tak skonstruowany układ współrzędnych będzie z definicji **układem inercyjnym**.

W zagadnieniach relatywistycznych jest niezwykle istotne rozróżnienie pomiarów z użyciem jednego zegara od sytuacji gdy patrzymy na kolejne zegary w danym układzie.



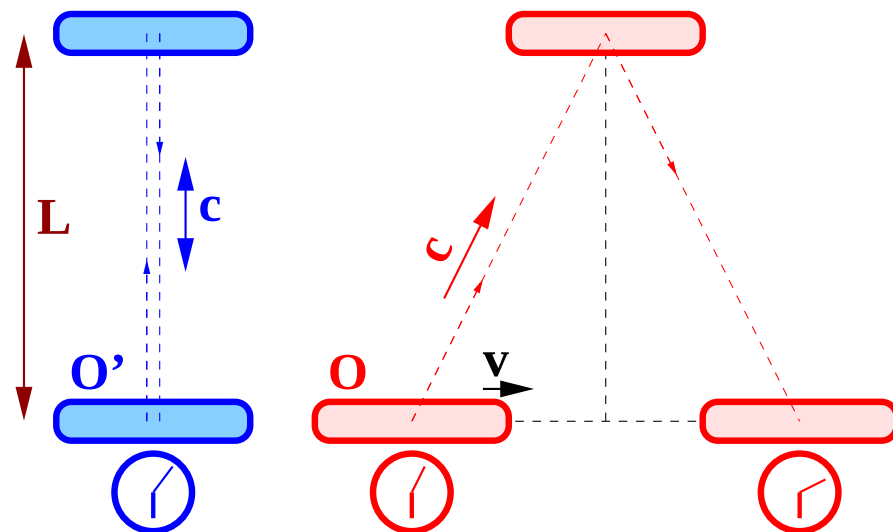
Teoria względności Einsteina

Dylatacja czasu

Dla obserwatora O zegar w początku układu O' chodzi wolniej...

Ale układy powinny być równoważne !?

Pozorny paradoks wynika z faktu, że pomiar narusza symetrię między układami: obserwujemy zegar, który jest związany z konkretnym układem odniesienia.



Obserwator O powie, że w układzie O' :

- zegary nie są poprawnie zsynchronizowane
- wszystkie zegary chodzą wolniej niż powinny

Obserwator O' powie, że w układzie O :

⇒ pełna symetria

Czy jesteśmy w stanie powiązać pomiary czasu i położenia w obu układach ?

Tak jak to robiliśmy w przypadku klasycznym (transformacja Galileusza)...

Transformacja Lorentza

Transformacja liniowa

Aby zachować niezmienniczość praw przyrody względem przesunięć w czasie i przestrzeni, transformacja współrzędnych między układami powinna mieć postać

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} \cdot t' + l_{12} \cdot x' + l_{13} \cdot y' + l_{14} \cdot z' \\ l_{21} \cdot t' + l_{22} \cdot x' + l_{23} \cdot y' + l_{24} \cdot z' \\ l_{31} \cdot t' + l_{32} \cdot x' + l_{33} \cdot y' + l_{34} \cdot z' \\ l_{41} \cdot t' + l_{42} \cdot x' + l_{43} \cdot y' + l_{44} \cdot z' \end{pmatrix}$$

gdzie l_{ij} to ustalone współczynniki, zależne tylko od prędkości między układami

Każda współrzędna zdarzenia w $\textcircled{O}$ wyraża się przez kombinację liniową współrzędnych tego zdarzenia w $\textcircled{O}'$.

Transformacja Lorentza

Transformacja liniowa

Szukamy transformacji w ogólnej postaci: (zapis równoważny poprzedniemu)

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

L - macierz 4×4
współczynników l_{ij}

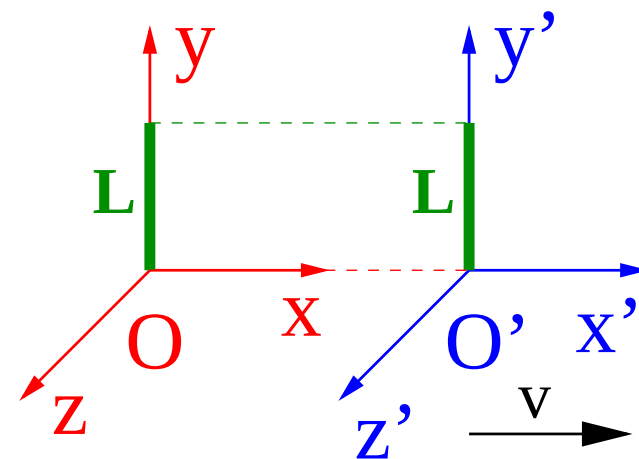
Co możemy powiedzieć na jej temat?

Wymiary poprzeczne

Rozawżmy jednostkowe pręty umieszczone w obu układach wzdłuż osi Y (lub Z).

Z symetrii zagadnienia, żaden obserwator nie może stwierdzić, że jego pręt jest dłuższy

$$\Rightarrow \begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$



Transformacja Lorentza

Szukamy więc transformacji w postaci:

$$\begin{aligned} t &= A t' + B x' \\ x &= C t' + D x' \end{aligned} \quad y = y' \quad z = z'$$

Dylatacja czasu

Przyjmijmy, że w obu układach pierwsze “tyknięcie” zegara świetlnego ma współrzędne $(0, 0, 0, 0)$.

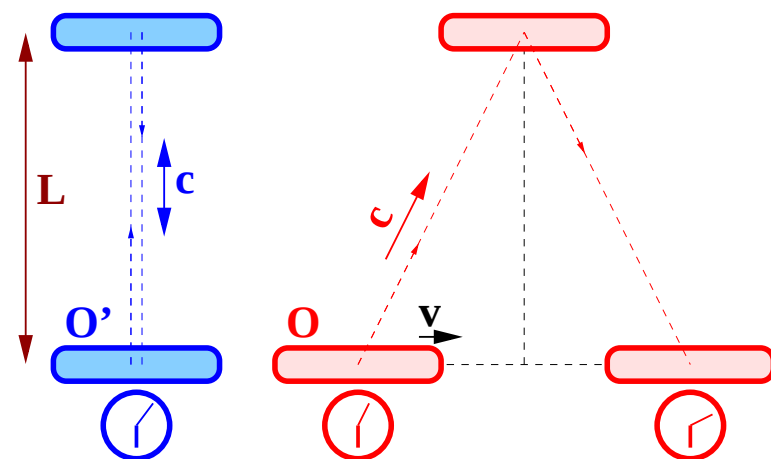
Drugie “tyknięcie” w układzie O' : $(t', 0, 0, 0)$

W układzie O :

$$t = \gamma \cdot t' \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Rightarrow x = \beta \cdot ct = \beta \gamma \cdot ct' \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow A = \gamma \quad C = \beta \gamma c$$



Transformacja Lorentza

Predkość światła

Przyjmijmy, że w chwili mijania się obserwatorów $t = t' = 0$ z początku układów emitowane są dwa impulsy światła, zgodnie i przeciwnie do $\vec{v}$.

Dla obu obserwatorów rozchodzą się one z prędkością c .

	O'	O	
pierwszy impuls	$x' = ct'$	$x = ct$	$\Rightarrow Ct' + D(ct') = c \cdot [At' + B(ct')]$
drugi impuls	$x' = -ct'$	$x = -ct$	$\Rightarrow Ct' - D(ct') = -c \cdot [At' - B(ct')]$

dodając i odejmując stronami otrzymujemy:

$$B = \frac{1}{c^2} C = \frac{1}{c} \beta \gamma$$
$$D = A = \gamma$$

Transformacja Lorentza

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{cases} ct = \gamma ct' + \gamma \beta x' \\ x = \gamma \beta ct' + \gamma x' \end{cases} \quad y = y' \quad z = z'$$

Lub, w zapisie macierzowym:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' + \gamma \beta x' \\ \gamma \beta ct' + \gamma x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ct traktujemy jako “czwarty” wymiar (zazwyczaj zapisujemy jako wymiar “zerowy” - x_0)

Transformacja Lorentza $\equiv$ “obrót” w “płaszczyźnie” ct - x dla ruchu wzdłuż osi X

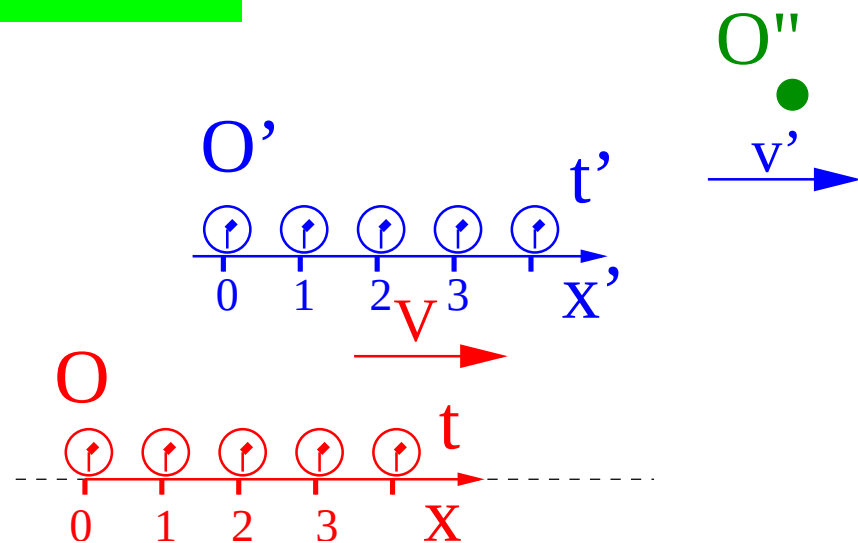
Składanie prędkości

Rozważmy teraz ciało O'' , które w układzie O' porusza się z prędkością v' w kierunku osi x' .

$$v' = \frac{x'}{t'} \quad x' = v' t'$$

Jaką prędkość ciała O'' zmierzy obserwator O ?

$$v'' = \frac{x}{t} = \frac{\gamma x' + \gamma \beta c t'}{\gamma t' + \frac{\gamma \beta}{c} x'} = \frac{\gamma v' t' + \gamma \beta c t'}{\gamma t' + \frac{\gamma \beta}{c} v' t'}$$



W podejściu Einsteina **składanie** prędkości nie polega na ich prostym dodawaniu:

$$v'' = \frac{V + v'}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} \quad \beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \quad \neq \beta + \beta'$$

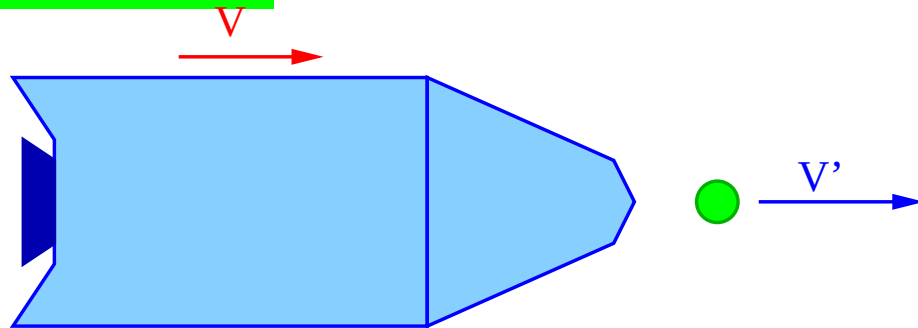
⇒ Prędkość światła pozostaje stała ($\beta'' = \beta' = 1$) niezależnie od układu odniesienia.

Transformacja Lorentza przechodzi w transformację Galileusza w granicy $\frac{1}{c^2} \rightarrow 0$

Składanie prędkości

Przykład

Z rakiety poruszającej się z prędkością V względem Ziemi wystrzelono pocisk z prędkością V' względem rakiety.



Jaka jest prędkość V'' pocisku względem Ziemi?

β	β'	β''
0.0001	0.0001	≈ 0.0002
0.001	0.001	0.001999998
0.01	0.01	0.019998
0.1	0.1	≈ 0.1980
0.2	0.2	≈ 0.3846
0.4	0.4	≈ 0.6897
0.8	0.8	≈ 0.9756
0.9	0.9	≈ 0.9945

W granicy małych prędkości słuszne jest klasyczne dodawanie prędkości.

Transformacja Lorentza

Przedstawienie graficzne

Niech zegar referencyjny w układzie O' błyska z upływem każdej jednostki czasu. Zdarzenia te mają współrzędne:

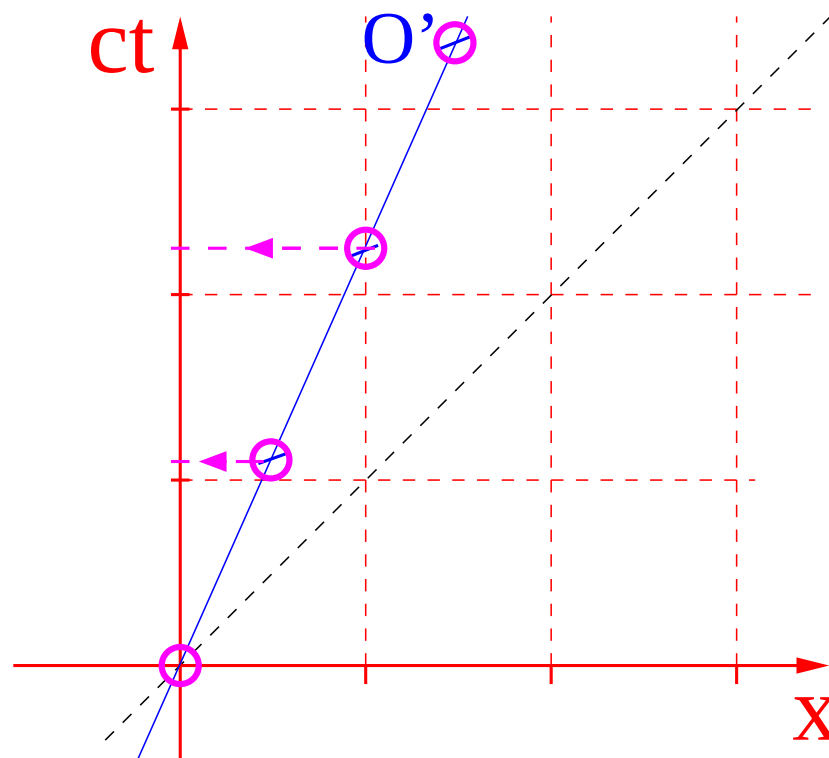
$$\begin{aligned} ct' &= i \cdot \Delta ct' = i \\ x' &= 0 \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Z transformacji Lorentza uzyskujemy współrzędne tych zdarzeń w układzie O :

$$\begin{aligned} ct &= i \cdot \gamma \Delta ct' = i \cdot \gamma \\ x &= i \cdot \gamma \beta \Delta ct' = i \cdot \gamma \beta \end{aligned}$$

Zdarzenia te leżą na linii świata ciała O' , a jednocześnie pokazują nam upływ czasu w jego układzie $\Rightarrow$ “tyknięcia” obrazują nam oś ct'

“Tyknięcia” zegara O' rejestrowane w układzie O :



Transformacja Lorentza

Przedstawienie graficzne

Niech zegary rozmieszczone wzdłuż osi x' wyślą w tej samej chwili $t'=0$ błysk światła. W O' zdarzenia te mają współrzędne:

$$ct' = 0$$

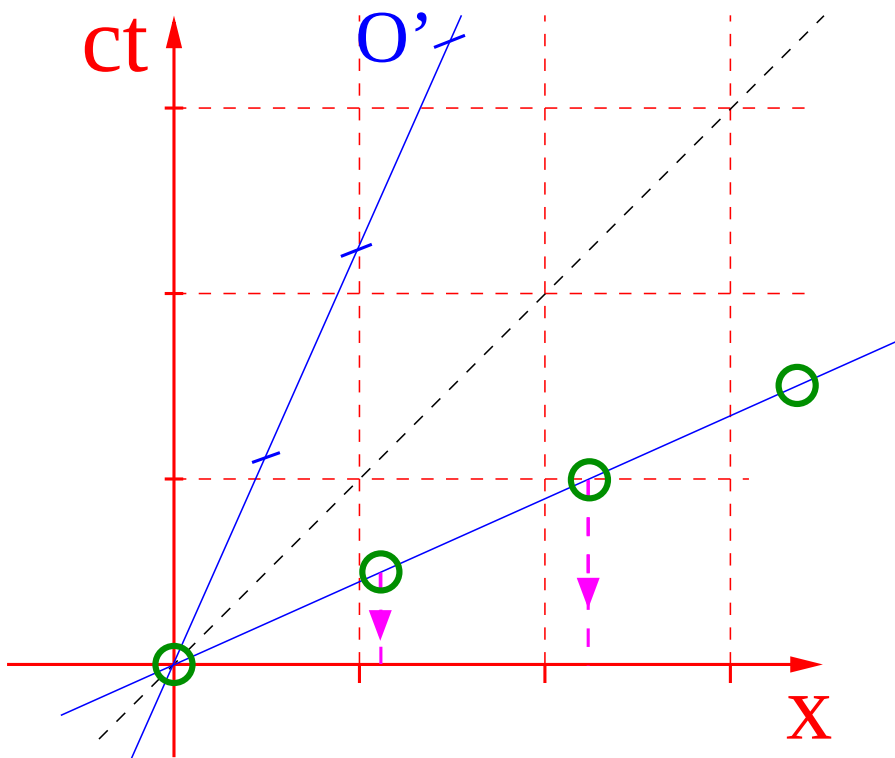
$$x' = i \cdot \Delta x' = i$$

Z transformacji Lorentza uzyskujemy współrzędne tych zdarzeń w układzie $\mathcal{O}$:

$$ct = i \cdot \gamma \beta \Delta x' = i \cdot \gamma \beta$$

$$x = i \cdot \gamma \Delta x' = i \cdot \gamma$$

błyski zegarów 0'
rejestrowane w układzie 0:



Zdarzenia te pokazują nam jak w układzie O wyglądają zdarzenia równoczesne w O' , odwzorowują nam też nam też **jednostkę długości** $\Rightarrow$ obrazują nam oś x'

Transformacja Lorentza

Wykres Minkowskiego

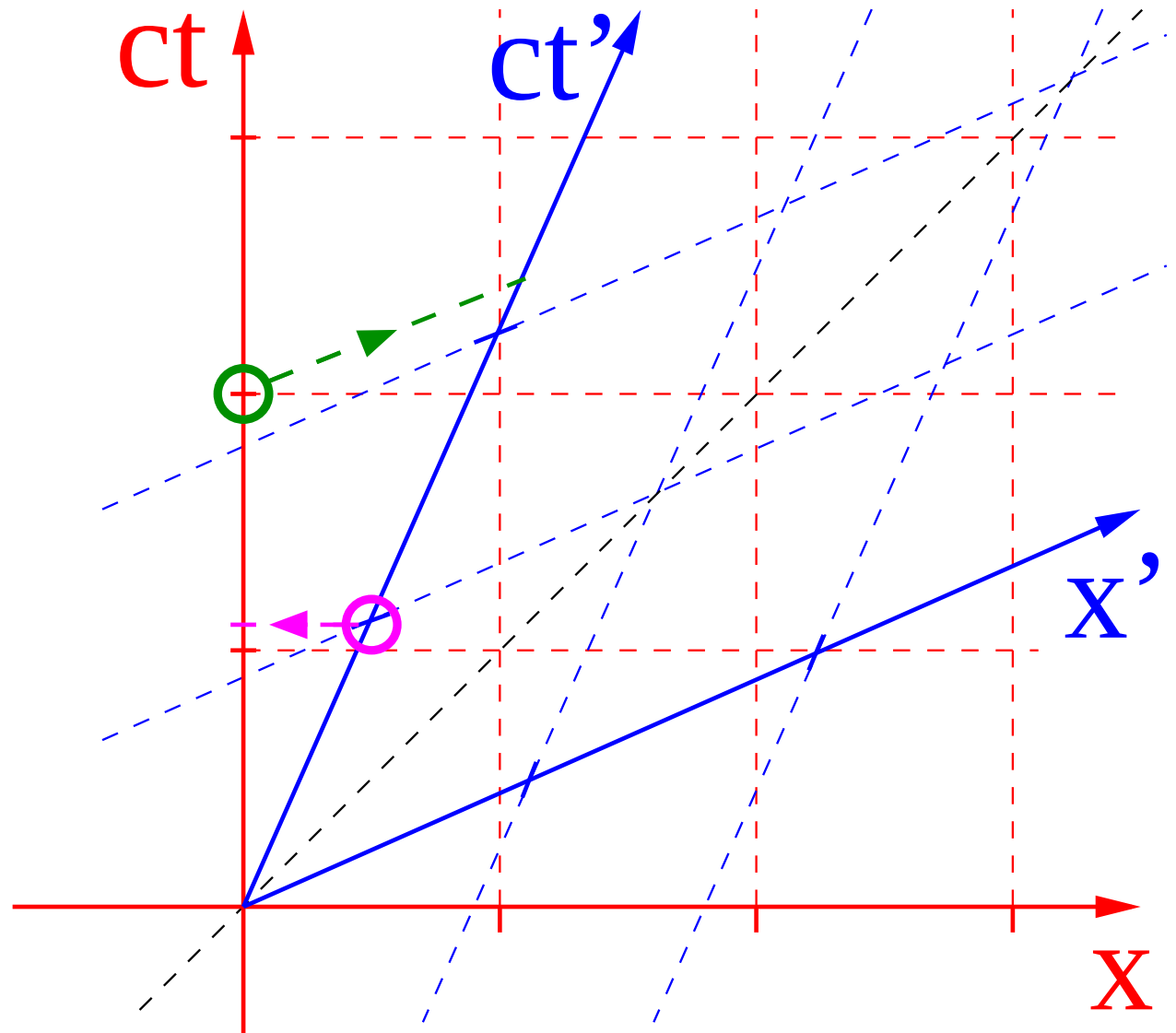
Osie układu O' nachylone są do osi O pod kątem

$$\tan \theta = \beta = \frac{V}{c}$$

Długości jednostek osi w układzie O' widziane w układzie O :

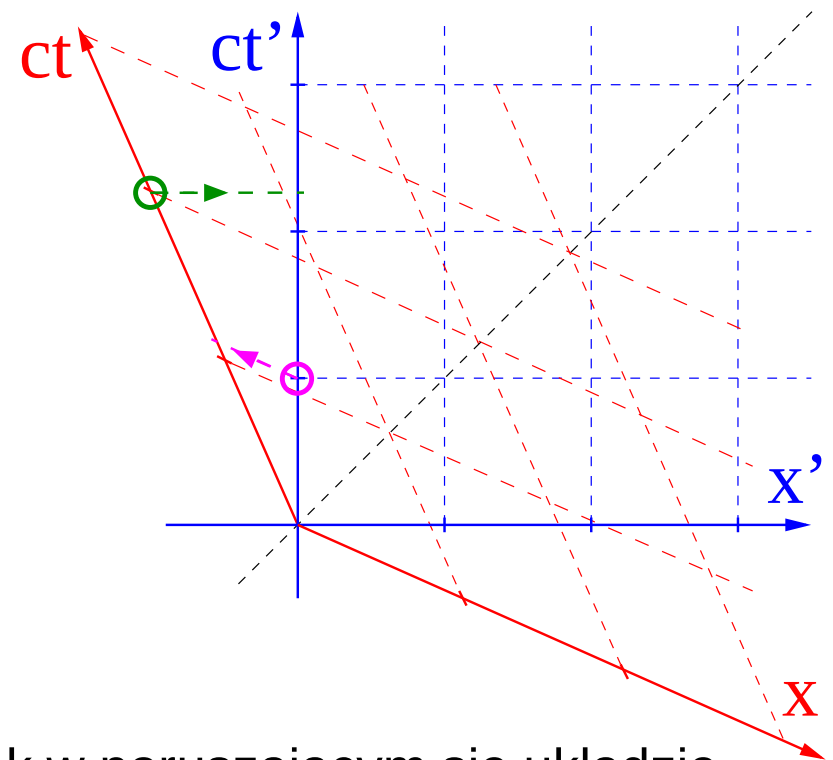
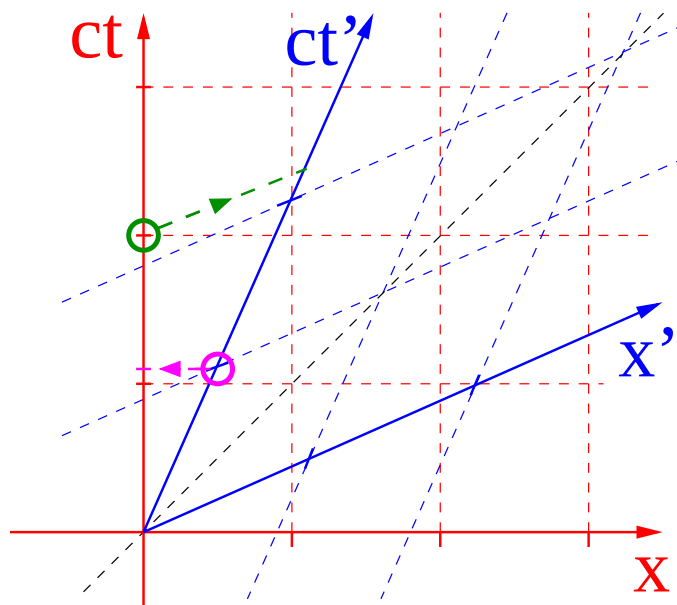
$$l' = \gamma$$

Ale także obserwator O' widzi wydłużenie jednostek osi O !



Transformacja Lorentza

Transformacja odwrotna



Obaj obserwatorzy stwierdzą wydłużenie jednostek w poruszającym się układzie.

Wybierając zgodne zwroty osi układów naruszyliśmy symetrie:
układ O porusza się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x' , a O' zgodnie z x .

Transformacja Lorentza

Transformacja Lorentza nie jest “jednym z wielu” możliwych przekształceń!

Korzystając tylko z:

- definicji (inercjalnego) układu odniesienia (zasady bezwładności)
- zasady względności (równoprawności układów odniesienia)

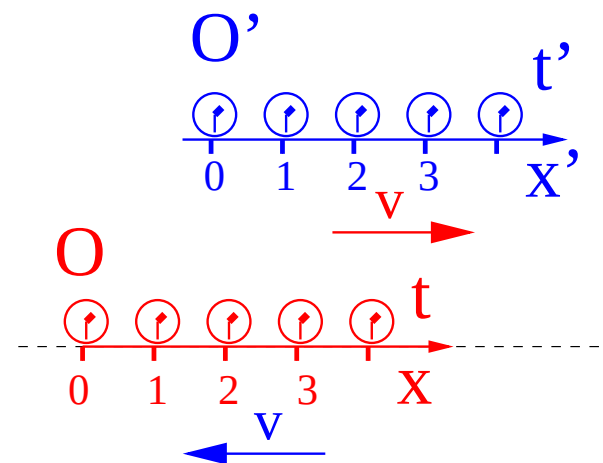
można pokazać, że związek między współrzędnymi zdarzenia w dwóch układach odniesienia **musi** mieć postać:

$$\begin{cases} t = \frac{t' + E V x'}{\sqrt{1 - E V^2}} \\ x = \frac{V t' + x'}{\sqrt{1 - E V^2}} \end{cases} \quad y = y' \quad z = z'$$

Gdzie **nieznana** pozostaje jedynie **stała E**!

Przyjęcie $E = 0$ odpowiada transformacji Galileusza i daje nam **uniwersalność czasu**

Przyjęcie $E > 0$ oznacza, że istnieje w przyrodzie **prędkość graniczna** $c = \sqrt{\frac{1}{E}}$



Transformacja Lorentza

Transformacje możemy też zapisać jako “hiper obrót” w czasoprzestrzeni:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

gdzie η jest parametrem transformacji, a $\cosh$ i $\sinh$ to tzw. funkcje hiperboliczne.

$$\begin{aligned} \eta &= \ln[\gamma(1 + \beta)] = \ln\left(\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \beta &= \tanh \eta = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ & & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \end{aligned}$$

Składanie transformacji Lorentza $\Rightarrow$ dodawanie (!) współczynników.

η - kąt hiperboliczny

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Zdarzeniem nie jest
☐ A rozszczepienie jądra atomowego ☐ B zachód Słońca ☐ C start rakiety
☐ D wybuch supernowej
2. Który z postulatów jest sprzeczny z transformacją Galileusza
☐ A uniwersalność czasu ☐ B równoprawność układów odniesienia ☐ C zasada bezwładności
☐ D uniwersalność prędkości światła
3. Zasada względności mówi nam, że
☐ A istnieje wyróżniony układ odniesienia ☐ B nie istnieje wyróżniony układ odniesienia
☐ C prawa przyrody zależą od wyboru układu odniesienia
☐ D prawa przyrody nie zależą od wyboru układu odniesienia
4. Układ O' porusza się z prędkością V w kierunku osi X układu O . Zgodnie z transformacją Lorentza ($c \equiv 1$)
☐ A $x = \gamma x' + \beta t'$ ☐ B $t = \gamma t' + \beta x'$ ☐ C $t = \gamma(x' + \beta t')$ ☐ D $x = \gamma(x' + \beta t')$
5. Z rakiety poruszającej się z prędkością $v = 0.5c$ względem Ziemi wystrzeliwany jest w kierunku ruchu pocisk z prędkością $v' = 0.4c$ względem rakiety. Prędkość pocisku względem Ziemi wynosi
☐ A $0.5 c$ ☐ B $0.95 c$ ☐ C $0.9 c$ ☐ D $0.75 c$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego