



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Dynamika relatywistyczna

## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład XIII:

- relatywistyczna definicja pędu
- relatywistyczna definicja energii, zasady zachowania
- transformacja Lorentza dla energii i pędu
- masa niezmiennicza i układ środka masy
- zderzenia elastyczne

# Wprowadzenie

Zagadnienia ruchu ciał w mechanice **nierelatywistycznej** (Newtona/Galileusza) rozwiązywaliśmy w oparciu o

## Równania ruchu

Ruch ciała jest zadany przez działające na nie siły zewnętrzne + warunki początkowe

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

lub

## Zasady zachowania

Dla układu izolowanego i ruchu pod wpływem sił zachowawczych

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const} \quad \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

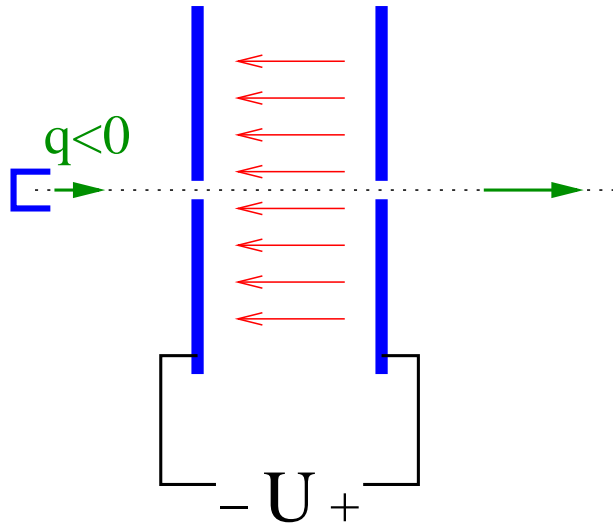
$$E = E_p + E_k = E_p + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \text{const} \quad \vec{E}_{k,i} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Czy podejścia te można też wykorzystać w przypadku relatywistycznym?

# Pęd cząstki

## Granice podejścia klasycznego

Elektron w kondensatorze  
(najprostszy 'akcelerator' cząstek):



Klasycznie:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

Potrafimy wytwarzać pola elektryczne

$$E \sim 10 \text{ MV/m} = 10^7 \text{ V/m}$$

Dla elektronu:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0.5 \text{ MeV}/c^2$$

$$|q_e| \equiv 1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow a \approx 20 \text{ m}^{-1} \cdot c^2 \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ m/s}^2$$

W podejściu klasycznym elektron powinien osiągnąć prędkość światła już po przebyciu

$$\Delta x \approx 2.5 \text{ cm} !!!$$

$\Rightarrow$  konieczność modyfikacji praw ruchu

# Pęd cząstki

## Uogólnienie praw ruchu

Założmy, że chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

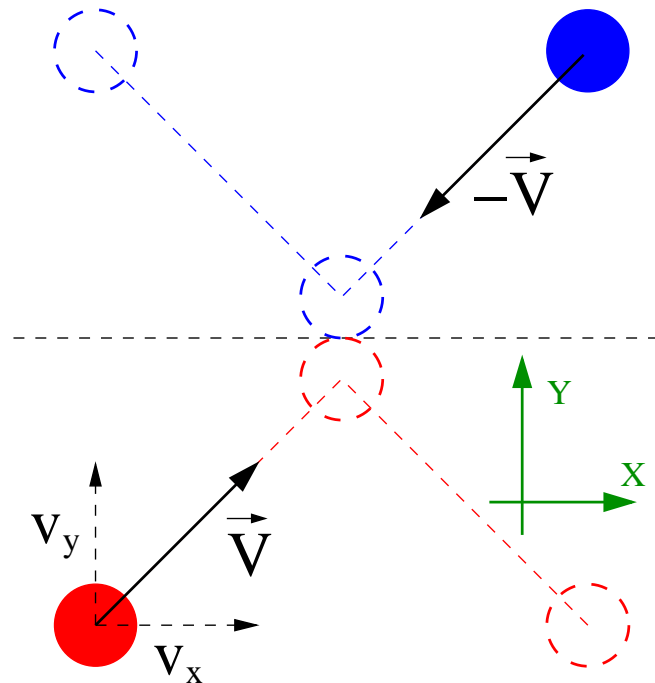
Oznacza to jednak, że musimy zmienić definicję pędu, bo Newtonowska definicja

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

ogranicza wartość pędu od góry ( $v < c$ )  
a przecież wciąż mogą działać siły...

## Doświadczenie myślowe

Zderzenie dwóch kul o jednakowej masie  $m$ :



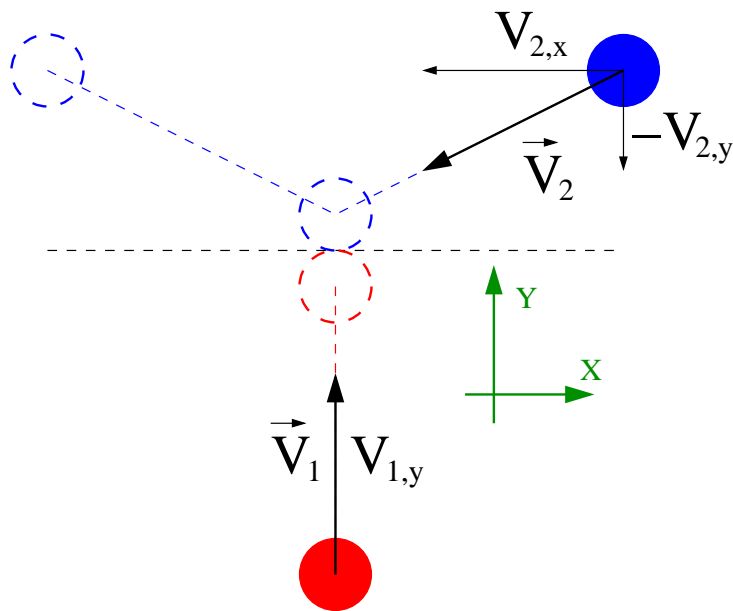
Pędy obu kul są równe co do wartości ale przeciwnie skierowane.

**Całkowity pęd układu jest zerowy!**

# Pęd cząstki

## Doświadczenie myślowe

Przejdźmy do układu poruszającego się z prędkością  $V_x$  wzdłuż osi X - pierwsza z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Pędy wzdłuż osi Y powinny być równe.

Dwie kule  $\Rightarrow$  dwa układy odniesienia

Wybór jednej z kul łamie symetrię zagadnienia !

Przesunięcia wzdłuż osi Y nie zmieniają się w transformacji Lorentza, ale zmienia się czas w jakim następują.

Prędkość wzdłuż osi Y **pierwszej kuli**:

$$V_{1,y} = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \beta \frac{V_x}{c}\right)} = \gamma V_y$$

Prędkość wzdłuż osi Y **drugiej kuli**:

$$V_{2,y} = \frac{V_y}{\gamma(1 + \beta^2)}$$
$$\beta = \frac{V_x}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}$$

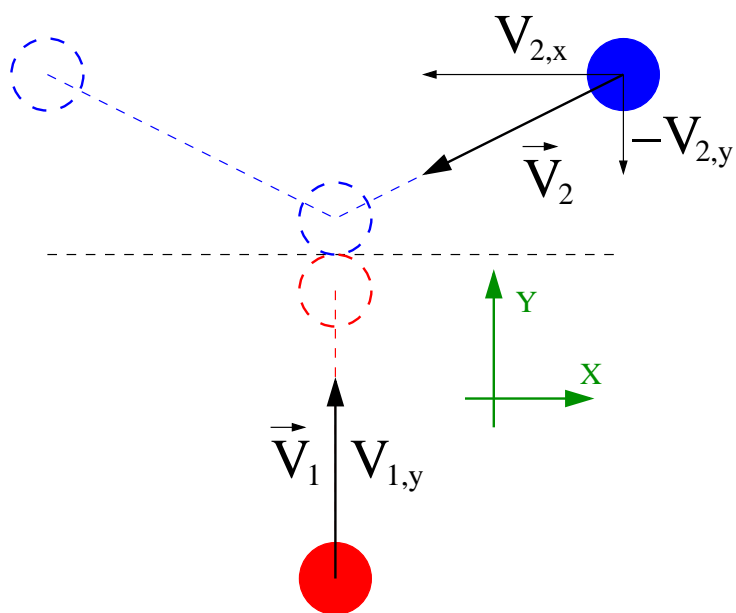
Czyli:

$$m V_{1,y} \neq m V_{2,y}$$

# Pęd cząstki

## Doświadczenie myślowe

Układ w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Prędkość wzdłuż osi Y **drugiej kuli** jest zmniejszona na skutek dylatacji czasu:

$$V_{2,y} = \frac{V_{1,y}}{\gamma^2(1 + \beta^2)} = \frac{V_{1,y}}{\gamma'} \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{2,x}^2}{c^2}}}$$

Przyjmijmy, że  $V_y \ll c$ , ale  $V_x \sim c$ , wtedy:

$$\gamma_1 V_{1,y} = \gamma_2 V_{2,y}$$

$$\gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - V_2^2/c^2}}$$

Zasadę zachowania pędu możemy w naszym przypadku “uratować” modyfikując definicję:

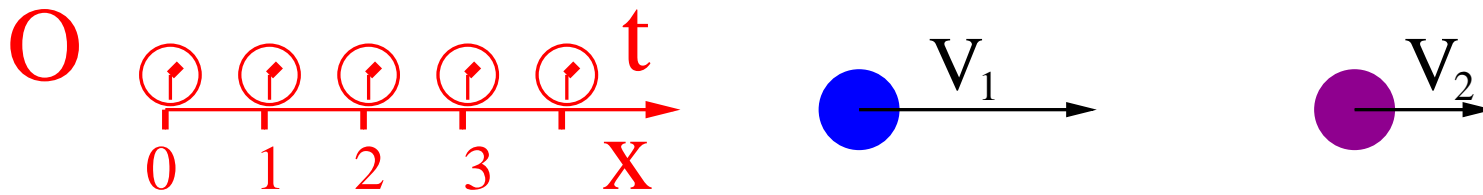
$$\vec{p} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v}$$

Czy tak zdefiniowany pęd jest zachowany w ogólnym przypadku?

# Pęd cząstki

Wyrażenie na pęd dla cząstek relatywistycznych możemy też wyprowadzić z zasady względności (+ relatywistyczne składanie prędkości)

Wyobraźmy sobie dwie identyczne kule lecące (w układzie O) z prędkościami  $V_1$  i  $V_2$  wzdłuż osi X:



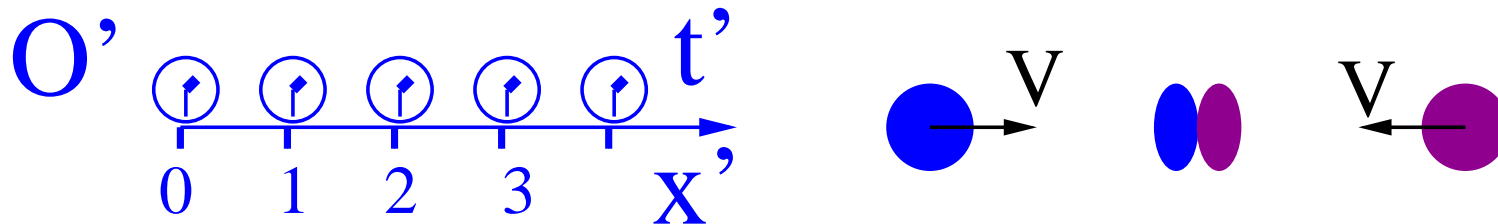
Przyjmijmy, że w którymś momencie ciało 1 dogania ciało 2 i zlepia się z nim. Jaka będzie prędkość ciał po zlepieniu?



Klasycznie byłoby to  $V_c = \frac{V_1 + V_2}{2}$ , co wynikało właśnie z zasady zachowania pędu...

## Pęd cząstki

Przejdźmy do układu odniesienia  $O'$  związanego z powstającym “zlepkiem”.



Ponieważ kule są identyczne z symetrii zagadnienia oczekujemy, że w układzie tym będą miały prędkości początkowe **równe** co do wartości, lecz **przeciwnie skierowane**.

**Wiemy już jednak jak składają się prędkości!**

Prędkości w układzie  $O'$  wyrażają się przez  $V_1$  i  $V_2$ , oraz prędkość  $O$  względem  $O'$  ( $-V_c$ )  
Ze wzoru na składanie prędkości:

$$V = \frac{V_1 - V_c}{1 - V_1 V_c / c^2} \quad \text{i} \quad -V = \frac{V_2 - V_c}{1 - V_2 V_c / c^2}$$

(wartość ujemna prędkości odpowiada zwrotowi przeciwnemu do osi  $X$ )

Rozwiązujemy ten układ równań, dla uproszczenia wprowadzając prędkości względne:

$$\beta_1 = \frac{V_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{V_2}{c}, \quad \beta_c = \frac{V_c}{c}$$



## Pęd cząstki

Ostatecznie otrzymujemy: (pomijając dość żmudne przekształcenia)

$$\beta_c = \frac{\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Prędkość zlepionych kul poruszających się początkowo z prędkościami  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .

Dla symetrii pomnóżmy licznik i mianownik po lewej stronie przez  $\gamma_c$ :

$$\frac{\beta_c \gamma_c}{\gamma_c} = \frac{\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Wartość ułamka nie zmienia się jeśli licznik i mianownik pomnożymy przez tą samą liczbę ( $M$  dla lewej i  $m$  dla prawej strony):

$$\frac{\beta_c \gamma_c M}{\gamma_c M} = \frac{\beta_1 \gamma_1 m + \beta_2 \gamma_2 m}{\gamma_1 m + \gamma_2 m}$$

# Pęd relatywistyczny

Ale  $M$  i  $m$  są dowolne! Możemy zawsze tak dobrać stosunek ich wartości, żeby także liczniki i mianowniki po obu stronach równania były sobie równe:

$$\beta_c \gamma_c M = \beta_1 \gamma_1 m + \beta_2 \gamma_2 m$$

$$\gamma_c M = \gamma_1 m + \gamma_2 m$$

Wychodząc z bardzo ogólnych założeń otrzymaliśmy dwa prawa zachowania!

Symetria + zasada względności + właściwy dobór współczynników  $M$  i  $m$

Uogólniając na dowolną liczbę cząstek w stanie początkowym ( $ini$ ) i końcowym ( $fin$ ):

$$\sum_{i \in ini} \beta_i \gamma_i m_i = \sum_{j \in fin} \beta_j \gamma_j m_j$$

$$\sum_{i \in ini} \gamma_i m_i = \sum_{j \in fin} \gamma_j m_j$$

Czy możemy zidentyfikować poszczególne człony?

# Pęd relatywistyczny

W granicy małych prędkości ( $\beta \ll 1, \gamma = 1$ ) równania te sprowadzają się do

$$c \sum_i \beta_i m_i = \sum_i m_i V_i = \text{const} \quad \text{zasada zachowania pędu}$$
$$\sum_i m_i = \text{const} \quad \text{zasada zachowania masy}$$

Jak poprzednio dochodzimy do wniosku, że relatywistyczne wyrażenie na pęd cząstki to

$$p = m c \gamma \beta = m \gamma V$$

Wprowadzone współczynniki  $m$  są miarą bezwładności ciał i nazywamy je masą.

Jedną z mas mogliśmy ustalić dowolnie - wybór wzorca masy.

Masy pozostałych cząstek można następnie wyznaczyć w oddziaływaniu ze wzorcem (z wyprowadzonych praw zachowania).

# Ruch pod wpływem stałej siły

## Równanie ruchu

Chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie:  $\vec{p} = m \gamma \vec{v} = mc \gamma \vec{\beta}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

W przypadku ruchu prostoliniowego

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} (mc \gamma \beta) \\ &= mc \gamma^3 \frac{d\beta}{dt} \end{aligned}$$

⇒ przyspieszenie maleje jak  $\gamma^{-3}$  !

Rozwiązanie ruchu pod wpływem stałej siły elektrycznej  $F = qE$ :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{qE}{mc} (1 - \beta^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{qE}{mc} dt$$

Całkujemy podstawiając  $\beta = \sin u$ :

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{qE}{mc} \int dt$$

$$\Rightarrow \tan u = \frac{qE}{mc} \cdot t$$

przyjmując, że cząstka spoczywała w  $t = 0$

Tożsamość trygonometryczna:

$$\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1 + \tan^2 u}}$$

# Ruch pod wpływem stałej siły

Otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

gdzie:  $\alpha = \frac{qE}{mc}$

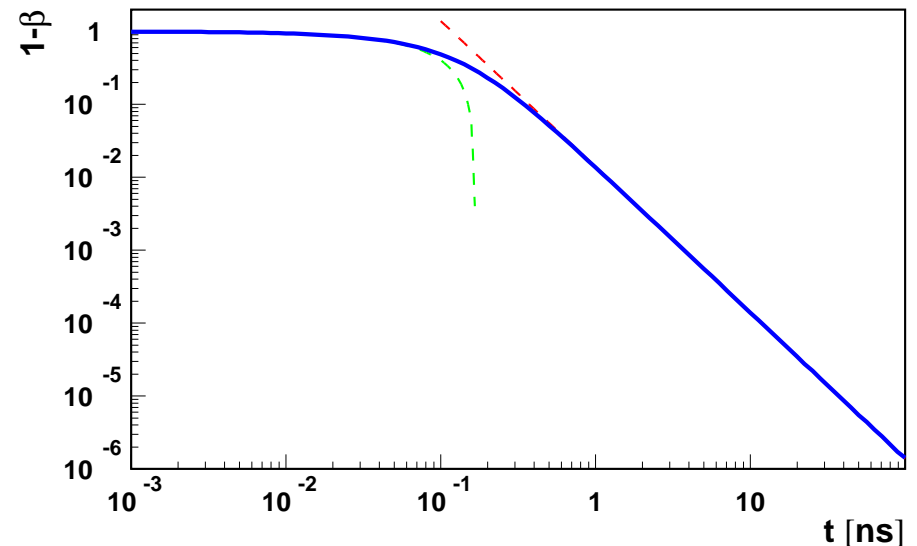
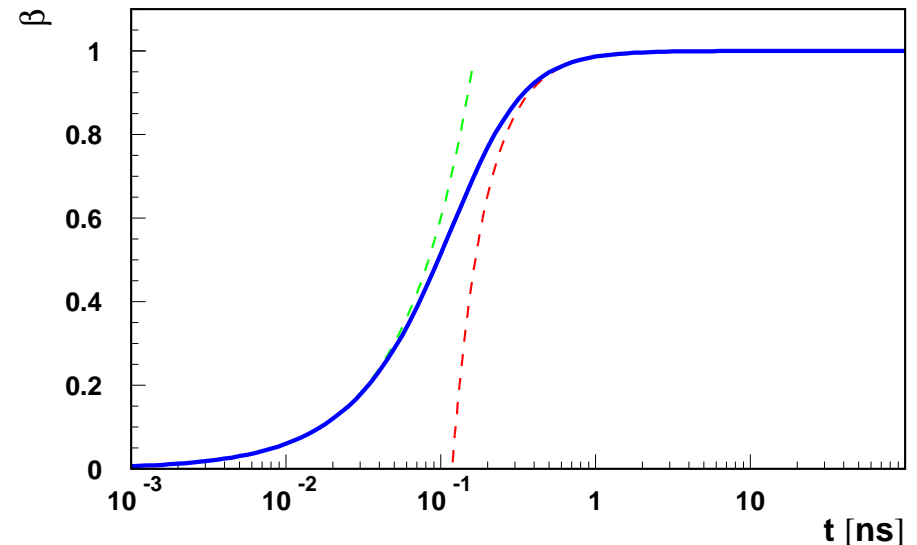
W naszym przykładzie ( $e^-$  w polu  $10 \frac{MV}{m}$ )  
 $\alpha \sim 6 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\alpha^{-1} \sim 0.17 \text{ ns}$

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$1 - \beta(t) \approx \frac{1}{2\alpha^2 t^2}$$

nigdy nie osiągniemy  $\beta = 1$

Ale:  $p(t) = mc \alpha \cdot t$  – rośnie  $\sim t$ !



# Ruch pod wpływem stałej siły

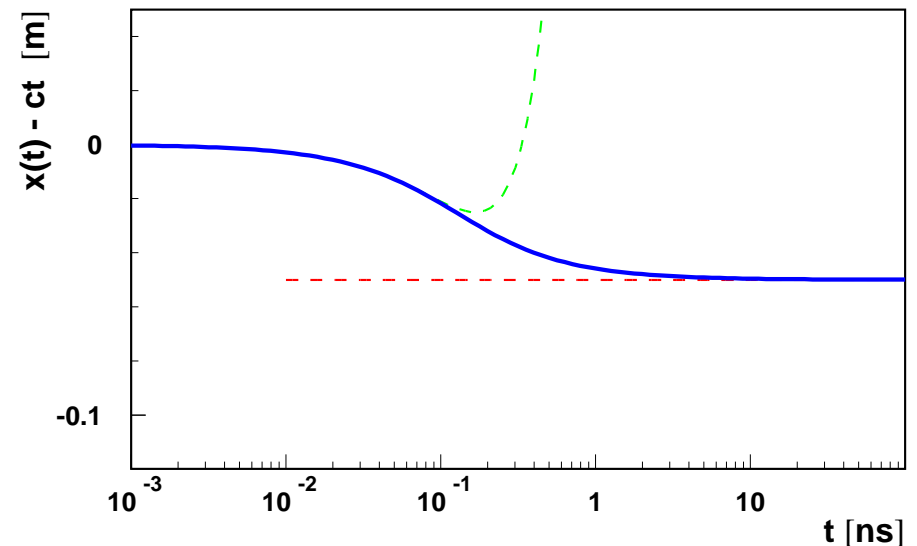
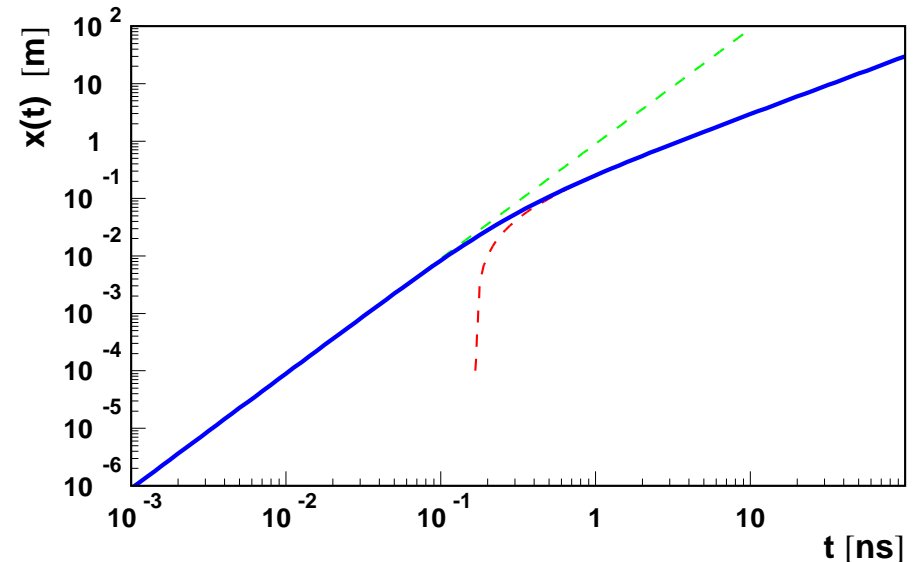
Rozwiązując dalej otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c \alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$
$$\Rightarrow x(t) = \int dx = \frac{c}{\alpha} \int \frac{\alpha t d(\alpha t)}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$
$$= \frac{c}{\alpha} \left( \sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$x(t) \approx ct - \frac{c}{\alpha}$$

W naszym przykładzie:  
światło wyprzedzi elektron tylko o 5 cm !!!



# Energia relatywistyczna

Dla ruchu ciała pod wpływem stałej siły otrzymaliśmy:

$$x(t) = \frac{c}{\alpha} \left( \sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}} \quad \text{gdzie:} \quad \alpha = \frac{F}{mc}$$

Można zauważyć, że:  $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} = \sqrt{1 + (\alpha t)^2}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{mc^2}{F} (\gamma - 1)$$

**Energia kinetyczna** jest równa **pracy** wykonanej przez siłę:

$$E_k(t) = F \cdot x(t) = m c^2 (\gamma(t) - 1)$$

# Energia relatywistyczna

Uzyskaną zasadę zachowania:

$$\sum_i \gamma_i m_i c^2 = \text{const}$$

możemy więc przepisać w postaci:

$$\sum_i [m_i c^2 (\gamma_i - 1) + m_i c^2] = \text{const}$$

$$\sum_i [E_{k,i} + E_{0,i}] = \text{const}$$

Gdzie:  $E_k = m c^2 (\gamma - 1)$  - energia kinetyczna  
 $E_0 = m c^2$  - energia spoczynkowa ciała

Konieczność wprowadzenia energii spoczynkowej wynika z otrzymanej postaci zasady zachowania energii!

Energia całkowita:

$$E = E_k + E_0 = \gamma \cdot m c^2$$



# Energia relatywistyczna

Wyrażenie na energię kinetyczną

$$E_k = m c^2 (\gamma - 1) = m c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

W granicy małych prędkości ( $\beta \ll 1$ ) korzystamy ze wzorów na rozwinięcie w szereg:

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$E_k = m c^2 (\gamma - 1) = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2}m c^2 \beta^2 = \frac{1}{2}m V^2$$

Odtwarzamy klasyczne wyrażenie na energię kinetyczną

# Zasady zachowania energii i pędu

Energia całkowita ciała:

$$E = \gamma \cdot m c^2$$

pęd ciała:

$$\vec{p} = \gamma \cdot m \vec{V}$$

$$c \vec{\beta} = \vec{\beta} \gamma \cdot m c^2$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

Wychodząc z reguły **składania prędkości** (zasada **bezwładności + zasada względności**), wykorzystując **symetrię** rozważanego zagadnienia (zasada **względności**) oraz możliwość doboru współczynników opisujących **bezwładność** ciała (**masę**) otrzymaliśmy:

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i m_i c^2 = const$$

zasada zachowania energii

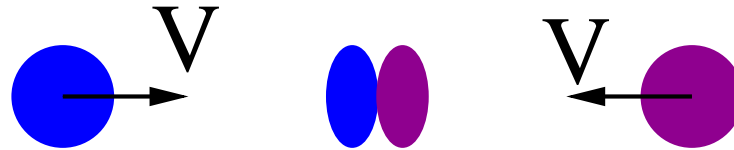
$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i \vec{V}_i = const$$

zasada zachowania pędu

Zasady te wyprowadziliśmy dla procesu zderzenia, ale okazuje się, że są one dużo bardziej ogólne. **Zasady te obowiązują we wszystkich znanych nam procesach!!!**

# Zasady zachowania energii i pędu

Zasada zachowania energii ma jednak swoją “cenę”



Z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned}E_c &= E_1 + E_2 \\M c^2 &= \gamma m c^2 + \gamma m c^2 \\M &= 2 \gamma m\end{aligned}$$

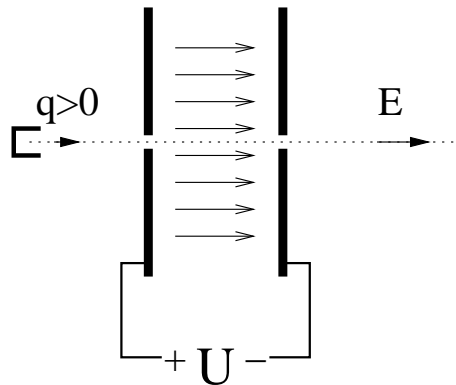
Masa “zlepka” jest większa niż suma mas cząstek!  $M > m + m$

W świecie relatywistycznym przestaje obowiązywać zasada zachowania masy!

Energia kinetyczna zderzających się cząstek została zamieniona na energię wewnętrzną, co jest równoważne ze wzrostem masy (energii spoczynkowej) “zlepka”.

# Energia relatywistyczna

## Jednostki



$$\Delta E = U \cdot q$$

Naturalną jednostką w fizyce cząstek jest **1 elektronowolt**  
**1 eV** - energia jaka zyskuje cząstka o ładunku **1 e** (ładunek elementarny) przy przejściu różnicy potencjału **1 V**.

$$1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} C \Rightarrow 1 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

Jednostki pochodne:

$$1 keV = 10^3 eV, 1 MeV = 10^6 eV, 1 GeV = 10^9 eV.$$

Jednostkę energii możemy też przyjąć za jednostkę masy ( $E = mc^2; c \equiv 1$ )

$$1 eV/c^2 \equiv 1 eV = 1.8 \cdot 10^{-36} kg$$

elektron **e** 511 keV ( $9.1 \cdot 10^{-31} kg$ )

kwark **t** 173 GeV

proton **p** 938 MeV ( $1.7 \cdot 10^{-27} kg$ )

bozon  **$W^\pm$**  80.4 GeV

neutron **n** 940 MeV

**$Z^0$**  91.2 GeV

# Energia relatywistyczna

## Transformacja

Energia spoczynkowa cząstki:

$$E_0 = m c^2$$

Energia całkowita:

$$E = E_0 + E_k = m c^2 \cdot \gamma$$

Wyrażenie na pęd:

$$p = m c \cdot \beta \gamma$$

W układzie własnym cząstki:

$$p_0 = 0$$

Zgodnie z definicją układu środka masy.

Możemy zauważyć, że:

$$E = \gamma E_0$$

$$p c = \beta \gamma E_0$$

Jeśli cząstka porusza się wzdłuż osi  $X$ :

$$E = \gamma E_0$$

$$c p_x = \beta \gamma E_0$$

$$c p_y = 0$$

$$c p_z = 0$$

# Energia relatywistyczna

## Transformacja

Formalnie możemy zapisać:

$$(p_0 = p_{0,x} = p_{0,y} = p_{0,z} = 0)$$

$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_0 + \gamma \beta c p_{0,x} \\ \gamma \beta E_0 + \gamma c p_{0,x} \\ c p_{0,y} \\ c p_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ c p_{0,x} \\ c p_{0,y} \\ c p_{0,z} \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że **energia i pęd** podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji **Lorenza** identycznej z transformacją **czasu i położenia**.

Zamiast transformować niezależnie energię i pęd układu, należy rozważyć **czterowektor energii-pędu**:

$$\mathcal{E} = (E, c\vec{p}) = (E, c p_x, c p_y, c p_z)$$

# Masa niezmiennicza

## Niezmiennik transformacji

Z definicji czynnika Lorentza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$$

$$\gamma^2 E_0^2 - \beta^2 \gamma^2 E_0^2 = E_0^2$$

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

niezależnie od prędkości cząstki,  
czyli niezależnie od układu odniesienia

Wyrażenie:

$$s = M^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorentza  
dla dowolnego układu fizycznego  
(nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$M \equiv \sqrt{s}$  - masa niezmiennicza układu  
(masa inwariantna)

Kluczowa wielkość w opisie zderzeń  
relatywistycznych...

# Energia relatywistyczna

## Transformacja Lorentza

Transformacja Lorentza ma zastosowanie do wszystkich **czterowektorów**:

- czterowektor **położenia** (w czasoprzestrzeni):  $(ct, x, y, z)$
- czterowektor **energii-pędu** (“czteropęd”):  $(E, cp_x, cp_y, cp_z)$
- czteropotencjał **polu elektromagnetycznego**:  $(\Phi, A_x, A_y, A_z)$

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

- różnica dwóch czterowektorów (np. odstęp między zdarzeniami, przekaz czteropędu...)

Niezmiennikiem transformacji Lorentza jest “kwadrat” każdego czterowektora

$$|A^{(4)}|^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2 = A_0^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2$$

- zmiana położenia  $\Rightarrow$  interwał:  $s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- energia-pęd  $\Rightarrow$  masa niezmiennicza:  $M^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$



# Transformacja energii-pędu

## Przykład

Rakieta lecąca w kierunku Ziemi z prędkością  $v = 0.6 c$  wystrzeliwuje w jej kierunku wiązkę protonów o energii  $E = 100 \text{ GeV}$ . Masa protonu  $m = 1 \text{ GeV}/c^2$ .

Jaką energię protonów zmierzy obserwator na Ziemi?

Pęd protonu w układzie rakiety (z definicji masy niezmienniczej):

$$pc = \sqrt{E^2 - m^2 c^4} = 99.9950 \text{ GeV} \quad pc \approx E = 100 \text{ GeV}$$

Współczynniki transformacji:

$$\beta = 0.6 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1.25 \quad \beta\gamma = 0.75$$

Energia w układzie Ziemi:

$$E' = \gamma E + \beta\gamma pc \approx (\gamma + \beta\gamma)E = 2E = 200 \text{ GeV}$$

# Masa niezmiennicza

## Przykład

Jaka jest masa cząstki, która poruszając się z energią kinetyczną  $E_k = 1.6 \text{ GeV}$  ma pęd  $p = 2.4 \text{ GeV}/c$  ?

Z definicji masy niezmienniczej dla pojedynczej cząstki:

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$$

Energię całkowitą wyrażamy przez energię kinetyczną:

$$m^2 c^4 = (m c^2 + E_k)^2 - p^2 c^2$$

$$m^2 c^4 = m^2 c^4 + 2E_k m c^2 + E_k^2 - p^2 c^2$$

Otrzymujemy:

$$m c^2 = \frac{p^2 c^2 - E_k^2}{2E_k} = \frac{(pc + E_k)(pc - E_k)}{2E_k} = \frac{4\text{GeV} \cdot 0.8\text{GeV}}{2 \cdot 1.6\text{GeV}} = 1\text{GeV}$$

# Dynamika relatywistyczna

## Układ środka masy

Energia układu cząstek:  $E = \sum_i E_i$

Pęd układu cząstek:  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

Masa niezmiennicza:  $M$

Jak znaleźć układ środka masy  $\vec{P}^* = 0$  ?

Wiemy, że w CMS  $E^* = M$ ,  $P^* \equiv 0$

Energia i pęd wiążą się z  $E^*$  i  $P^*$  przez transformacje Lorentza:

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \gamma M \\ cP &= \beta \gamma M \end{aligned}$$

Otrzymujemy związki na współczynniki transformacji do układu środka masy:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{cP}{E} \\ \gamma &= \frac{E}{M c^2} \\ \beta \gamma &= \frac{P}{M c} \end{aligned}$$

obowiązują zarówno dla pojedynczej cząstki jak i dowolnego układu cząstek

# Dynamika relatywistyczna

## Przykład

Z jaką prędkością porusza się elektron o energii  $E = 1\text{GeV}$  ( $m_e \approx 0.5\text{MeV}$ )?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{m} = 2000 \quad c \equiv 1$$

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{m^2}{E^2} \ll 1$$

Widać, że  $\beta \approx 1$ , policzmy więc różnicę:

$$1 + \beta \approx 2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} \approx \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{m^2}{2E^2} = 1.25 \cdot 10^{-7}$$

Pęd elektronu:

$$p = \beta\gamma m = \beta E \approx E \quad E - p = (1 - \beta)E \approx 10^{-7}E$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = (\gamma - 1)m = E - m \approx E \quad E - E_k = m = \frac{1}{\gamma}E = 5 \cdot 10^{-4}E$$

Przybliżenie ultrarelatywistyczne:  $\gamma \gg 1$ ,  $E \gg m \Rightarrow E \approx pc \approx E_k$

# Zderzenia relatywistyczne

W przypadku **nierelatywistycznym** zderzenia dzieliliśmy na:

- **zderzenia elastyczne**

Zachowany **pęd** i **energia kinetyczna**.

- **zderzenia nieelastyczne**

Zachowany **pęd**.

Energia kinetyczna zamieniana (częściowo) na inne formy energii (zazwyczaj ciepło).

W przypadku **relatywistycznym** **energia całkowita** i **pęd** są **zawsze zachowane** !

Musimy zmodyfikować klasyfikację zderzeń:

- **Zderzenia elastyczne**  $2 \rightarrow 2$

Cząstki po zderzeniu takie same jak cząstki zderzające się.

W szczególności:  $m'_1 = m_1$  i  $m'_2 = m_2$  np.  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

- **Zderzenia nieelastyczne**

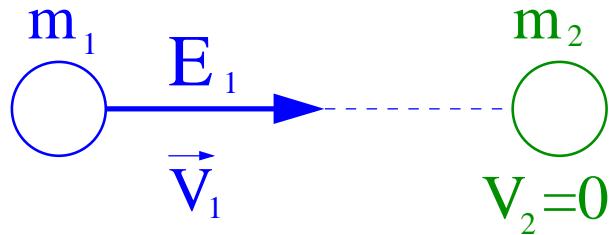
Gdy cząstki w stanie końcowym są inne niż przed zderzeniem.

np.  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

# Zderzenia relatywistyczne

## Rozpraszanie elastyczne

Rozważmy zderzenie “pocisku” o masie  $m_1$  i energii  $E_1$  z “tarczą” o masie  $m_2$ .



Dla układu dwóch ciał mamy: ( $c \equiv 1$ )

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

$$\begin{aligned} M^2 &= E^2 - P^2 = (E_1 + m_2)^2 - P_1^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2 \end{aligned}$$

Transformacja do układu środka masy:

$$\beta = \frac{P}{E} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1 + m_2}$$

$$\gamma = \frac{E}{M} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

$$\beta\gamma = \frac{P}{M} = \sqrt{\frac{E_1^2 - m_1^2}{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

# Zderzenia relatywistyczne

## Rozpraszanie elastyczne

Pęd obu ciał w układzie środka masy:

$$p_1^* = p_2^* = \beta \gamma m_2 = \frac{P}{M} m_2$$

$$(p^*)^2 = \frac{(E_1^2 - m_1^2) m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2}$$

Energie w układzie środka masy:

$$\begin{aligned} E_2^* &= \gamma m_2 = \frac{E}{M} m_2 \\ &= \frac{(E_1 + m_2) m_2}{\sqrt{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1^* &= M - E_2^* \\ &= \frac{E_1 m_2 + m_1^2}{\sqrt{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}} \end{aligned}$$

Jeśli spełniona ma być zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii to tak jak w przypadku klasycznym:

$$p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*$$

W układzie środka masy wartości pędów nie ulegają zmianie.

**Warunek:**  $m_1' = m_1$  i  $m_2' = m_2$  !!!

Rozpraszanie elastyczne

# Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Dla zderzeń cząstek o równej masie:

$$E = E_1 + m$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$$

$$M^2 = E^2 - P^2 = 2 E_1 m + 2 m^2$$

⇒ współczynniki transformacji:

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_1 + m}{2m}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{E_1 - m}{E_1 + m}}$$

$$\beta \gamma = \sqrt{\frac{E_1 - m}{2m}}$$

Energia i pęd obu ciał w układzie środka masy:

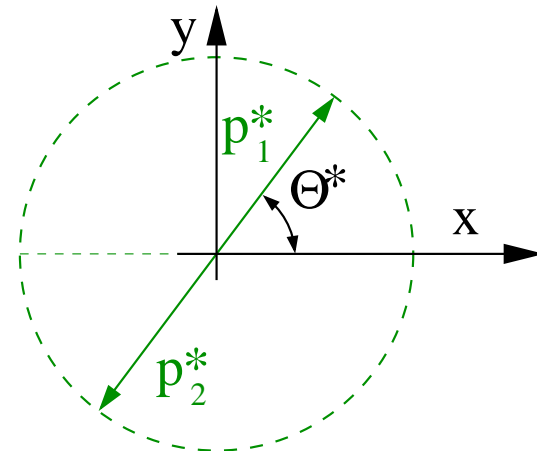
(z transformacji Lorentza dla spoczywającego ciała)

$$p^* = \gamma \beta m$$

$$E^* = \gamma m$$

$$(p^*)^2 = \frac{1}{2} m (E_1 - m)$$

$$(E^*)^2 = \frac{1}{2} m (E_1 + m)$$

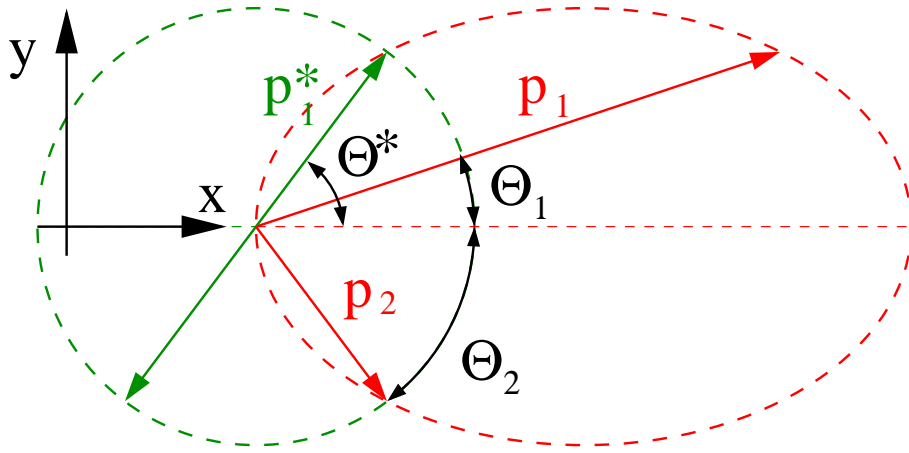




# Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

W układzie środka masy rozproszenie opisuje kąt  $\theta^*$ :



$$p_{1,x}^* = \gamma \beta m \cos \theta^*$$

$$p_{1,y}^* = \gamma \beta m \sin \theta^*$$

$$E_1^* = \gamma m$$

Transformacja do układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma p_{1,x}^* + \gamma \beta E_1^* \\ &= \gamma^2 \beta m (1 + \cos \theta^*) \end{aligned}$$

$$p_{1,y} = \gamma \beta m \sin \theta^*$$

$$\gamma^2 \beta m = \frac{1}{2} P$$

Możliwe wartości  $p_{1,x}$  i  $p_{1,y}$  spełniają:

$$\gamma^2 p_{1,y}^2 + \left( p_{1,x} - \frac{P}{2} \right)^2 = \left( \frac{P}{2} \right)^2$$

⇒ elipsa

transformacja Lorentza “spłaszcza” rozkład pędów wzdłuż kierunku ruchu pocisku.

# Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Kąty rozproszenia mierzone w LAB:

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma(1 + \cos \theta^*)}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma(1 - \cos \theta^*)}$$

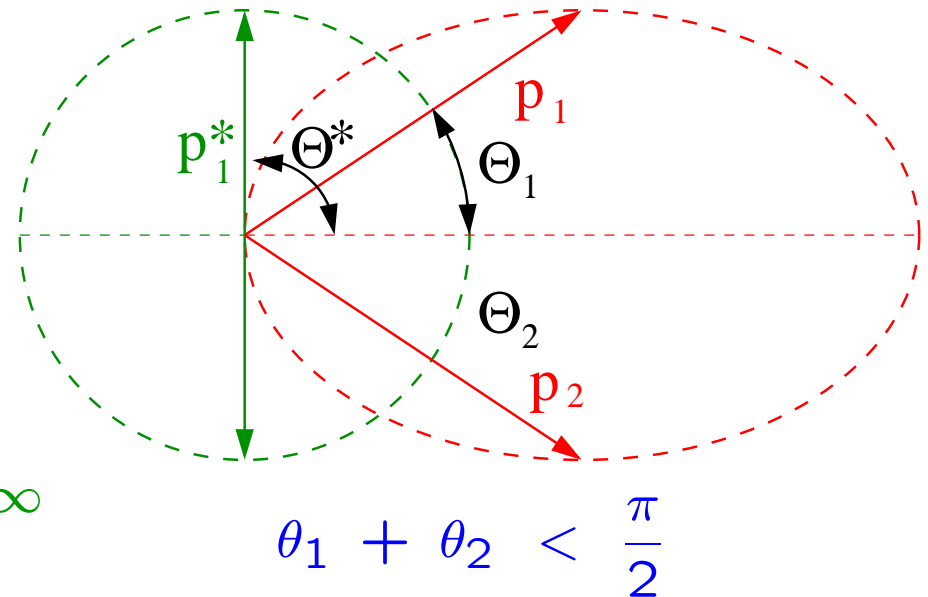
Kąt pomiędzy cząstkami:

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{2\gamma}{\sin \theta^* (\gamma^2 - 1)}$$

$$\rightarrow \frac{2}{\gamma \sin \theta^*} \rightarrow 0 \quad \text{dla } \gamma \rightarrow \infty$$

Dla rozproszenia z  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma} < 1$$



W granicy ultrarelatywistycznej rozproszenie zachodzi pod bardzo małymi kątami

# Zderzenia relatywistyczne

## Przykład

Elektron o energii  $E = 10 \text{ GeV}$  rozprasza się elastycznie na spoczywającym elektronie ( $m_e = 0.5 \text{ MeV}$ ). Jaki **kąt rozproszenia** zostanie zmierzony w układzie laboratoryjnym jeśli w CMS rozproszenie nastąpiło pod kątem prostym?

Masa niezmiennicza układu

$$M = \sqrt{2 E m + 2 m^2} \approx \sqrt{2 E m} = 100 \text{ MeV}$$

Współczynnik transformacji:

$$\gamma = \frac{E + m}{M} \approx \frac{E}{M} = 100 \quad \beta \approx 1 \quad 1 - \beta \approx 5 \cdot 10^{-5}$$

Energia i pęd w CMS:

$$E^* = \gamma m = 50 \text{ MeV} \quad p^* \approx E^*$$

Transformacja do LAB:

$$(p_x^* = 0, p_y^* = p^*)$$

$$p_x = \beta \gamma E^* + \gamma p_x^* \approx \gamma E^*$$

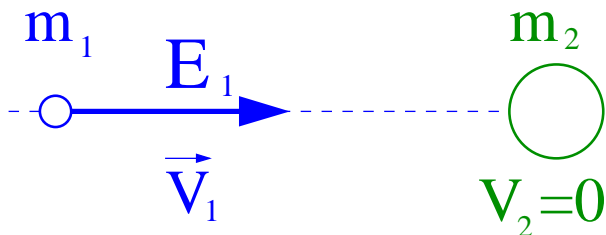
$$p_y = p_y^* \approx E^*$$

$$\tan \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{\gamma} = 0.01 \quad \theta \approx 0.6^\circ$$

# Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 \ll E_1 \sim m_2}$$

Rozważmy zderzenie elastyczne z ciężką  
“tarczą” lekkiego “pocisku” ( $m_1 \ll m_2$ )  
o wysokiej energii ( $E_1 \sim m_2$ )



Sytuacja z jaką często mamy do  
czynienia w zderzeniach fizyki cząstek  
(rozpraszanie elektronów, mionów lub  
neutrino na tarczach jądrowych).

Pomijając wyrazy z  $m_1$  mamy:

$$E = E_1 + m_2$$

$$P = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \approx E_1$$

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2 \\ \approx 2 E_1 m_2 + m_2^2$$

# Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 \ll E_1 \sim m_2}$$

Współczynniki transformacji do układu  
środkła masy: ( $m_1 \rightarrow 0$ )

$$\gamma = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{2E_1m_2 + m_2^2}}$$

$$\beta = \frac{E_1}{E_1 + m_2}$$

$$\beta \gamma = \frac{E_1}{\sqrt{2E_1m_2 + m_2^2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p^* &= \beta \gamma m_2 \\ &= \frac{E_1 m_2}{\sqrt{2E_1m_2 + m_2^2}} \end{aligned}$$

Transformacja rozproszonego pocisku do  
układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma p_{1,x}^* + \gamma \beta E_1^* \\ &= \gamma p^* (\beta + \cos \theta^*) \end{aligned}$$

$$p_{1,y} = p^* \sin \theta^*$$

Możliwe wartości  $p_{1,x}$  i  $p_{1,y}$  spełniają:

$$(\gamma p_{1,y})^2 + (p_{1,x} - \gamma \beta p^*)^2 = (\gamma p^*)^2$$

$\Rightarrow$  elipsa

W granicy  $\beta \rightarrow 1$  ( $E_1 \gg m_2$ ) pocisk  
rozprasza się zawsze “do przodu”!

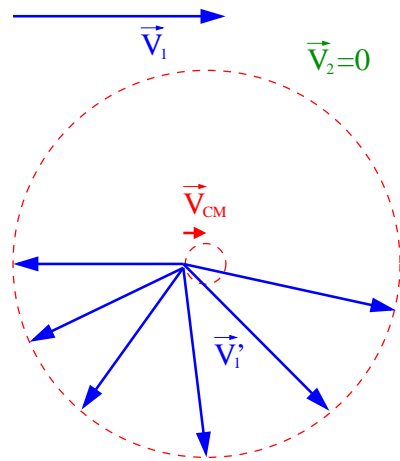
$$(p_{1,x} \geq 0)$$

# Zderzenia elastyczne

## Nierelatywistyczne

W granicy  $m_1 \ll m_2$  tarcza przyjmuje bardzo niewielką część energii pocisku.

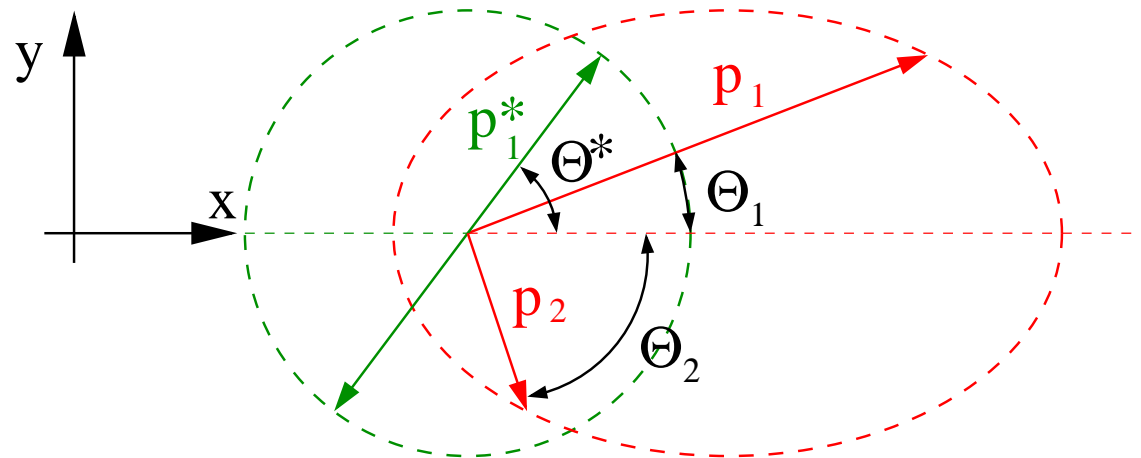
Rozproszony pocisk ma praktycznie niezmienną energię i wartość pędu.



Rysunek dla  $m_2 = 10 m_1$

## Relatywistyczne

Nawet dla  $m_1 \ll m_2$ , jeśli  $E_1 \sim m_2$  pocisk może przekazać tarczy znaczną część swojej energii.



Rysunek dla  $E_1 = 3 m_2$ ,  $m_1 = 0$ .

Dla  $E_1 \gg m_2$  nawet bardzo lekka sonda może “wybić” cząstkę tarczy...

# Zderzenia relatywistyczne

## Przykład

Elektron o energii  $E_e = 50 \text{ GeV}$  rozprasza się na spoczywającym protonie ( $m_p = 1 \text{ GeV}$ ). Jaka jest maksymalna energia jaką może uzyskać proton?

Masa niezmiennicza układu

$$M = \sqrt{2 E_e m_p + m_p^2} \approx \sqrt{2 E_e m_p} = 10 \text{ GeV} \quad 10.05 \text{ GeV}$$

Współczynnik transformacji:

$$\gamma = \frac{E_e + m_p}{M} = 5.1 \quad 5.075 \quad \beta\gamma = \frac{p_e}{M} = 5 \quad 4.975$$

Energia i pęd protonu w CMS:

$$E_p^* = \gamma m_p = 5.1 \text{ GeV} \quad p^* = \beta\gamma m = 5 \text{ GeV}$$

Transformacja do LAB: (maksymalna energia gdy  $p_x^* = p^*$ )

$$E' = \gamma E^* + \beta\gamma p_x^* = \gamma^2 m_p + \beta^2 \gamma^2 m_p \approx 51 \text{ GeV} \quad 50.50 \text{ GeV}$$

# Egzamin

## Przykładowe pytania testowe:

1. W ruchu pod wpływem stałej siły, w przypadku relatywistycznym  
 A energia jest stała       B pochodna pędu jest stała       C przyspieszenie jest stałe  
 D prędkość jest stała
2. Relatywistyczny związek między masą i energią kinetyczną to  
 A  $E_k = mc^2\gamma(1 - \beta)$        B  $E_k = mc^2(\gamma - 1)$        C  $E_k = mc^2\beta\gamma$        D  $E_k = mc^2\gamma$
3. Cząstka o masie  $m = 3 \text{ GeV}/c^2$  ma energię kinetyczną  $E_k = 2 \text{ GeV}$ . Prędkość tej cząstki wynosi  
 A  $0.9c$        B  $0.8c$        C  $0.2c$        D  $0.6c$
4. W przypadku relatywistycznym prędkość układu środka masy  $\beta$  możemy wyrazić jako ( $c = 1$ )  
 A  $\frac{P}{E}$        B  $\frac{P}{M}$        C  $\frac{E}{M}$        D  $\frac{E}{P}$
5. W zderzeniu elastycznym cząstki poruszającej się z  $v \approx c$  ze spoczywającą tarczą o takiej samej masie suma kątów rozproszenia jest  
 A większa niż  $\frac{\pi}{2}$        B dowolna       C mniejsza niż  $\frac{\pi}{4}$        D mniejsza niż  $\frac{\pi}{2}$





**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego