



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Dynamika relatywistyczna

Fizyka I (Mechanika)

Wykład XIV:

- zasady zachowania (przypomnienie)
- cząstki elementarne
- rozpady cząstek
- rozpraszanie nieelastyczne
- foton jako cząstka, efekt Dopplera i efekt Comptona

Dynamika relatywistyczna

Zasady zachowania

Relatywistyczne wyrażenie na pęd cząstki:

$$\vec{p} = m c \gamma \vec{\beta} = m \gamma \vec{V} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

Relatywistyczne wyrażenia na energię cząstki:

energia kinetyczna	$E_k = m c^2 (\gamma - 1)$	nie zachowana
energia spoczynkowa	$E_0 = m c^2$	nie zachowana
energia całkowita	$E = m c^2 \gamma$	zachowana !!!

Dla dowolnego izolowanego układu obowiązują zawsze:

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i m_i c^2 = \text{const} \quad \text{zasada zachowania energii}$$

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i \vec{V}_i = \text{const} \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

Dynamika relatywistyczna

Transformacja

Zamiast rozważać niezależnie energię i pęd układu, wygodnie jest wprowadzić czterowektor energii-pędu:

$$\mathcal{E} = (E, c\vec{p}) = (E, cp_x, cp_y, cp_z)$$

Przy zmianie układu odniesienia, czterowektor energii-pędu podlega transformacji Lorentza identycznej z transformacją dla współrzędnych czasoprzestrzennych zdarzeń.

$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E' + \gamma \beta c p'_x \\ \gamma \beta E' + \gamma c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E' \\ c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix}$$

energia \Leftrightarrow czas
pęd \Leftrightarrow położenie

Dynamika relatywistyczna

Masa niezmiennicza

Niezmiennik transformacji Lorentza, (nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$$M^2 c^4 = s = E^2 - p^2 c^2$$

Dla dowolnego izolowanego układu fizycznego masa niezmiennicza jest zachowana (nie zmienia się w czasie). Wynika to z zasady zachowania energii i pędu.

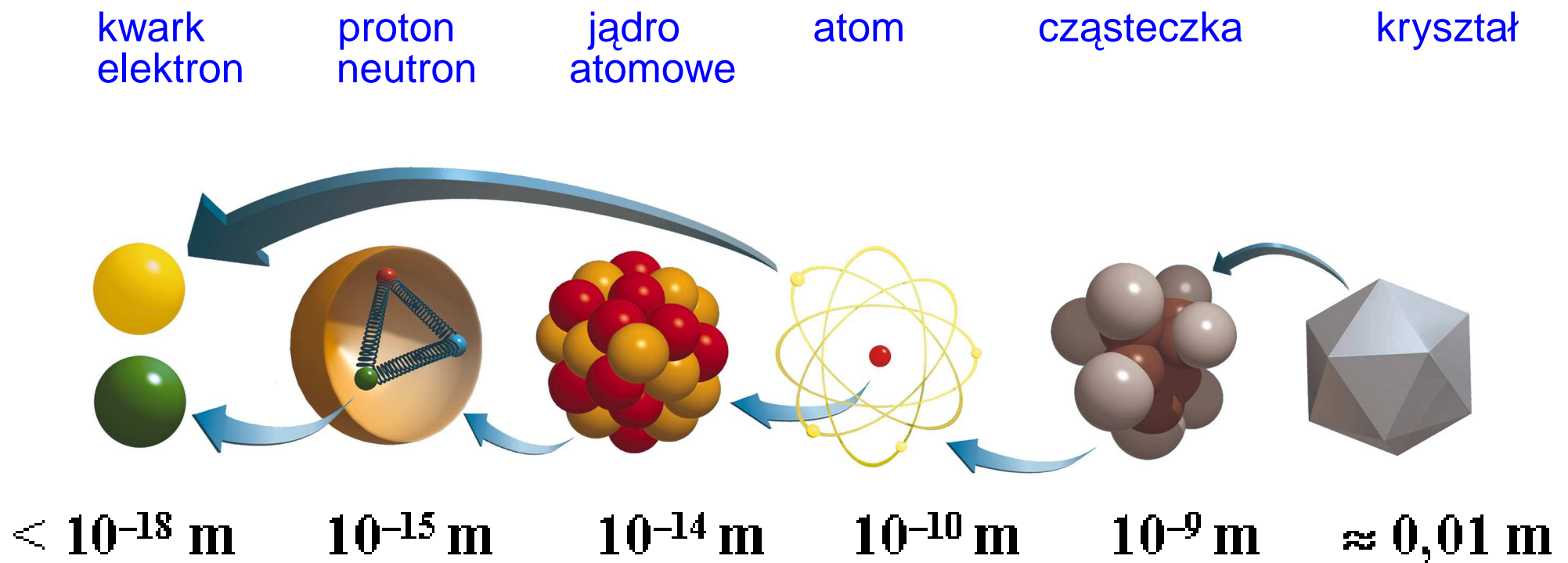
⇒ podstawowe pojęcie w analizie zderzeń relatywistycznych, zwłaszcza w procesach nieelastycznych (produkcja nowych cząstek)

Masa niezmiennicza jest tożsama z energią układu w układzie środka masy ($P^* = 0$). Dla zderzających się cząstek mówimy o energii dostępnej (w układzie środka masy).

Dla pojedynczej cząstki masa niezmiennicza jest tożsama z masą cząstki (energią spoczynkową).

Świat cząstek elementarnych

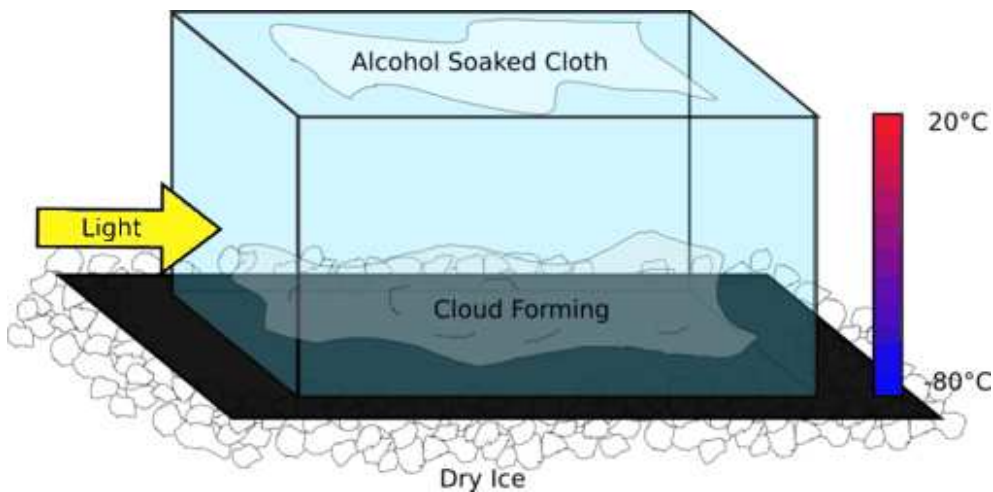
Budowa materii



Świat cząstek elementarnych

Pokaz: komora mgłowa (Komora Wilsona)

Tuż nad dnem komory **pary alkoholu** wchodzi w stan **przechłodzenia**. Gdy przez komorę przejdzie **naładowana cząstka**, na powstałych jonach powietrza następuje **kondensacja** par alkoholu i w rezultacie obserwujemy smugę mgły układającą się wzdłuż **toru cząstki**. Obserwację mgły ułatwia **właściwe oświetlenie**.



Świat cząstek elementarnych

Fermiony

świat “codzienny” zbudowany jest z 3 “cegielek” (elektron oraz kwarki u i d)

Fizyka cząstek znalazła już jednak 12 fundamentalnych “cegielek” materii,
fermionów (cząstek o spinie $1/2$)

	leptony		kwarki	
pokolenie 1	e <i>elektron</i>	ν_e <i>neutrino el.</i>	d <i>down</i>	u <i>up</i>
pokolenie 2	μ <i>mion</i>	ν_μ <i>neutrino mionowe</i>	s <i>strange</i>	c <i>charm</i>
pokolenie 3	τ <i>taon</i>	ν_τ <i>neutrino taonowe</i>	b <i>beauty</i> <i>(bottom)</i>	t <i>top</i> <i>(truth)</i>
ładunek [e]	-1	0	-1/3	+2/3

+ anty-fermiony (kolejnych 12)

Świat cząstek elementarnych

Fermiony

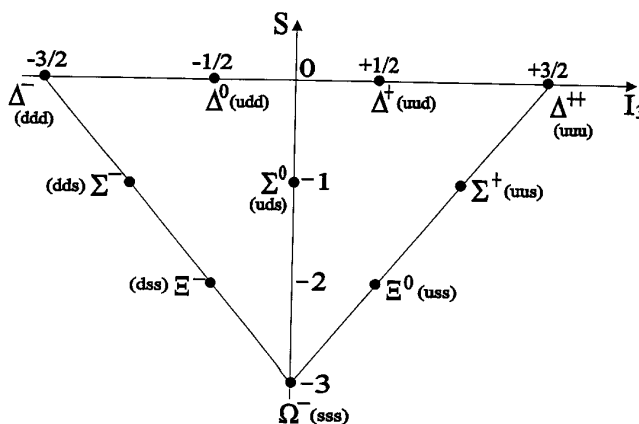
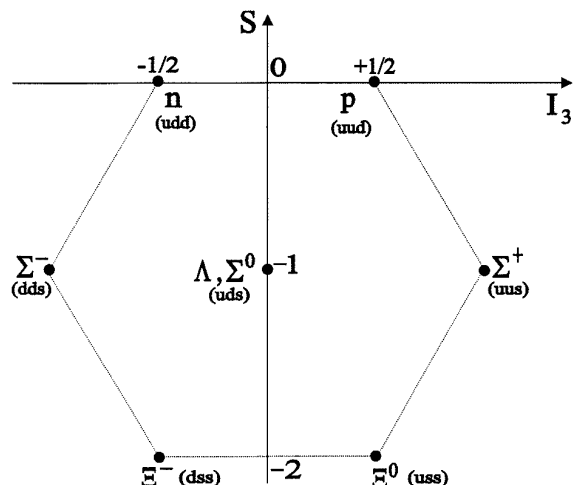
Wszystkie **leptony** obserwujemy jako cząstki **swobodne**.

Kwarki natomiast są “uwięzione” w **hadronach** (cząstkach oddziałujących silnie).

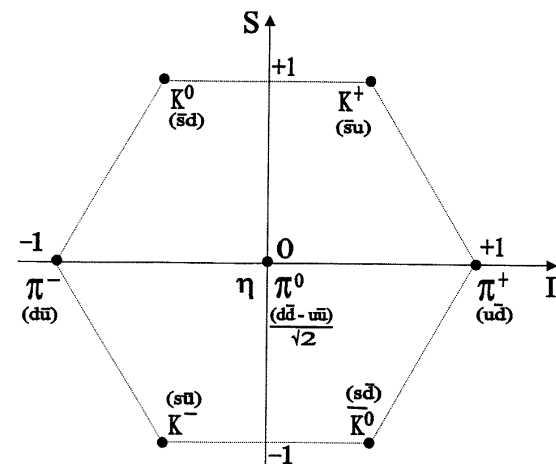
Nukleony składają się z trzech kwarków: proton - **uud**, neutron - **udd**.

Ale odkryliśmy ponadto wiele innych cząstek.

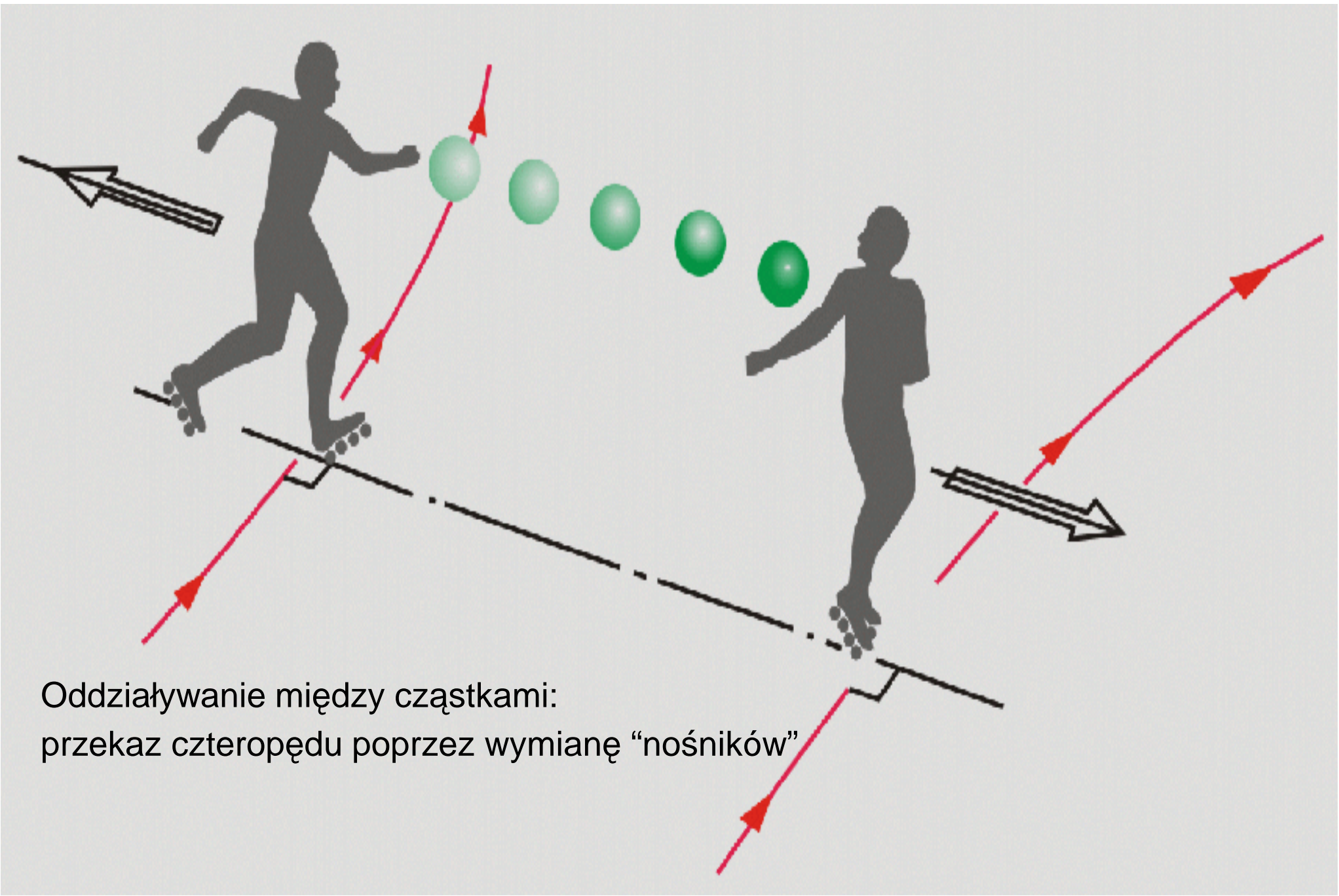
Trzy kwarki tworzą **bariony**:



Para kwark-antykwar **mezony**:



trzy **ant**kwarki \Rightarrow **ant**bariony



Oddziaływanie między cząstkami:
przekaz czteropędu poprzez wymianę "nośników"

Świat cząstek elementarnych

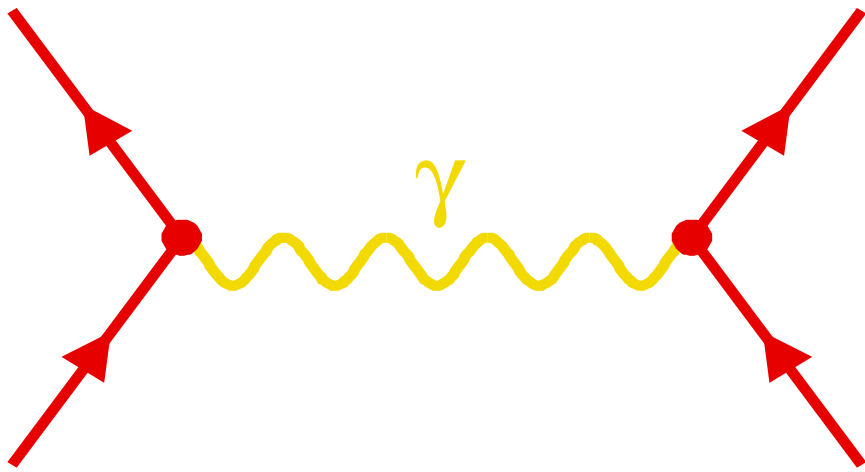
Bozony

“Cegiełki” materii oddziałują ze sobą poprzez wymianę **nośników oddziaływań**

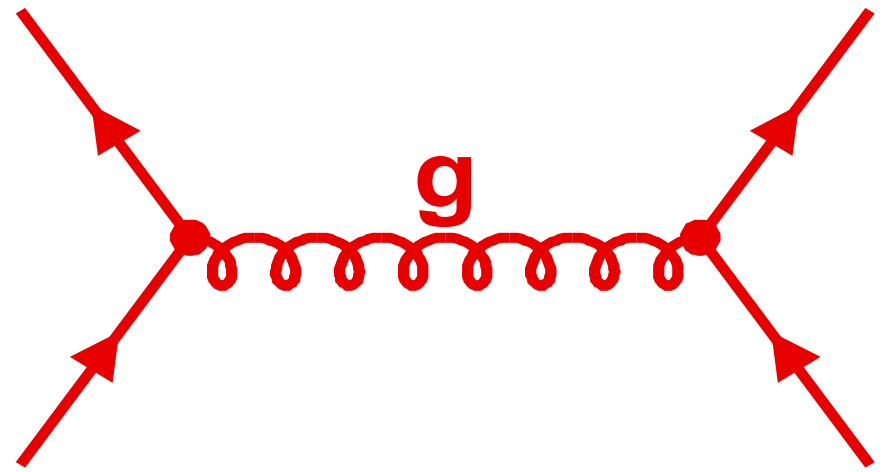
Nośnik przekazuje część energii i/lub pędu jednej cząstki drugiej cząstce

<i>oddziaływanie</i>	<i>źródło</i>	<i>nośnik</i>		<i>moc</i>
grawitacyjne	masa	grawiton	G	10^{-39}
elektromagnetyczne	ładunek	foton	γ	10^{-2}
silne	“kolor”	gluony	g	1
słabe	“ładunek słaby”	“bozony pośredniczące”	W^{\pm}, Z^0	10^{-7}

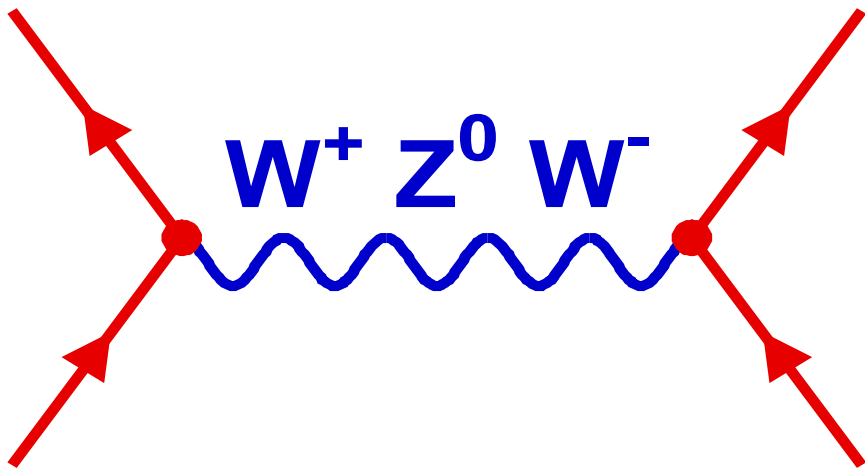
“moc” - przykładowe porównanie wielkości oddziaływań dla dwóch sąsiadujących protonów



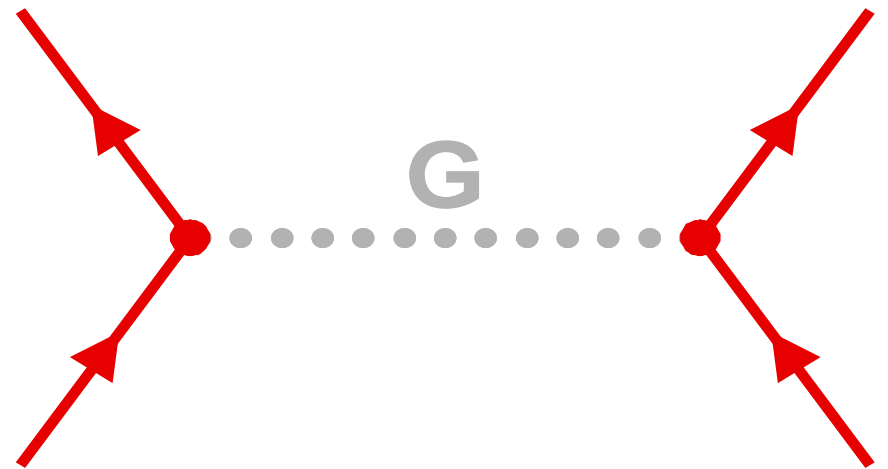
elektromagnetyczne



silne



slabe



grawitacyjne

Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia elastyczne $2 \rightarrow 2$

Cząstki rozproszone takie same jak cząstki zderzające się.

W szczególności: $m'_1 = m_1$ i $m'_2 = m_2$

W zderzeniach cząstek wysokiej energii jest to jednak wyjątek (!)

Zderzenia nieelastyczne

W oddziaływaniach cząstek elementarnych, zwłaszcza przy wysokiej energii, obserwujemy bardzo wiele reakcji, w których powstają nowe cząstki:

- Rozpady cząstek: $a \rightarrow b + c$
- Produkcja pojedynczej cząstki (tzw. “rezonansu”): $a + b \rightarrow c$
- Rozproszenie nieelastyczne dwóch cząstek: $a + b \rightarrow c + d$
jedna z cząstek na końcu może być cząstką stanu początkowego
- Produkcja wielu cząstek: $a + b \rightarrow X$
gdzie X oznacza dowolny stan wielocząstkowy

Rozpady cząstek

Rozważmy rozpad cząstki o masie M na n cząstek o masach m_i ($i = 1 \dots n$).

Masa niezmiennicza przed rozpadem: $\mathcal{M}_i = M$. Masa niezmiennicza po rozpadzie:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f^2 &= \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2 \\ &= \sum_i E_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} E_i E_j - \sum_i p_i^2 - 2 \sum_i \sum_{j>i} \vec{p}_i \vec{p}_j\end{aligned}$$

Dla dowolnej pary cząstek i, j mamy: $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$

$$\begin{aligned}E_i E_j &= \sqrt{(p_i^2 + m_i^2)(p_j^2 + m_j^2)} = \sqrt{(p_i p_j + m_i m_j)^2 + (p_i m_j - p_j m_i)^2} \\ &\geq p_i p_j + m_i m_j \\ \Rightarrow E_i E_j - \vec{p}_i \vec{p}_j &\geq E_i E_j - p_i p_j \geq m_i m_j\end{aligned}$$

$$\text{Ostatecznie: } \mathcal{M}_f^2 \geq \sum_i m_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} m_i m_j = \left(\sum_i m_i \right)^2 = s_{min}$$

Rozpady cząstek

Warunek konieczny, aby mógł mieć miejsce rozpad:

$$M \geq \sum_i m_i = \sqrt{s_{min}}$$

Dla rozpadu dwuciałowego, w układzie cząstki: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

Jaka będzie wartość pędu produktów rozpadu: $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$?

$$\begin{aligned} M^2 &= (E_1 + E_2)^2 - (p_1 - p_2)^2 = (E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2) - (p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2)} + 2p^2 \end{aligned}$$

$$(M^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2p^2)^2 = 4(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2)$$

$$\Rightarrow 4M^2p^2 = (M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2$$

$$p = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M}$$

Rozpady cząstek

Przypadek równych mas: $m_1 = m_2 = m$

$$p = \frac{\sqrt{(M^2 - 4m^2)M^2}}{2M} = \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - m^2} \quad E = \frac{M}{2}$$

W granicy, gdy jeden z produktów rozpadu jest bardzo lekki: $m_1 \ll m_2 \sim M$

$$p \approx \frac{\sqrt{(M^2 - m_2^2)^2}}{2M} = \frac{M}{2} - \frac{m_2^2}{2M} \approx E_1$$

$\frac{m_2^2}{2M}$ - energia “tracona” na odrzut drugiego ciała

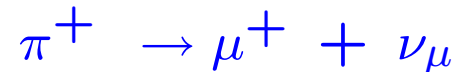
Energie cząstek po rozpadzie **nie są równe** !

Mierząc pęd (lub energię) jednego z produktów rozpadu, możemy wnioskować o **masach** pozostałych cząstek.

Rozpady cząstek

Przykład

Pion π^+ o masie $m_\pi = 140 \text{ MeV}$ rozpada się na mion μ^+ ($m_\mu = 106 \text{ MeV}$) i bezmasowe neutrino:



Pędy produktów rozpadu:

$$p = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi} \approx 30 \text{ MeV}$$

Energie liczymy z definicji masy niezmienniczej:

$$\begin{aligned} m^2 &= E^2 - p^2 \\ \Rightarrow E_\mu &= \sqrt{p^2 + m_\mu^2} \approx 110 \text{ MeV} & E_\mu^k &= 4 \text{ MeV} \\ E_\nu &= \sqrt{p^2 + m_\nu^2} = p = 30 \text{ MeV} & &= E_\nu^k \end{aligned}$$

Neutrino wynosi większość energii kinetycznej!

Rozpady cząstek

Wszystkie cząstki danego rodzaju (np. elektrony lub neutrony) są **identyczne**.

Nie mają też “**pamięci**” - ich własności **nie zależą od czasu**.

Dla cząstek nietrwałych oznacza to, że **prawdopodobieństwo** ich **rozpadu** w zadanym przedziale czasu jest zawsze takie samo.

Rozważmy bardzo mały przedział czasu dt (znacznie mniejszy niż typowy czas rozpadu).

Jeśli próbka zawiera N cząstek to liczba oczekiwanych rozpadów musi być proporcjonalna do N i do dt :

$$dN = N(t + dt) - N(t) = -\alpha N dt$$

Całkując to równanie otrzymujemy:

$$\frac{dN}{N} = -\alpha dt$$

$$\ln N = -\alpha t + C$$

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{prawo rozpadu promieniotwórczego}$$

Rozpady cząstek

Prawdopodobieństwo rozpadu na jednostkę czasu (dla pojedynczej cząstki):

$$p(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

Parametr α wiąże się ze średnim czasem życia cząstki:

$$\tau = \langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \cdot p(t) dt = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Jeśli cząstka o masie m i średnim czasie życia τ (zawsze definiowanym w układzie cząstki) ma w układzie obserwatora O' energię E i pęd p , to obserwator zmierzy:

$$N(t') = N_0 \cdot e^{-\frac{t'}{\gamma\tau}} = N_0 \cdot e^{-\frac{mt'}{E\tau}}$$

$$\langle t' \rangle = \gamma \tau = \frac{E}{m} \tau$$

$$\text{średnia droga swobodna} \quad \lambda = \langle vt' \rangle = \beta \gamma c\tau = \frac{p}{m} c\tau$$

Rozpady cząstek

Przykład

Jaki powinien być pęd mionu produkowanego w górnych warstwach atmosfery ($h = 20 \text{ km}$), żeby mógł dolecieć do powierzchni Ziemi zanim się rozpadnie?

Prawdopodobieństwo rozpadu w funkcji odległości:

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad \lambda = \frac{p}{m} c\tau$$

Prawdopodobieństwo, że mion doleci do powierzchni Ziemi:

$$P(x > h) = \int_h^{\infty} p(x) dx = e^{-h/\lambda}$$

jest formalnie niezerowe dla dowolnego pędu. Duże szanse dolecieć mają jednak tylko miony, dla których $\lambda > h$:

$$\frac{p}{m} c\tau > h \quad \Rightarrow \quad p > \frac{h}{c\tau} m$$

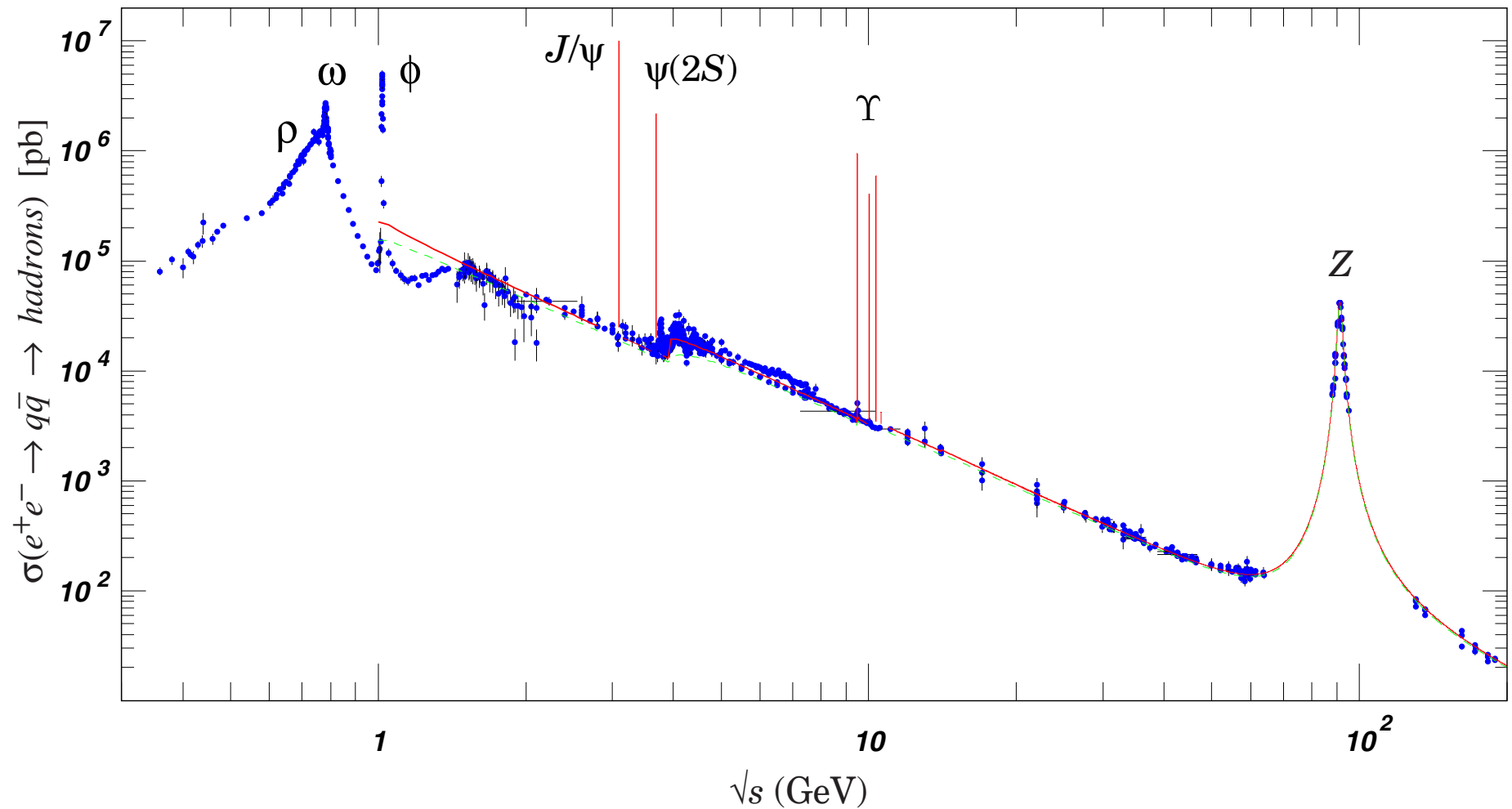
Dla mionu: $\tau = 2.2 \mu\text{s}$ ($c\tau \approx 660 \text{ m}$), $m \approx 100 \text{ MeV}$:

$$p > \frac{h}{c\tau} m \approx 30 \cdot m = 3 \text{ GeV}$$

Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia e^+e^-

Przekrój czynny na produkcję hadronów w funkcji dostępnej energii:

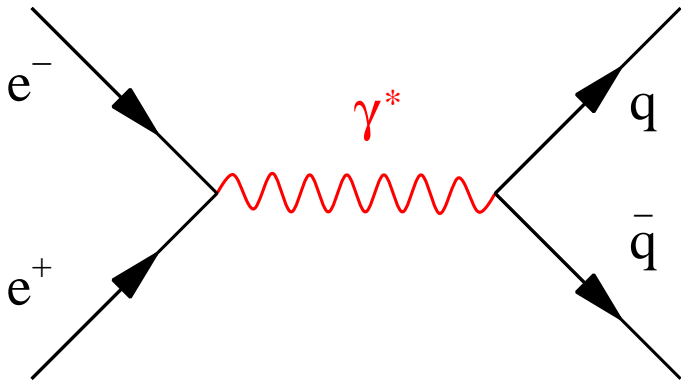


Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia e^+e^-

W całym zakresie zbadanych energii mamy niezerowy przekrój czynny na produkcję kwarków.

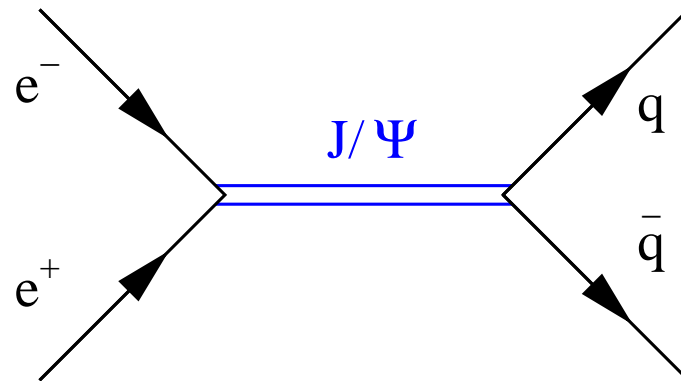
Proces ten opisujemy jako **anihilację** e^+e^- w **wirtualny foton**, który następnie rozpada się na parę $q\bar{q}$



Produkcja rezonansów

Przy pewnych wartościach \sqrt{s} obserwujemy wzrost produkcji kwarków o kilka rzędów wielkości.

Jest to efekt **rezonansowej** produkcji cząstek



Aby w zderzeniu dwóch cząstek powstała jedna, (np: $e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow q\bar{q}$) **masa niezmiennicza** zderzających się cząstek musi być równa **masie cząstki** którą produkujemy ($\sqrt{s} = m_{J/\psi}$)

Zderzenia relatywistyczne

Produkcja rezonansów

Produkcja bozonu Z^0 w eksperymencie L3 (LEP)

$$e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow q\bar{q}$$

Maksimum przekroju czynnego obserwujemy dla

$$\sqrt{s} = m_Z$$

ale ma ono skończoną szerokość:

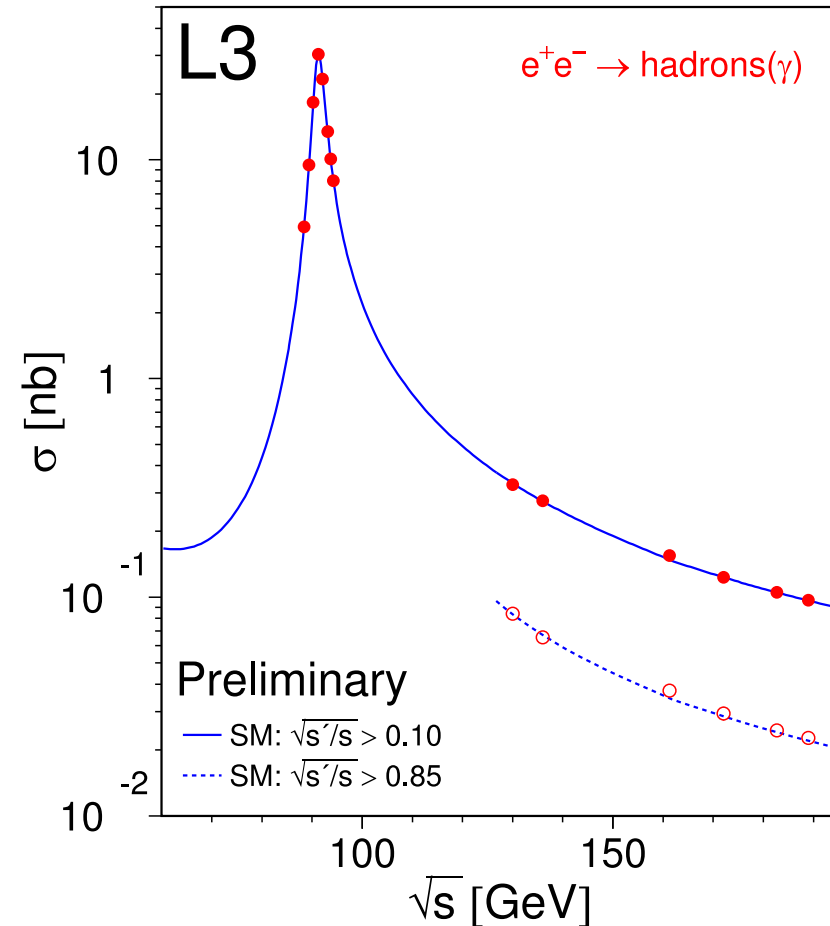
(rozkład Breita-Wignera)

$$\sigma(s) \sim \frac{M_Z^2 \Gamma^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma^2}$$

Szerokość rezonansu wiąże się z czasem życia:

$$\Gamma \cdot \tau = h$$

(zasada nieoznaczoności)



Zderzenia relatywistyczne

Produkcja wielu cząstek

Aby w zderzeniu dwóch cząstek powstały dwie lub więcej nowych cząstek, np:

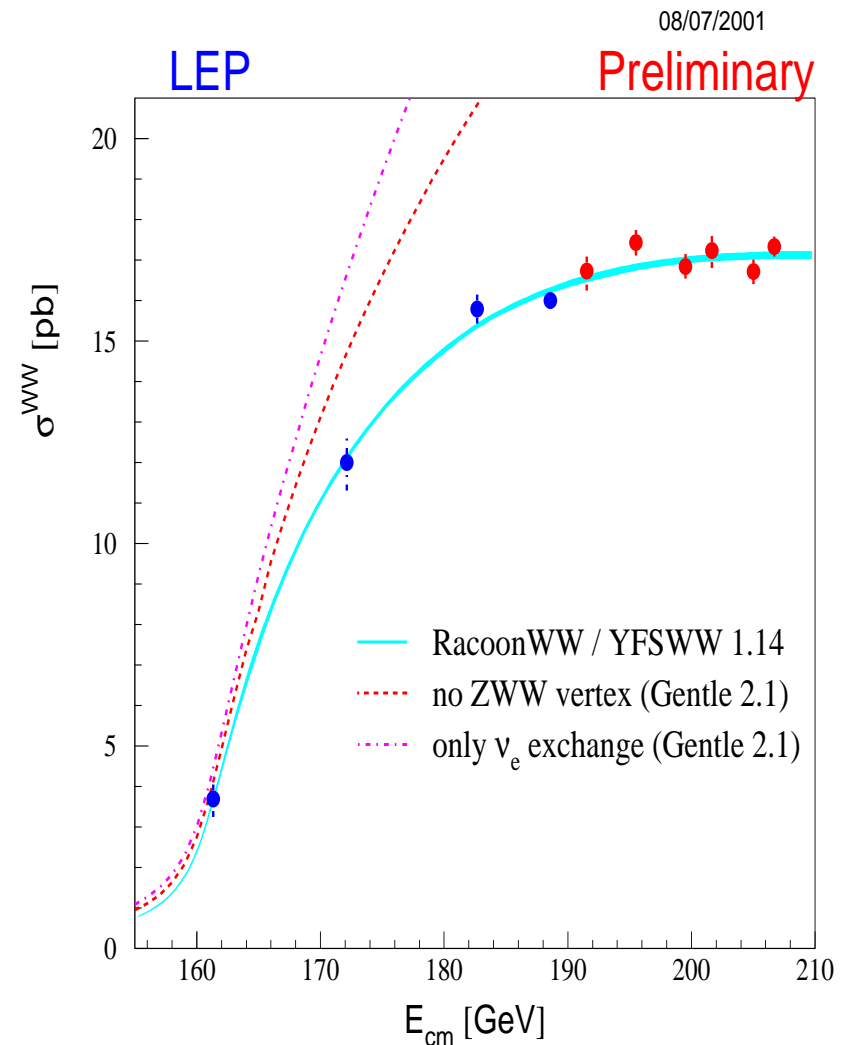


masa niezmiennicza zderzających się cząstek musi być większa lub równa **sumie mas** produkowanych cząstek:

$$\sqrt{s} \geq \sum_i m_i$$

Mierzony przekrój czynny $e^+ e^- \rightarrow W^+ W^- \Rightarrow$

$$\sqrt{s} \geq 2 m_W \approx 160 \text{ GeV}$$



Zderzenia relatywistyczne

Energia dostępna

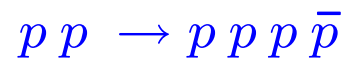
Masę niezmienniczą zderzających się cząstek \sqrt{s} określamy też jako **energię dostępną** w układzie środka masy.

Energia dostępna jest to część energii kinetycznej, która może zostać zamieniona na masę (energię spoczynkową) nowych cząstek.

\sqrt{s} mówi nam ile energii możemy zużyć na wyprodukowanie nowych cząstek.

Przykład

Aby wyprodukować antyproton w reakcji



musimy mieć

$$\sqrt{s} \geq 4 m_p$$

⇐ liczymy wszystkie cząstki w stanie końcowym, także cząstki pierwotne

Zderzenia relatywistyczne

Określoną wartość energii dostępnej możemy uzyskać na różne sposoby:

Zderzenia z tarczą

Cząstka “pocisk” o energii E uderza w nieruchomą tarczę:

$$s = 2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy $E_1 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 2 E_1 m_2$$

Wiązki przeciwbieżne

Zderzenia wiązek o energiach E_1 i E_2 :

$$s = 2 E_1 E_2 + 2 p_1 p_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy $E_1 \sim E_2 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 4 E_1 E_2$$

Dużo wyższe wartości !!!

Przykład

Wiązka protonów o energii 50 GeV ($\approx 50 m_p$)

- na **tarczy** wodorowej (protony): $\sqrt{s} \approx \sqrt{2 E m_p} \approx 10 \text{ GeV} \approx 10 m_p$
- dwie **wiązki przeciwbieżne**: $\sqrt{s} \approx \sqrt{4 E \cdot E} = 2 E = 100 \text{ GeV} \approx 100 m_p$

Energia progowa

Zderzenia z tarczą

Minimalna energia wiązki E_{min} przy której możliwa jest dana reakcja.

Minimalna masa niezmiennicza:

$$s_{min} = \left(\sum_i m_i \right)^2$$

W zderzeniach z nieruchomą tarczą:

$$s_{min} = 2 E_{min} m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

⇒ minimalna energia całkowita pocisku:

$$E_{min} = \frac{s_{min} - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_2} = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_2}$$

⇒ minimalna energia kinetyczna pocisku:

$$E_{k,min} = E_{min} - E_0 = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2 m_2}$$

Energia progowa

Zderzenia z tarczą

Związek minimalnej energii kinetycznej pocisku z przyrostem masy:

$$2 m_2 E_{k,min} = \left(\sum_i m_i \right)_{\text{końcowe}}^2 - \left(\sum_i m_i \right)_{\text{początkowe}}^2$$

⇒ energia kinetyczna pocisku jest “zużywana” na zwiększenie masy układu...

Przykład 1

Produkcja anty-protonów w reakcji $pp \rightarrow ppp\bar{p}$ $\sum_i m_i = 4m_p$ $\Delta M = 2m_p$

$$E_{min} = \frac{(4 m_p)^2 - (m_p^2 + m_p^2)}{2 m_p} = 7 m_p$$

$$E_{k,min} = E_{min} - m_p = 6 m_p \approx 5.63 \text{ GeV}$$

Energia progowa

Wiązki przeciwbieżne

Dla wiązek przeciwbieżnych: dla uproszczenia przyjmujemy $E_1 = E_2, m_1 = m_2$

$$s_{min} \approx 4 E_1 E_2 = 4 E_{min}^2$$

$$E_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sum_i m_i\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i$$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i m_i\right)_{końcowe} - \left(\sum_i m_i\right)_{początkowe} \right]$$

⇒ energia rośnie liniowo z masą produkowanego stanu (na tarczy: kwadratowo)

⇒ dużo niższe energie potrzebne do wytworzenia tego samego stanu

Przykład 1 (c.d.)

Produkcja anty-protonów w reakcji $p p \rightarrow p p p \bar{p}$ $\sum_i m_i = 4 m_p$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2} [4m_p - 2m_p] = m_p \approx 0.94 \text{ GeV} \quad \text{na tarczy: } 5.63 \text{ GeV}$$

Energia progowa

Wiązki przeciwbieżne

Przykład 2

Produkcja par bozonów W^+W^- w zderzeniach elektron-pozyton: $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$

Gdybyśmy chcieli użyć pojedynczej wiązki pozytonów i tarczy $\sum_i m_i = 2 m_W$

$$E_{min} = \frac{(2 m_W)^2 - (m_e^2 + m_e^2)}{2 m_e} \approx \frac{2 m_W^2}{m_e} \approx 25\,300\,000 \text{ GeV}$$

$$m_W = 80.4 \text{ GeV} \quad m_e = 0.000511 \text{ GeV}$$

Tak ogromnych energii nie jesteśmy w stanie wytworzyć !

Dotychczas wiązki pozytonów $E \approx 100 \text{ GeV}$, projektowane $E \approx 1000 - 5000 \text{ GeV}$...

Dla przeciwbieżnych wiązek elektron-pozyton: $s \approx 4 E^2$

$$E_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sum_i m_i\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i = m_W \approx 80 \text{ GeV}$$

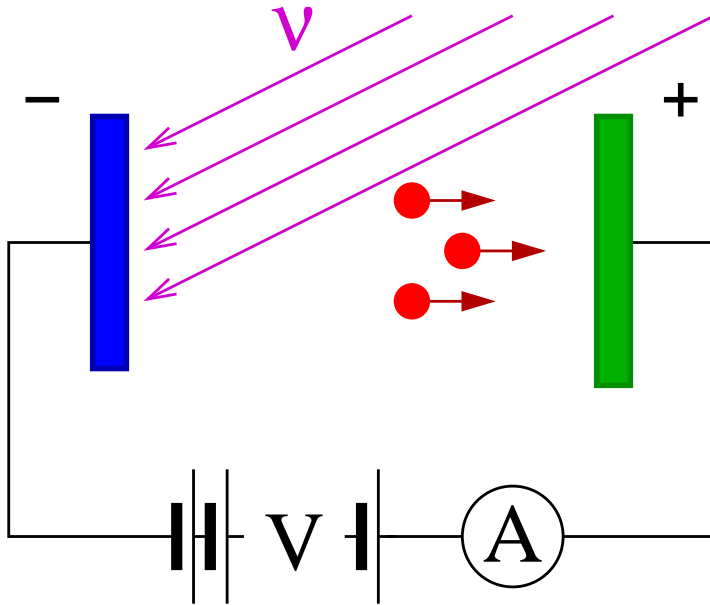
Takie energie to już nie problem...

Odkrycie fotonu

Zjawisko fotoelektryczne

Odkryte przypadkowo przez Hertza w 1887 r.

Światło padając na metalową płytkę powoduje uwalnianie elektronów \Rightarrow przepływ prądu.



Doświadczenia wskazały, że energia uwolnionych elektronów zależy wyłącznie od **częstości światła** (długości fali) i **materiału katody**.

Opis falowy przewidywał, że prąd zależy wyłącznie od natężenia światła, a nie zależy od częstości!

Zjawisko fotoelektryczne wyjaśnił **Einstein (1905)** wprowadzając kwanty światła

FOTONY

Energia foto-elektronów:

$$E_e = E_\gamma - W = h\nu - W$$

W - “praca wyjścia”,
minimalna energia potrzebna do uwolnienia elektronu z metalu.

Odkrycie fotonu

Natura światła

Fotony to **kwanty** promieniowania elektromagnetycznego. Przenoszą **oddziaływania** między cząstkami naładowanymi.

Mają naturę **korpuskularno-falową**:

- **fala** elektromagnetyczna, opisana równaniami Maxwella $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
podlega interferencji, dyfrakcji, załamaniu
- **cząstka** o ustalonej energii i pędzie, ale zerowej masie $m_\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \beta \equiv 1$
może zderzać się z innymi cząstkami, być pochłaniana lub rozpraszana

Im **wyższa częstość** (mniejsza długość fali) promieniowania, tym **wyższa energia** pojedynczego fotonu \Rightarrow **wyraźniejsze efekty korpuskularne**

$$E_\gamma = p_\gamma c = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \lambda \cdot \nu = c$$

W zjawisku fotoelektrycznym, foton “zderza się” z elektronem, $\gamma + e^- \rightarrow e^-$ (proces typu $2 \rightarrow 1$), i przekazuje mu energię konieczną do opuszczenia metalu.

Jednak foton bardzo długo nie był traktowany jak “prawdziwa” cząstka...

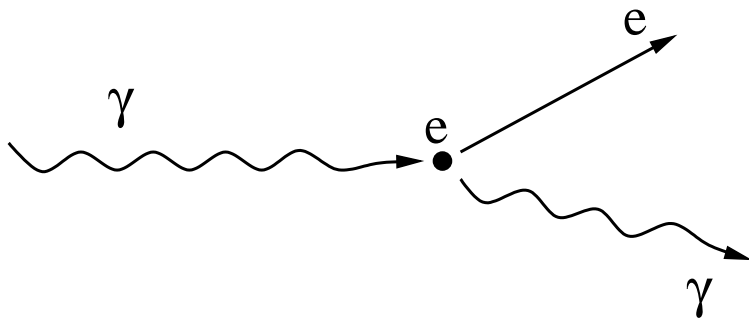
Efekt Comptona

Rozpraszanie fotonów

W wyniku rozpraszania w materii, promieniowanie X stawało się mniej przenikliwe \Rightarrow zmieniało długości fali

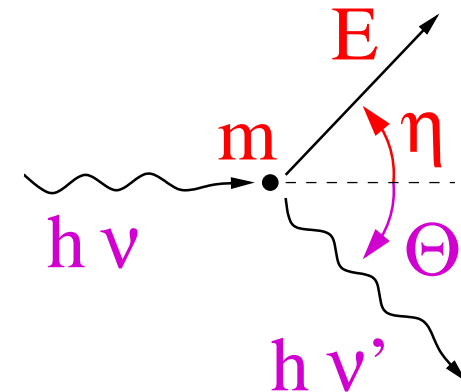
Opis tego zjawiska zaproponował w 1923 roku A.H.Compton.

Fotony promieniowania X rozpraszają się na elektronach w atomie



oddając im część swojej energii.

Relatywistyczne zderzenie dwóch ciał tak samo jak w przypadku cząstek!



Zasady zachowania:

$$E : \quad h\nu + m = h\nu' + E$$

$$p_{\parallel} : \quad h\nu = h\nu' \cos \theta + p \cos \eta$$

$$p_{\perp} : \quad 0 = h\nu' \sin \theta - p \sin \eta$$

Efekt Comptona

Przekształcając otrzymujemy:

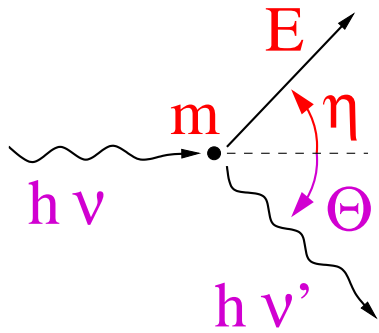
$$\begin{aligned}E &= h(\nu - \nu') + m \\ p \cos \eta &= h(\nu - \nu' \cos \theta) \\ p \sin \eta &= h\nu' \sin \theta\end{aligned}$$

Podnosząc stronami do kwadratu i zestawiając do masy elektronu:

$$\begin{aligned}m^2 &= E^2 - p^2 \\ &= (h(\nu - \nu') + m)^2 - h^2 (\nu - \nu' \cos \theta)^2 - (h\nu' \sin \theta)^2 \\ &= m^2 + h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + 2mh(\nu - \nu') \\ &\quad - h^2\nu^2 + 2h^2\nu\nu' \cos \theta - h^2\nu'^2 \cos^2 \theta - h^2\nu'^2 \sin^2 \theta \\ \Rightarrow m h\nu &= h\nu' (m + h\nu(1 - \cos \theta)) \\ h\nu' &= \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m}(1 - \cos \theta)}\end{aligned}$$

Efekt Comptona

Wzór Comptona



$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m}(1 - \cos\theta)}$$

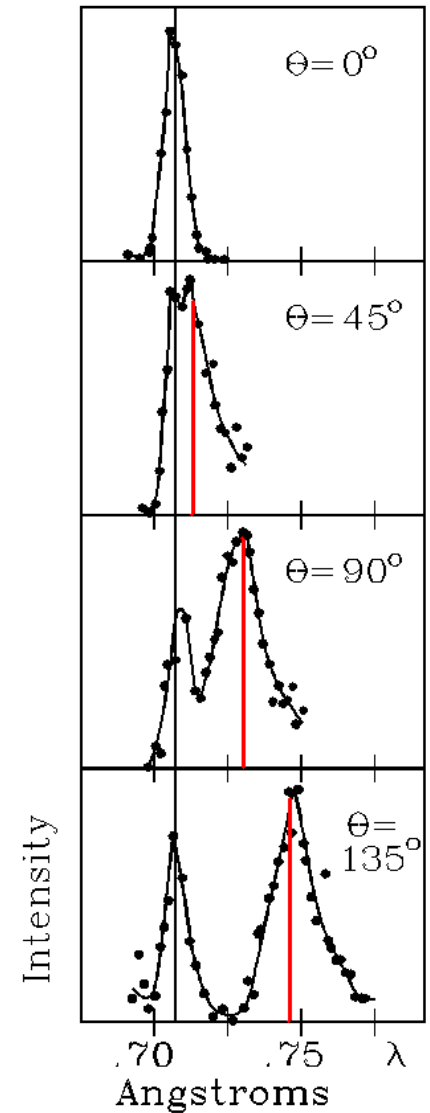
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m c}(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos\theta)$$

Comptonowska długość fali:

$$\lambda_c = \frac{h}{m c} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2.43 \text{ pm}$$

odpowiada przesunięciu przy rozproszeniu pod kątem 90°



Efekt Comptona

Małe energie fotonów

W granicy małych energii fotonu $h\nu \ll m$

$$h\nu' = h\nu \frac{m}{m + h\nu(1 - \cos\theta)} \approx h\nu$$

⇒ foton rozprasza się bez straty energii.

Odpowiada to klasycznemu zderzeniu “pocisku”, m_1 , z dużo cięższą “tarczą”, $m_2 \gg m_1$.

Foton zachowuje energię, ale **zmienia się wektor pędu** (kierunek !)

Przykład: odbicie światła widzialnego
 $h\nu = 1.8 - 3.1 eV$ (700 nm - 400 nm)

Energia rozproszonego elektronu:

$$\begin{aligned} E &= h\nu - h\nu' + m \\ &= \frac{h\nu(h\nu + m)(1 - \cos\theta) + m^2}{h\nu(1 - \cos\theta) + m} \end{aligned}$$

W granicy $h\nu \ll m$:

• energia elektronu:

$$E \approx m$$

• pęd rozproszonego elektronu:

$$p \approx h\nu \sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

Efekt Comptona

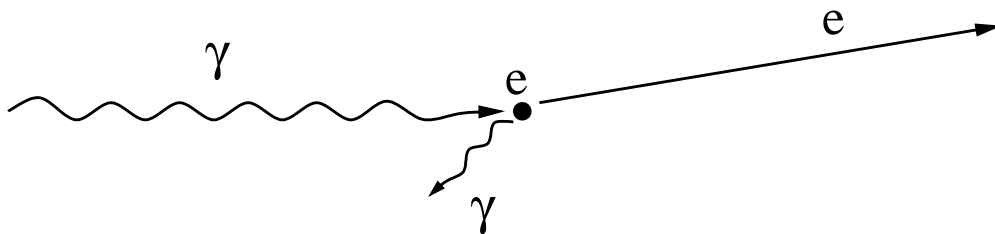
Duże energie fotonów

W granicy dużych energii fotonu $h\nu \gg m$ (przyjmując $\cos \theta \neq 1$, czyli $\theta \neq 0$)

$$h\nu' \approx \frac{m}{1 - \cos \theta} \rightarrow 0$$

$$E \approx h\nu + m$$

⇒ foton przekazuje **spoczywającemu** elektronowi praktycznie całą swoją energię



Odpowiada to klasycznemu zderzeniu ciał o równych masach (zakładając zderzenie centralne i elastyczne)

Dla $h\nu \gg m$ masę elektronu można pominąć - **elektron**, tak jak foton, można traktować jako **cząstkę bezmasową**.

Efekt Comptona

Rozpraszanie do tyłu

W rozpraszaniu na spoczywającym elektronie najniższą energię będzie miał foton rozproszony “do tyłu” ($\cos \theta = -1$):

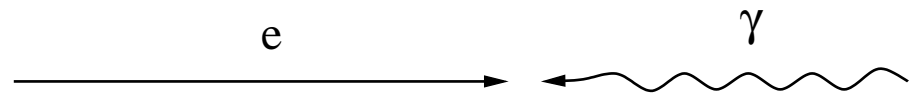
$$h\nu' = \frac{h\nu \cdot m}{2h\nu + m} < h\nu$$

To, że foton zawsze traci energię związane jest jednak z wyborem układu odniesienia!

(układ związany z początkowym elektronem)

Rozpraszanie na wiązce elektronów

Możemy jednak rozważyć rozpraszanie fotonów o energii $h\nu$ na przeciwbieżnej wiązce elektronów o energii $E_e \gg m$.



Transformacja Lorentza do układu elektronu:

$$\gamma = \frac{E_e}{m}$$
$$\beta \approx 1$$

Energia fotonu w układzie elektronu:

$$h\nu^* = \gamma(1 + \beta)h\nu$$
$$\approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu \gg h\nu$$

Photon Collider

Rozpraszanie na wiązce elektronów

Przyjmijmy, że foton rozprasza się “do tyłu” ($\cos \theta = -1$). Energia rozproszonego fotonu w **układzie elektronu**:

$$h\nu^{*'} = \frac{h\nu^* \cdot m}{2h\nu^* + m} \\ \approx \frac{2E_e h\nu \cdot m}{4E_e h\nu + m^2}$$

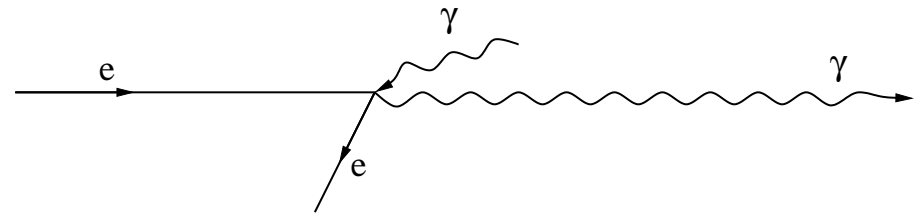
Wracając do **układu laboratoryjnego**:
(transformacja taka sama, bo pęd foton zmienił kierunek)

$$h\nu' \approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu^{*'}$$

Otrzymujemy:

$$h\nu' \approx E_e \cdot \frac{4E_e h\nu}{4E_e h\nu + m^2}$$

Wysokie energia wiązki, $4E_e h\nu \gg m^2$
 \Rightarrow elektron może przekazać fotonowi **większość swojej energii**.



Przykład: dla $E_e = 250\text{GeV}$ i $h\nu = 1\text{eV}$
 $h\nu' \approx 200\text{GeV}$

Efekt Dopplera

Klasycznie mamy dwa przypadki:

Ruchome źródło

Źródło o częstotliwości ν poruszające się z prędkością v względem ośrodka. **Częstość** dźwięku mierzona przez nieruchomego obserwatora

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}$$

Ruchomy obserwator

Obserwator porusza się z prędkością v względem ośrodka i źródła dźwięku

Mierzona **częstość**:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

⇒ należy uwzględnić dylatację czasu

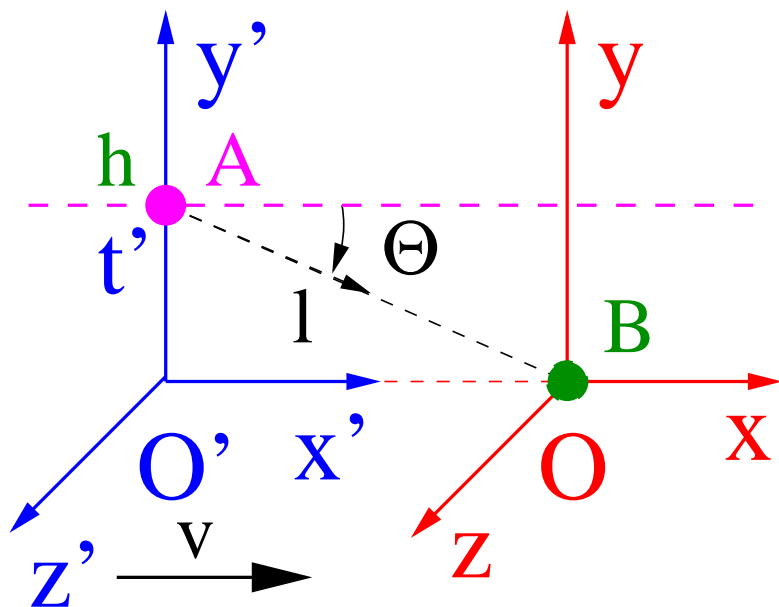
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

⇒ Pełna symetria !

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Efekt Dopplera

Przypadek ogólny



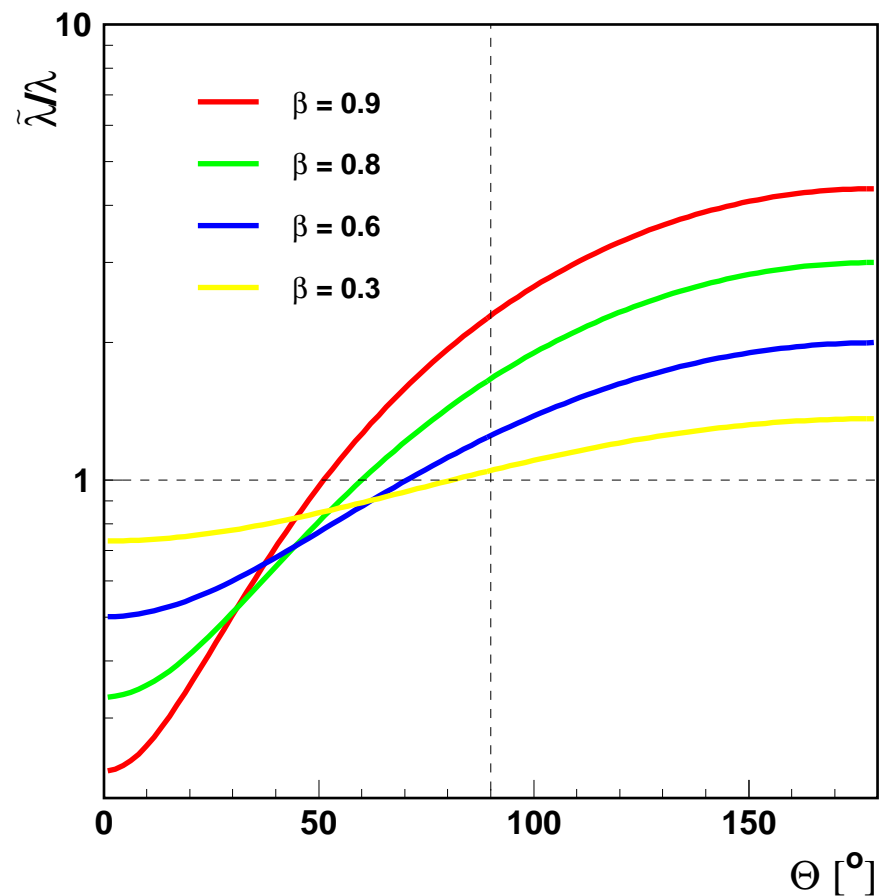
Przesunięcie długości fali:

mierzona $\tilde{\lambda}$
emitowana λ

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \frac{\tilde{T}}{T} = \gamma(1 - \beta \cos \Theta)$$

Θ - rejestrowany w O kąt lotu fotonu (!)

$(\pi - \Theta)$ - kierunek obserwacji



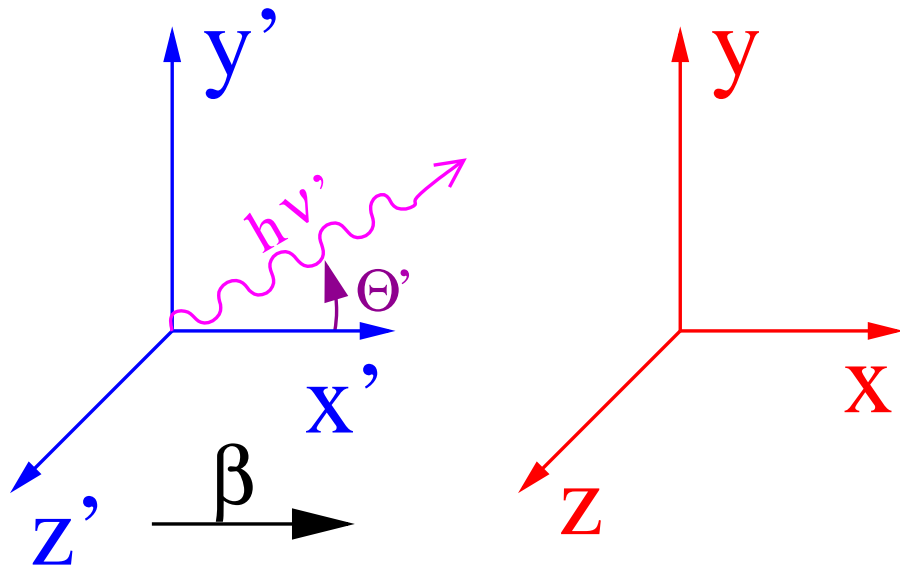
Zmiana częstości także dla $\Theta = 90^\circ$!!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

Efekt Dopplera

Alternatywne podejście

Wyrażenia na **relatywistyczny efekt Dopplera (dla światła)** wynikają wprost z **transformacji Lorentza** !



W układzie O' foton emitowany jest pod kątem θ' do osi X' :

$$\begin{aligned} E' &= h\nu' \\ c p'_x &= h\nu' \cos \theta' \\ c p'_y &= h\nu' \sin \theta' \\ c p'_z &= 0 \end{aligned}$$

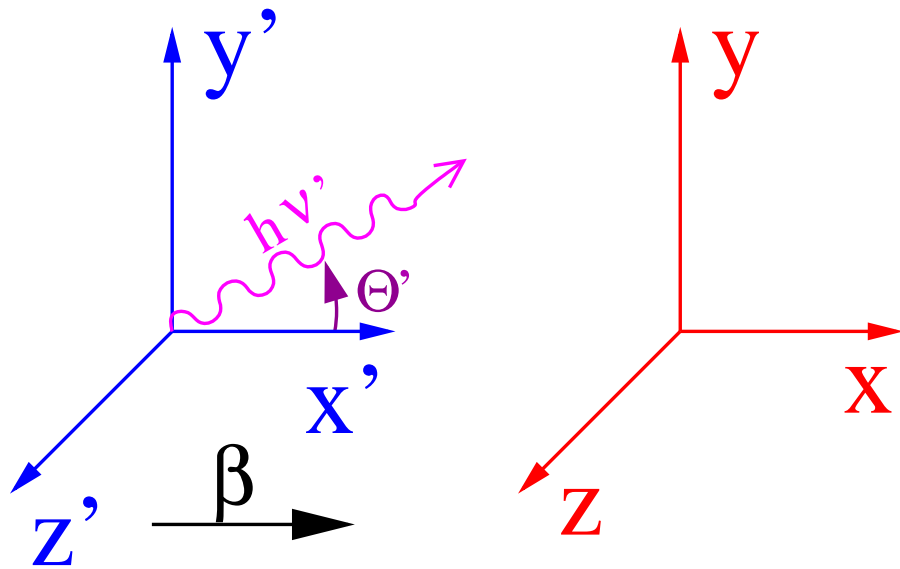
W układzie O , z transformacji Lorentza:

$$\begin{aligned} h\nu = E &= \gamma E' + \beta \gamma p'_x \\ &= h\nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta') \end{aligned}$$

Efekt Dopplera

Alternatywne podejście

Wyrażenia na **relatywistyczny efekt Dopplera (dla światła)** wynikają wprost z **transformacji Lorentza** !



Otrzymujemy:

$$\nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta')$$

Dla $\theta' = 0$ mamy:

$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

częstość (energia) rośnie

Dla $\theta' = \pi$ mamy:

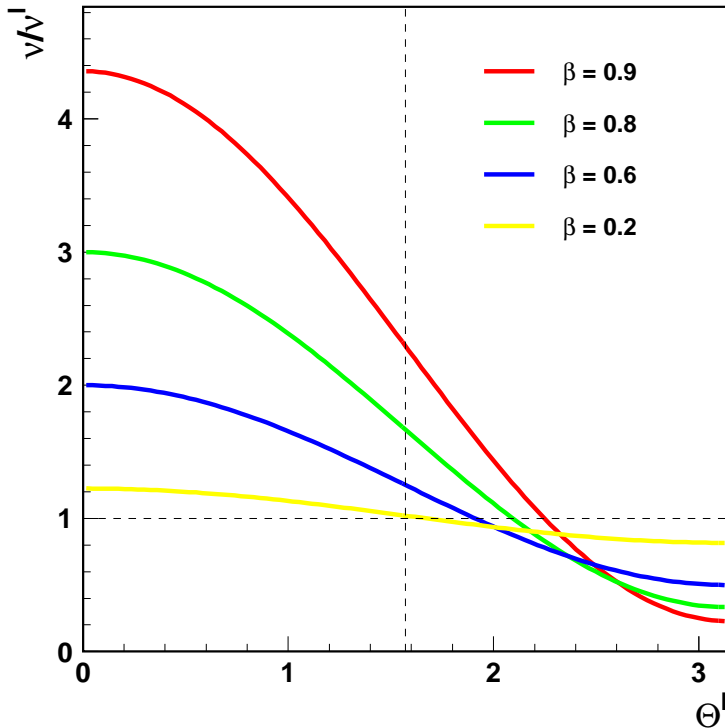
$$\nu = \nu' \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

częstość (energia) maleje

Efekt Dopplera

Rozkłady kątowe

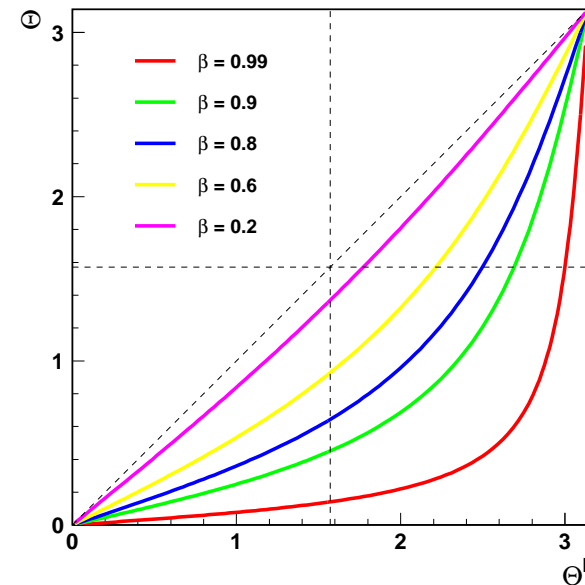
Zależność częstości od kąta **emisji**



Dla $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nu = \gamma \nu' > \nu'$
 poprzeczny efekt Dopplera

Obserwowany kąt lotu fotonu:

$$\cos \theta = \frac{p_x}{E} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$$



Dla $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = \beta \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

Izotropowe promieniowanie szybko poruszającego się ciała jest skolimowane w kierunku ruchu...

Efekt Dopplera

Rozkłady kątowe

Mamy:

$$\nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta')$$

Możemy jednak zastosować odwrotną transformację Lorentza ($\beta \Leftrightarrow -\beta$)

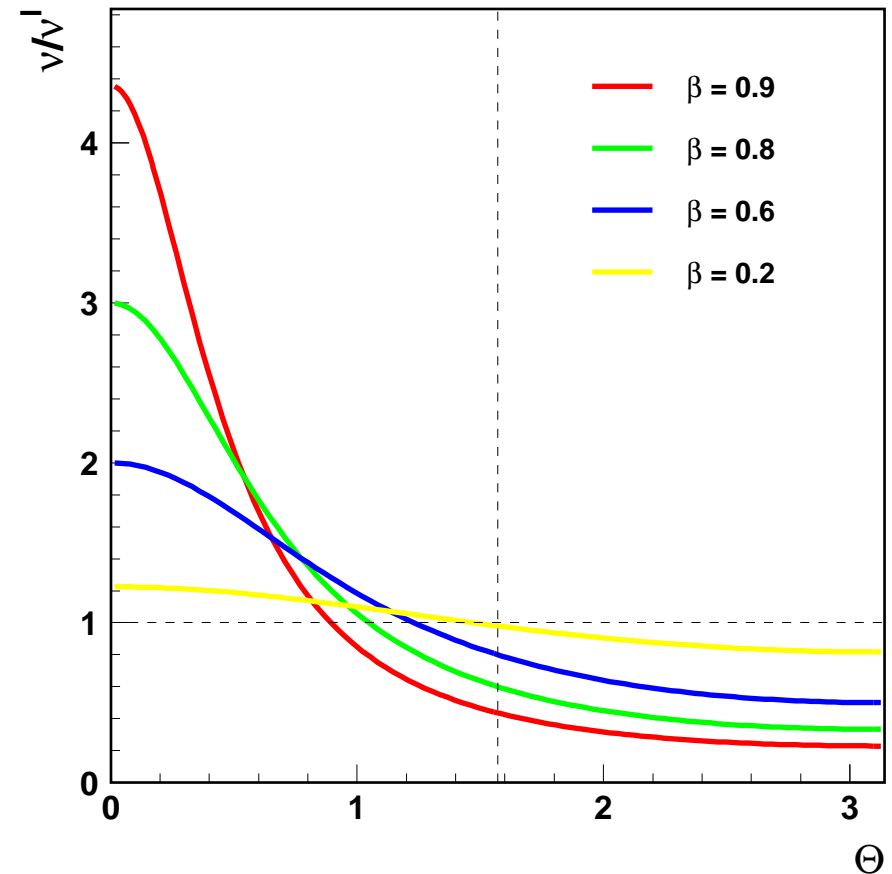
\Rightarrow energia w funkcji kąta **detekcji**:

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$$

Fotony rejestrowane pod kątem $\theta = \frac{\pi}{2}$ mają

częstość: $\nu = \frac{\nu'}{\gamma} < \nu'$!!!

Zależność częstości od kąta **detekcji**



Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Która z cząstek nie jest cząstką elementarną
 A foton B elektron C neutrino D proton
2. W zderzeniach nieelastycznych, w przypadku relatywistycznym, zmienia się
 A masa niezmiennicza układu B energia całkowita układu C pęd układu
 D masa spoczynkowa cząstek
3. Cząstka o masie M może rozpaść się na dwie cząstki o masach m_1 i m_2 jeśli
 A $M^2 \geq m_1^2 + m_2^2$ B $M^2 = m_1^2 + m_2^2$ C $M \geq m_1 + m_2$ D $M = m_1 + m_2$
4. Energia dostępna w zderzeniach przeciwbieżnych wiązek elektronów o energiach 1 GeV i 9 GeV wynosi
 A 5 GeV B 10 GeV C 8 GeV D 6 GeV
5. W opisie rozpraszania Comptona pomijamy
 A energię wiązania elektronu B pęd fotonu C masę elektronu D energię fotonu



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego