Imię i Nazwisko: ..............................................................

Nr. albumu: ......................... Grupa ćwiczeniowa:...........

Fizyka I (2013/2014)
Kolokwium 18.11.2013
**Pytania testowe (B)**

Na każde pytanie jest dokładnie jedna prawidłowa odpowiedź. Należy ją zaznaczyć stawiając czytelny znak **X** w odpowiedniej kratce. Otoczenie zakreślonej kratki kółkiem anuluje odpowiedź. Ponownego wyboru anulowanej wcześniej odpowiedzi można dokonać czytelnie wypisując odpowiednią literę przy numerze pytania. Za dobrą odpowiedź uzyskuje się 1 punkt, za złą -0.5 punktu.

1. Matematycznie przyspieszenie chwilowe odpowiada

   [A] granicy zmian prędkości dla $\Delta t \to 0$ [B] pochodnej prędkości średniej po czasie
   [C] pochodnej położenia po czasie [X] pochodnej prędkości chwilowej po czasie

2. Samochód startujący ze stałym przyspieszeniem osiąga 90 km/h w ciągu 8 sekund. Jaką drogę pokonuje w tym czasie?

   [X] 100 m [B] 90 m [C] 180 m [D] 360 m

3. Przyspieszenie w ruchu harmonicznym zależy liniowo od

   [A] prędkości [B] częstości [C] czasu [X] położenia

4. Praca siły potencjalnej zależy od

   [A] czasu [B] toru [X] przesunięcia [D] prędkości

5. Pocisk o masie $M$ uderza centralnie z prędkością $\vec{v}$ w nieruchomą tarczę o masie $m \ll M$. Zakładając, że zderzenie jest elastyczne, prędkość tarczy po zderzeniu wyniesie

   [A] $\vec{v}' \approx \vec{v}$ [B] $\vec{v}' \approx 0$ [X] $\vec{v}' \approx 2\,\vec{v}$ [D] $\vec{v}' \approx -\vec{v}$ 35380

# Kolokwium I z Mechaniki – 18 listopada 2013

## Grupa B

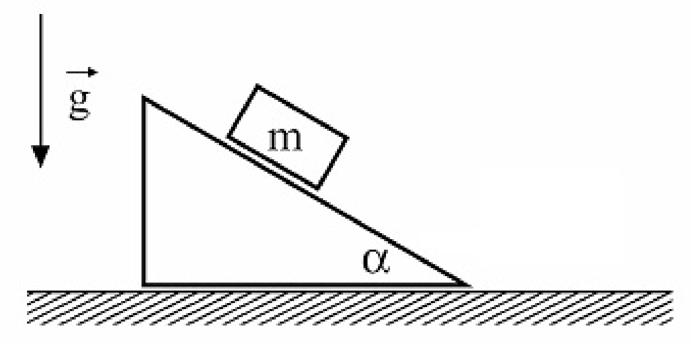
### Zadanie 1

Ciężarówka pędzi poziomą szosą z prędkością $v_0$ = 20 m/s na powierzchni Ziemi ($g$ = 10 m/s$^2$). Niestety droga kończy się nagle poprzeczną krawędzią za którą jest przepaść o zboczu nachylonym pod stałym kątem $\alpha = 60°$ do poziomu. Policz:

1. równanie toru spadającej ciężarówki przyjmując, że początkowo poruszała się ona po szosie w kierunku dodatnim osi $x$, środek kartezjańskiego układu odniesienia znajduje się na wyżej wymienionej krawędzi, a oś $y$ skierowana jest pionowo ze zwrotem ku górze;
2. współrzędne punktu uderzenia spadającej ciężarówki o zbocze: $x_u$ i $y_u$;
3. czas spadania ciężarówki, $t_u$;
4. składową prostopadłą do zbocza wektora prędkości rozbijającej się ciężarówki, $v_n$.

### Zadanie 2

Na równi pochyłej nachylonej pod kątem $\alpha$ spoczywa klocek. Współczynnik tarcia statycznego klocka o równię wynosi $\mu$. Z jakim przyspieszeniem powinna poruszać się równia poziomo po stole (określić zwrot i wartość), żeby klocek zaczął się względem niej przemieszczać w górę?




### Zadanie 3

Na wózek o masie $M$ =20 kg, poruszający się poziomo z prędkością $v$ = 1 m/s położono paczkę o masie $m$ = 10 kg w taki sposób, że przed zetknięciem się z wózkiem nie miała ona poziomej składowej prędkości. Po zetknięciu się z wózkiem paczka przez pewien czas przesuwała się względem wózka po jego powierzchni aż do zatrzymania. Od tego czasu wózek i paczka poruszały się razem. Znaleźć:

1. całkowitą pracę sił tarcia pomiędzy wózkiem i paczką (tzn. sumę pracy siły tarcia działającej na wózek i pracy siły tarcia działającej na paczkę),
2. drogę przebytą przez paczkę względem wózka od momentu zetknięcia się jej z wózkiem do jej zatrzymania.

Współczynnik tarcia dynamicznego pomiędzy wózkiem i paczką wynosi $\mu$ = 0,3, przyspieszenie ziemskie $g$ = 10 m/s$^2$. Założyć, że wózek porusza się po podłożu bez oporów oraz, że przez cały czas kontaktu paczki z wózkiem siła nacisku paczki jest stała.

**Rozwiązanie Zad. 1.**
Równanie ruchu spadającej ciężarówki:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2}$$

Stąd po standardowej procedurze otrzymujemy równanie toru spadającej ciężarówki:

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Równanie zbocza przepaści:

$$y(x) = -tg\alpha \cdot x$$

Punkt wspólny (współrzędna *x* punktu uderzenia ciężarówki w zbocze):

$$-\frac{gx_u^2}{2v_0^2} = -tg\alpha \cdot x_u$$

Rozwiązanie $x_u = 0$ nie interesuje nas, więc:

$$x_u = \frac{2v_0^2 \cdot tg\alpha}{g} \quad \text{oraz} \quad y_u = y(x_u) = -\frac{gx_u^2}{2v_0^2} = -tg\alpha \cdot x_u = -\frac{2v_0^2 \cdot tg^2\alpha}{g}$$

Czas spadania ciężarówki najprościej policzyć znajdując czas osiągnięcia położenia $x_u$ w ruchu poziomym:

$$t_u = \frac{x_u}{v_0} = \frac{2v_0 \cdot tg\alpha}{g}$$

Wektor prędkości ciężarówki:

$$\vec{v}(t) = [v_0; -gt]$$

Wektor prędkości w chwili uderzenia w zbocze:

$$\vec{v}(t_u) = [v_0; -gt_u] = [v_0; -2v_0 \cdot tg\alpha]$$

Składową prostopadłą do zbocza wektora prędkości rozbijającej się ciężarówki policzymy biorąc iloczyn skalarny z wersorem prostopadłym do zbocza:

$$\vec{e}_n = [-\sin\alpha; -\cos\alpha]$$

$$v_n = \vec{v}(t_u) \cdot \vec{e}_n = v_0 \cdot \sin\alpha$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$x_u = 80\sqrt{3}\,m \approx 138{,}6$ m

$y_u = -\ 240$ m

$t_u = 4\sqrt{3}$ s $\approx 6{,}93$ s

$v_n = 10\sqrt{3}\,\frac{m}{s} \approx 17{,}3\ \frac{m}{s}$

**Rozwiązanie Zad. 2.**
Zadanie rozwiążemy w nieinercjalnym układzie odniesienia związanym z poruszającą się równią. Jeśli równia porusza się względem obserwatora zewnętrznego z przyspieszeniem $\vec{A}$, to w nieinercjalnym układzie równi należy uwzględnić siłę bezwładności działającą na klocek, $\vec{F}_b = -m\vec{A}$, gdzie m – masa klocka. Aby siła ta mogła doprowadzić do rozpoczęcia wsuwania się klocka do góry, przyspieszenie $\vec{A}$ musi być skierowane w prawo. Wybierzmy oś *x* układu współrzędnych w naszym układzie odniesienia równoległą do powierzchni równi, ze zwrotem w dół równi. Wtedy *x*-owe i *y*-owe składowe odpowiednich sił wynoszą:

siła ciężkości:

$$\vec{Q} = [mg\sin\alpha; -mg\cos\alpha]$$

siła bezwładności:

$$\vec{F}_b = [-mA\cos\alpha; -mA\sin\alpha]$$

$x$-owa składowa siły bezwładności będzie się starała przemieszczać klocek w górę równi. Siła nacisku klocka na równię jest prostopadła do powierzchni równi, a jej $y$-owa składowa jest sumą $y$-owych składowych siły ciężkości i siły bezwładności:

$$F_{Ny} = -mg\cos\alpha - mA\sin\alpha$$

Widać, że wraz ze wzrostem $A$ wartość siły nacisku rośnie.
Maksymalne tarcie statyczne, działające wzdłuż równi zgodnie ze zwrotem osi $x$ i przeciwstawiające się przemieszczaniu się klocka w górę równi (do czego stara się doprowadzić siła bezwładności) wyniesie:

$$F_T = (mg\cos\alpha + mA\sin\alpha)\cdot\mu$$

Warunkiem rozpoczęcia ruchu klocka w górę równi jest pokonanie tarcia statycznego przez sumę $x$-owych składowych sił $\vec{Q}$ i $\vec{F}_b$:

$$mg\sin\alpha - mA\cos\alpha + (mg\cos\alpha + mA\sin\alpha)\cdot\mu < 0 \qquad (*)$$

Stąd otrzymujemy:

$$A > g\cdot\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$ przy założeniu, że $\mu < ctg\alpha$

Przy dużej wartości współczynnika tarcia $\mu > ctg\alpha$ nierówności (*) nie da się w ogóle spełnić – niezależnie od wartości przyspieszenia $A$ klocek pozostanie nieruchomy.

**Rozwiązanie Zad. 3.**

Zmiana energii kinetycznej ciała równa się pracy siły wypadkowej:

$$\Delta E_k = W \qquad (1)$$

Od momentu zetknięcia się paczki z wózkiem jedynymi niezrównoważonymi siłami działającymi na wózek i paczkę są siły tarcia pomiędzy nimi. Siła tarcia działa na wózek spowalniając jego ruch, zaś (zgodnie z III zasadą dynamiki) siła działająca na paczkę będzie przeciwnie skierowana i będzie powodowała ruch przyspieszony paczki. Wartość siły tarcia jest stała i wynosi:

$$F_T = mg\mu \qquad (2)$$

Całkowita praca sił tarcia będzie sumą pracy siły tarcia działającej na wózek (praca ta jest ujemna, bo ruch wózka i zwrot siły tarcia działającej na wózek są przeciwne) oraz pracy siły tarcia działającej na paczkę (ta praca będzie dodatnia, bo siła tarcia działa na paczkę zgodnie z kierunkiem jej ruchu). Całkowita praca sił tarcia wynosi więc:

$$W_T = mg\mu(\Delta s_p - \Delta s_w) = -mg\mu\cdot\Delta s \qquad (3)$$

gdzie $\Delta s_p$ i $\Delta s_w$ są drogami przebytymi przez paczkę i wózek (liczonymi w układzie obserwatora stojącego na ziemi), zaś $\Delta s$ jest drogą przebytą przez paczkę względem wózka od momentu wrzucenia jej na wózek do momentu jej zatrzymania. Jak widać, praca $W_T$ jest *ujemna*.

Ze względu na to, że na układ obu mas nie działają żadne niezrównoważone siły zewnętrzne, to całkowity pęd układu będzie zachowany:

$$Mv = (M+m)v' \qquad (4)$$

gdzie $v'$ jest końcową prędkością układu wózek-paczka.
Wykorzystując teraz równanie (1) mamy:

$$W_T = \frac{(M+m)v'^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = -\frac{mMv^2}{2(m+M)} \qquad (5)$$

Stąd łatwo można znaleźć drogę $\Delta s$ przebytą przez paczkę na wózku:

$$\Delta s = \frac{Mv^2}{2g\mu(m+M)} \qquad (6)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$W_T = -3{,}33\ J$

$\Delta s = 11{,}1\ cm$