KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zasady zachowania

Fizyka I (Mechanika)

Wykład IV:

- Prawa ruchu w układzie nieinercjalnym

- Zasada zachowania pędu
- Ruch ciał o zmiennej masie
- Praca, moc, energia kinetyczna
- Siły zachowawcze, energia potencjalna, zasada zachowania energii

Układ inercjalny

Zasada bezwładności

"Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszajż ciała do zmiany tego stanu." I.Newton

Układ odniesienia w którym spełniona jest zasada bezwładności nazywamy układem inercjalnym

Zasada bezwładności jest równoważna z postulatem itnienia układu inercjalnego

W układzie inercjalnym ruch ciała jest jednoznacznie zadany przez działające na nie siły zewnętrzne (równanie ruchu) + warunki początkowe

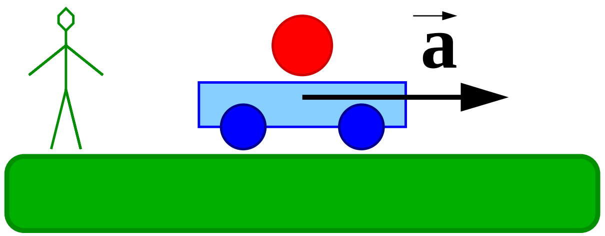
$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

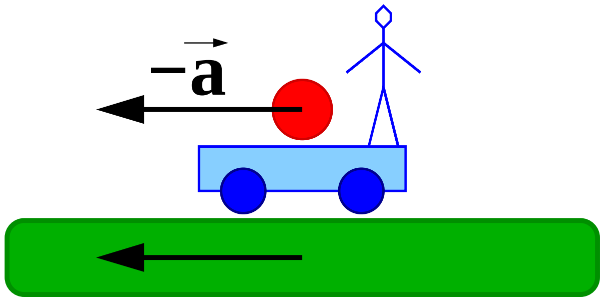
$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

Układy nieinercjalne

Opis ruchu

Wózek porusza się z przyspieszenien $\vec{a}$ względem stołu





Z punktu widzenia obserwatora związanego ze stołem kulka pozostaje w spoczynku.

Wynika to z zasady bezwładności - siły działające na kulkę równoważą się

$$\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$$

Z punktu widzenia obserwatora związanego z wózkiem kulka porusza się z przyspieszeniem $-\vec{a}$

$\Rightarrow$ prawa Newtona nie są spełnione !

Oba układy nie mogą być inercjalne.

Prawa ruchu w układzie nieinercjalnym wymagają modyfikacji

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Przyjmijmy, że układ O' porusza się z przyspieszeniem względem układu inercjalnego O.

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)!

Niech $\vec{r}_\circ(t)$ opisuje położenie układu O' w O. Przyspieszenie: $\vec{a}_\circ = \frac{d^2\vec{r}_\circ}{dt^2}$

Położenie punktu materialnego mierzone w układach O i O': (geometria)

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}\,'(t) \;+\; \vec{r}_\circ(t)$$

Położenie jest funkcją czasu t, który nie zależy od układu odniesienia.

Przyspieszenie punktu materialnego mierzone w układach O i O': (pochodna)

$$\vec{a} \;=\; \vec{a}\,' + \vec{a}_\circ$$

Przyspieszenie w ruchu względnym układów decyduje o relacji mierzonych wartości przyspieszeń!

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Prawa ruchu w układzie inercjalnym O:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

Przyspieszenie mierzone w układzie O' możemy teraz wyrazić przez przyspieszenie w układzie O:

$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\vec{a}_\circ$$

$\Rightarrow$ w układzie nieinercjalnym O':

$$m\vec{a}\,' = \vec{F}(\vec{r}\,', \vec{v}\,', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_\circ$$

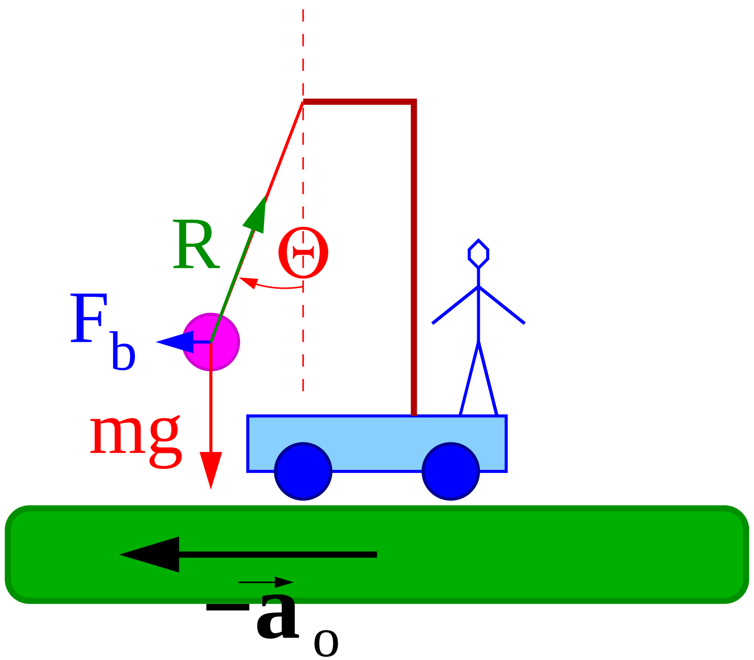
W układzie nieinercjalnym możemy korzystać z równania ruchu, ale musimy uzupełnić je o siłę bezwładności (siła pozorna)

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_\circ$$

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Wahadło w układzie nieinercjalnym poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}$ względem układu inercjalnego



Oprócz siły ciężkości $m\vec{g}$ i reakcji $\vec{R}$ musimy uwzględnić pozorną siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_\circ$

Opis ruchu można uprościć wprowadzając efektywne przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_\circ$$

siły bezwładności $\equiv$ siły grawitacji

$\Rightarrow$ odchylenie położenia równowagi:

$$\tan\theta = \frac{a_\circ}{g}$$

Przyspieszenie drgań:

$$\omega'^{\,2} = \frac{g'}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$$

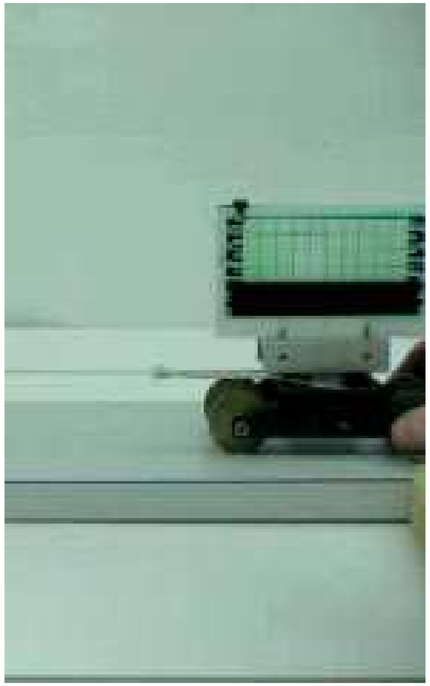
Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Jeśli $a_\circ \ll g \Rightarrow$ w układzie poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_\circ \perp \vec{g}$ obserwujemy pozorną zmianę kierunku działania siły ciężkości:

Ciecz w naczyniu:

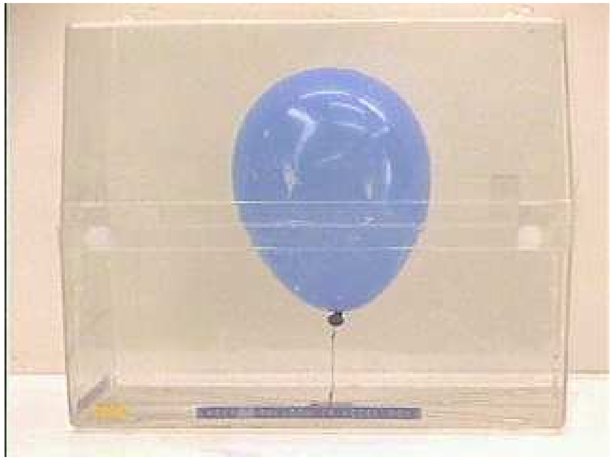
$\vec{a} = 0$



$\vec{a} \neq 0$

Balon z helem:

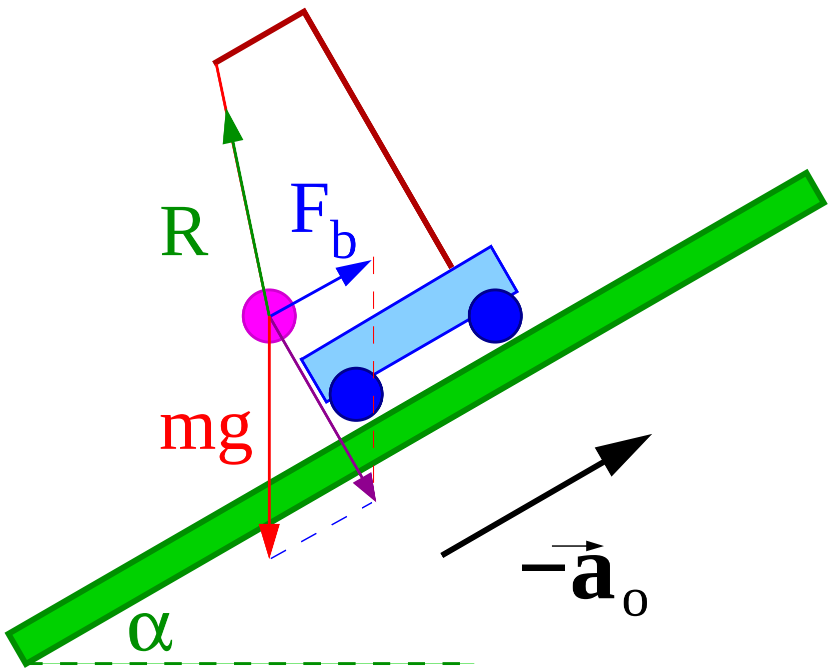
$\vec{a} = 0$



$\vec{a} \neq 0$

Układy nieinercjalne

Równia



siły działające w układzie wózka

Wózek zsuwa się bez tarcia po równi pochyłej. Zaniedbując ruch obrotowy kół przyspieszenie wózka:

$$a_\circ = g \sin\alpha$$

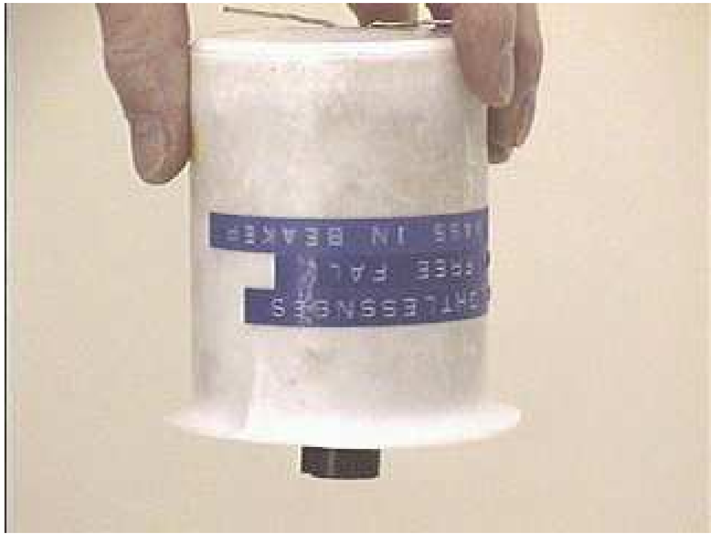
W układzie związanym z wózkiem działająca na wahadło siła bezwładności jest równa co do wartości (lecz przeciwnie skierowana) równoległej składowej ciężaru.

Na wahadło działa pozorna siła ciężkości prostopadła do powierzchni równi.

$$g' = g_\perp = g \cos\alpha < g$$

$\Rightarrow$ spowolnienie drgań

Układy nieinercjalne



Spadek swobodny

W układzie odniesienia poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_\circ || \vec{g}$ obserwujemy pozorną zmianę wartości przyspieszenie grawitacyjnego:

$$\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_\circ$$

W układzie związanym z ciałem spadającym swobodnie $\vec{a}_\circ = \vec{g}$

$$\vec{g}\,' = 0$$

$\Rightarrow$ stan nieważkości

II zasada dynamiki

Przypomnienie

Druga zasada dynamiki Newtona w postaci “klasycznej”

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

Zależność słuszna dla ciał których masa jest stała, $m = const$

Możemy to wykorzystać i przekształcić zależność do postaci:

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{m=const}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie $\vec{p} = m\vec{v}$ - pęd cząstki

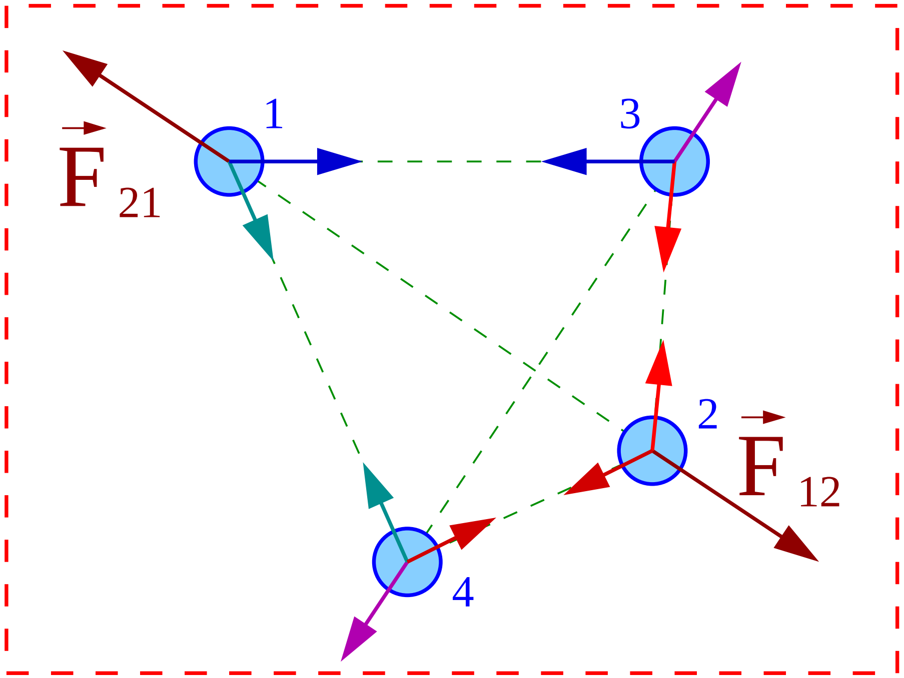
$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$\Delta\vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F}\,dt = I \quad \text{- popęd siły}$$

Zasada zachowania pędu

Układ izolowany

Każde ciało może w dowolny sposób oddziaływać z innymi elementami układu.



Brak oddziaływań ze światem zewnętrznym

III zasada dynamiki

Siły z którymi działają na siebie ciała i i j:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających ciało i:

$$\vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_j \vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających na układ:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji}$$

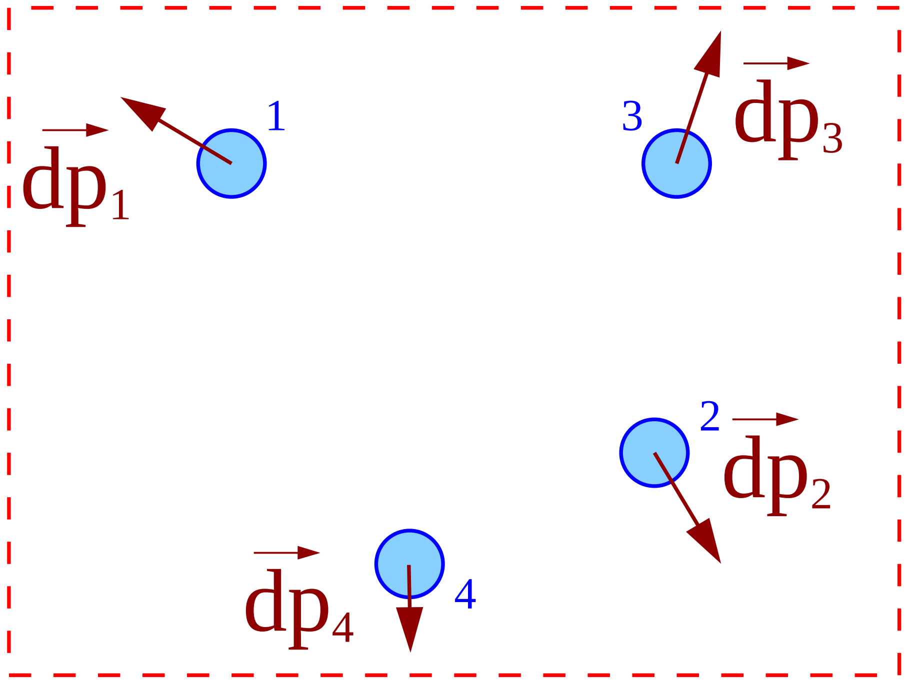
$$= \sum_j \sum_i -\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{tot}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{tot} = 0$$

Zasada zachowania pędu

II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\Sigma}$$



izolowany układ inercjalny

Pęd układu

Prawo ruchu układu:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Dla dowolnego układu izolowanego, suma pędów wszystkich elementów układu pozostaje stała.

Zasada zachowania pędu

Dla dowolnego układu izolowanego,
suma pędów wszystkich elementów układu pozostaje stała.

$$\sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const}$$

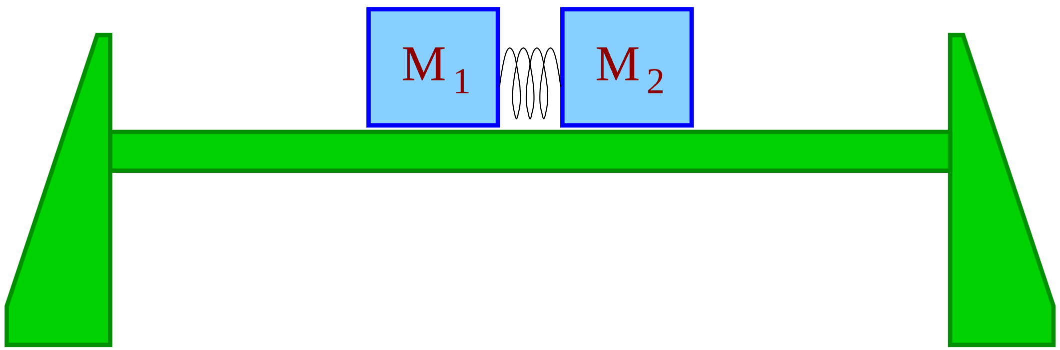
pędy mierzymy w układzie inercjalnym (!)

Zasada zachowania pędu obowiązuje w każdej sytuacji:

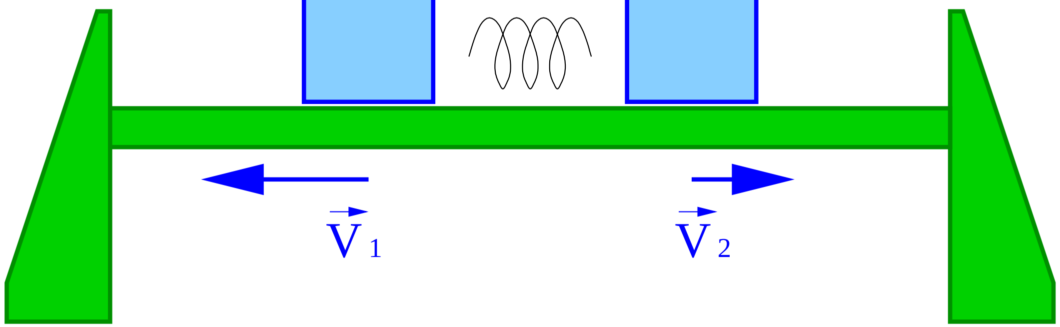
- zderzenia poruszającego się ciała z nieruchomym
- zderzenia dwóch poruszających się ciał
- "rozpadu" układu na skutek działania sił wewnętrznych (np. wystrzał z armaty)

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



$$M_1 < M_2$$



Układ “rozpada się” pod wpływem sił wewnętrznych.

Jeśli na początku wszystkie obiekty spoczywają

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

to i po “rozpadzie” suma pędów musi być równa 0.

Dwa ciała: $(v_i \ll c)$

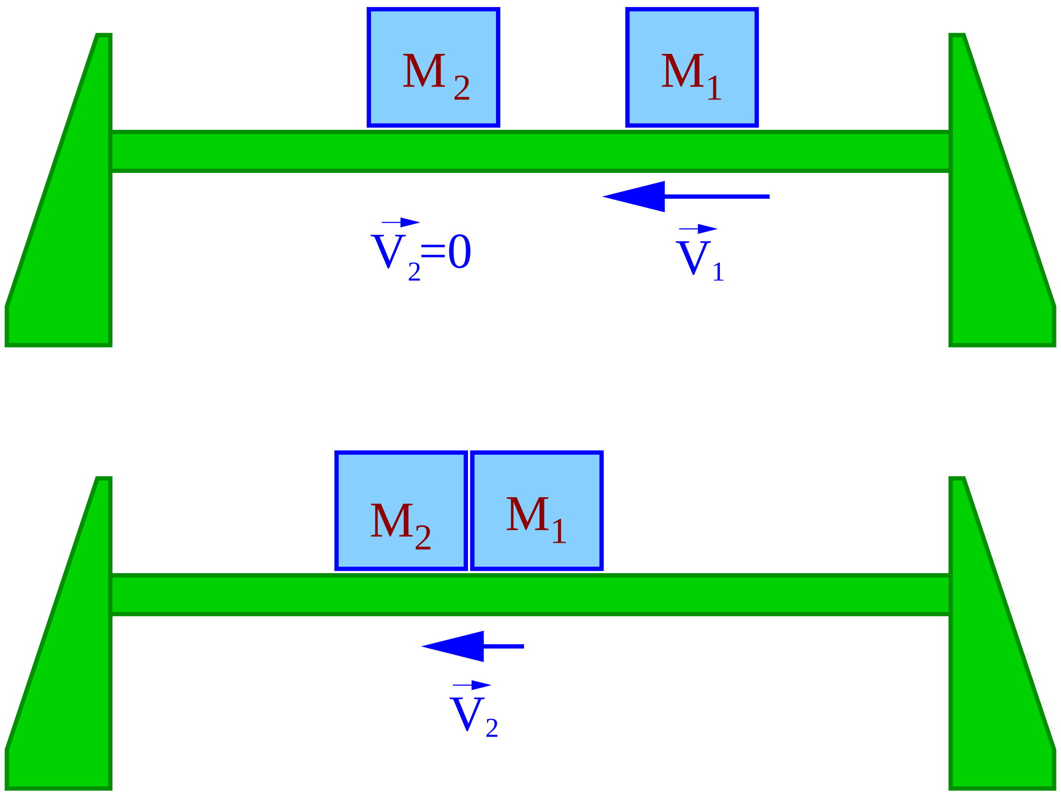
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{v}_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

Zasada zachowania pędu

Zderzenia nieelastyczne



Zderzeniem całkowicie niesprężystym (całkowicie nieelastycznym) nazywamy zderzenie, w wyniku którego ciała pozostają trwale złączone (lub nie poruszają się względem siebie)

Gdy jedno z ciał spoczywa

Pęd początkowy: $\vec{p}_i = m_1 \vec{v}_1$

Pęd końcowy: $\vec{p}_f = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_2$

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1$$

Ruch ciał o zmiennej masie

II zasada dynamiki w postaci

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

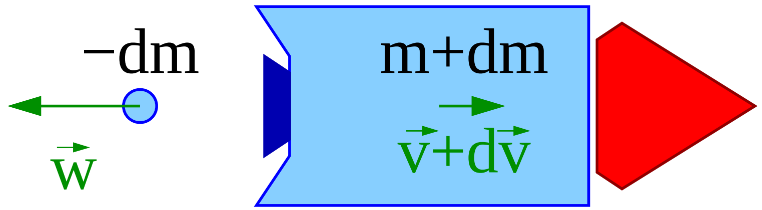
może być w szczególności wykorzystana do opisu ruchu ciała o zmiennej masie.

W ogólnym przypadku: $m = m(\vec{r}, \vec{v}, t)$

Rakieta

Silnik rakietowy napędza rakietę na zasadzie odrzutu. Jej masa maleje.

Rozważmy pracę silnika rakiety z punktu widzenia zasady zachowania pędu.

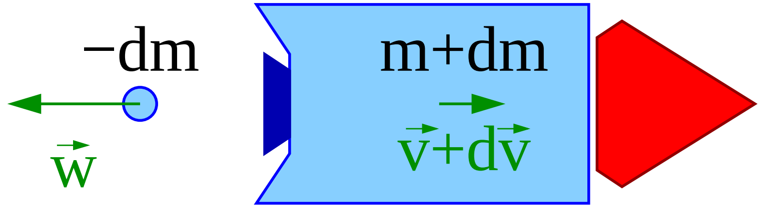


W czasie dt masa rakiety zmienia się z m do $m + dm$ ($dm < 0$ bo masa maleje)
jej prędkość zmienia się z $\vec{v}$ do $\vec{v} + d\vec{v}$.

Od rakiety odłącza się element o masie $-dm > 0$ poruszający się z prędkością $\vec{w}$

Ruch ciał o zmiennej masie

To właśnie w wyniku odrzutu rakieta zmienia swoją prędkość o $d\vec{v}$



Z zasady zachowania pędu:

$$
\begin{aligned}
m\,\vec{v} &= (m+dm)\,(\vec{v}+d\vec{v}) - dm\,\vec{w} \\
0 &= m\,d\vec{v} + dm\,\vec{v} + dm\,d\vec{v} - dm\,\vec{w} \\
\Rightarrow \quad d\vec{p} = m\,d\vec{v} &\approx -dm\,\vec{v} + dm\,\vec{w} \\
&= dm\,(\vec{w}-\vec{v}) \equiv dm\,\vec{v}_{odrz}
\end{aligned}
$$

Siła odrzutu (siła ciągu rakiety):

$$
\vec{F}_{odrz} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz} \qquad \frac{dm}{dt} < 0 \qquad \vec{F}_{odrz} \uparrow\downarrow \vec{v}_{odrz}
$$

Ruch ciał o zmiennej masie

Równanie ruchu

Ruch ciała pod wpływem siły odrzutu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zewn} + \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz}$$

Zaniedbując wpływ sił zewnętrznych:

(np. pola grawitacyjnego)

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz}$$

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dm}\cdot\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz}$$

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dm} = \vec{v}_{odrz}$$

Całkując stronami:

$$\int_{v_\circ}^{v_k} \frac{d\vec{v}}{\vec{v}_{odrz}} = \int_{m_\circ}^{m_k} \frac{dm}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_k = \vec{v}_\circ + \vec{v}_{odrz}\cdot \ln\left(\frac{m_k}{m_\circ}\right)$$

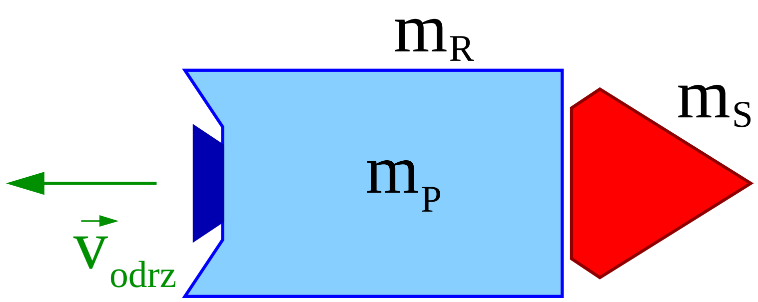
wzór Ciołkowskiego

Gdy zaniedbamy grawitację, prędkość końcowa nie zależy od tego jak szybko spalamy paliwo...

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta jednostopniowa

Rakieta o masie m_R ma wynieść satelitę o masie m_S, zużywając paliwo o masie m_P:



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11\ km/s$ (np. lot na Księżyc) przy silniku rakietowym $v_{odrz} = 3\,km/s$

Możliwa do uzyskania prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \ln\left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R}\right)$$

$$\approx v_{odrz} \cdot \ln(1 + f)$$

gdzie: $f = \dfrac{m_P}{m_R}$ $\qquad m_s \ll m_R$

stosunek masy paliwa do masy rakiety

$$f = \exp\left(\frac{v_k}{v_{odrz}}\right) - 1 \approx 38$$

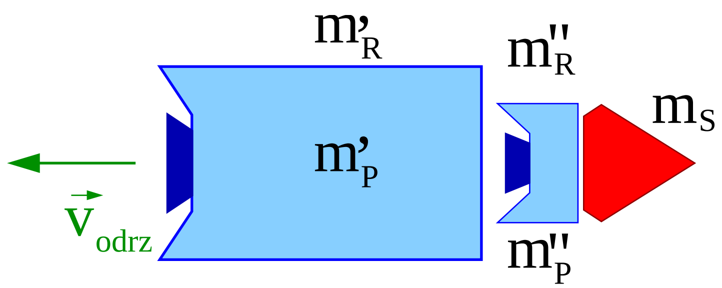
Teoretycznie możliwe,
praktycznie niewykonalne (?)...
i nieopłacalne !...

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta dwustopniowa

Rakietę dzielimy na dwa człony o masach m'_R i m''_R, $\quad m'_R + m''_R = m_R$

w których znajduje się paliwo o masie m'_P i m''_P: $\quad m'_P + m''_P = m_P$



Prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \left[\ln\left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R + m''_P}\right) + \ln\left(\frac{m_S + m''_R + m''_P}{m_S + m''_R}\right)\right]$$

W przybliżeniu $m_S \ll m''_R \ll m'_R$: $\quad v_k \approx v_{odrz} \cdot 2 \, \ln(1+f)$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11 \, km/s$ przy o $v_{odrz} = 3 \, km/s$:

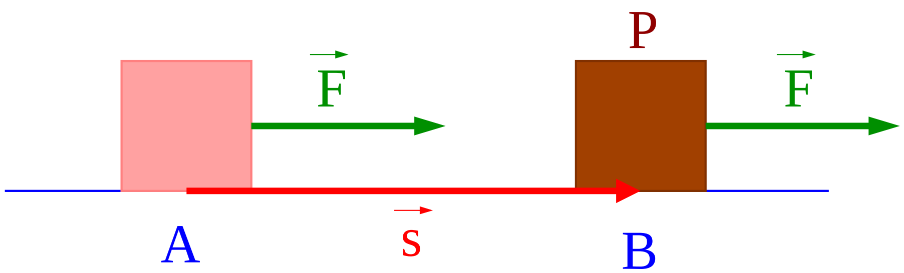
$$f = \exp\left(\frac{v_k}{2 \, v_{odrz}}\right) - 1 \approx 5.3$$

Dla $f \approx 10$ (dla obu członów) można wystrzelić w kosmos $\quad m_S \approx 0.6\% \, (m_R + m_P)$

przy optymalnym wyborze $m''_R \approx 7\% \, m_R$

Praca i energia

Praca

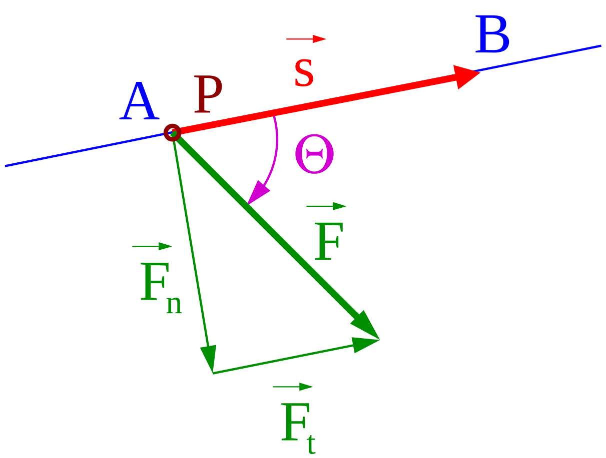


Najprostszy przypadek:

Stała siła $\vec{F}$ działa na ciało P powodując jego przesunięcie wzdłuż kierunku działania siły o $\vec{s}$.

Praca jaką wykona przy tym siła $\vec{F}$

$$W_{AB} = F \cdot s$$



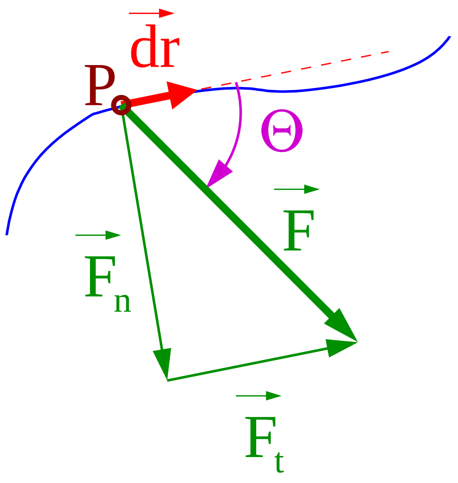
W przypadku siły działającej pod kątem w stosunku do przesunięcia praca jaką wykonuje

$$W_{AB} = F \cdot s \cdot \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Składowa prostopadła nie wykonują pracy!

Liczy się tylko równoległa składowa siły...

Praca i energia



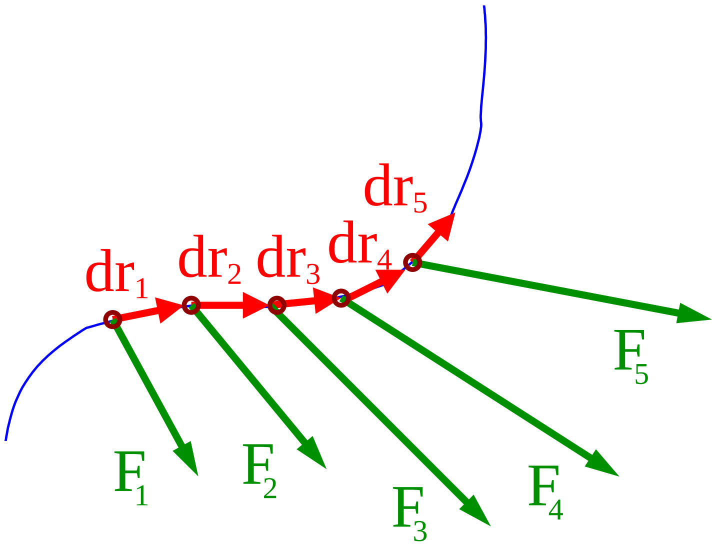
Praca

Dowolna siła $\vec{F}$ działa na punkt materialny P

Praca jaką wykonuje siła przy przesunięciu o $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos\theta ds = F_t \, ds$$

Aby policzyć pracę siły $\vec{F}$ dla dowolnej drogi, musimy posumować wkłady od kolejnych małych przesunięć $\Rightarrow$ całkowanie.



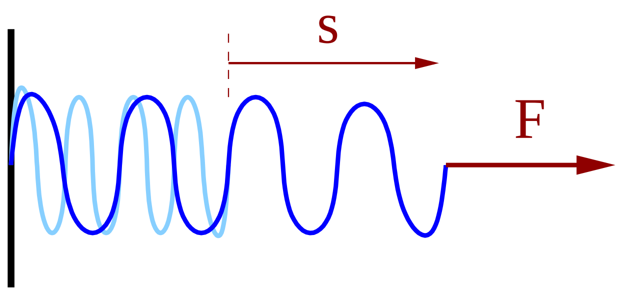
Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy!
siła Lorenza, siła Coriolisa, siły reakcji więzów...

Praca i energia

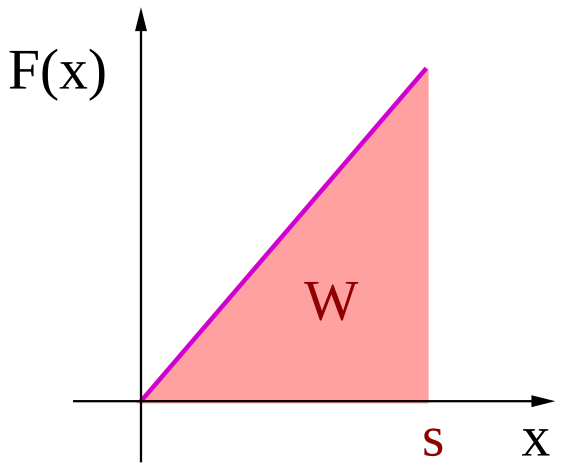
Praca



Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy przeciwko sile sprężystości:

$$F(x) = kx$$

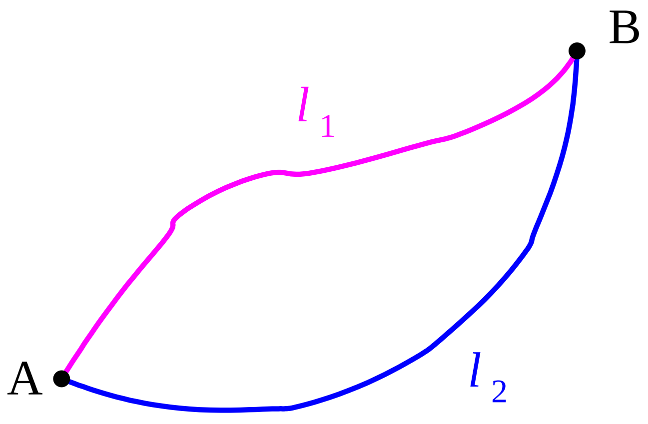


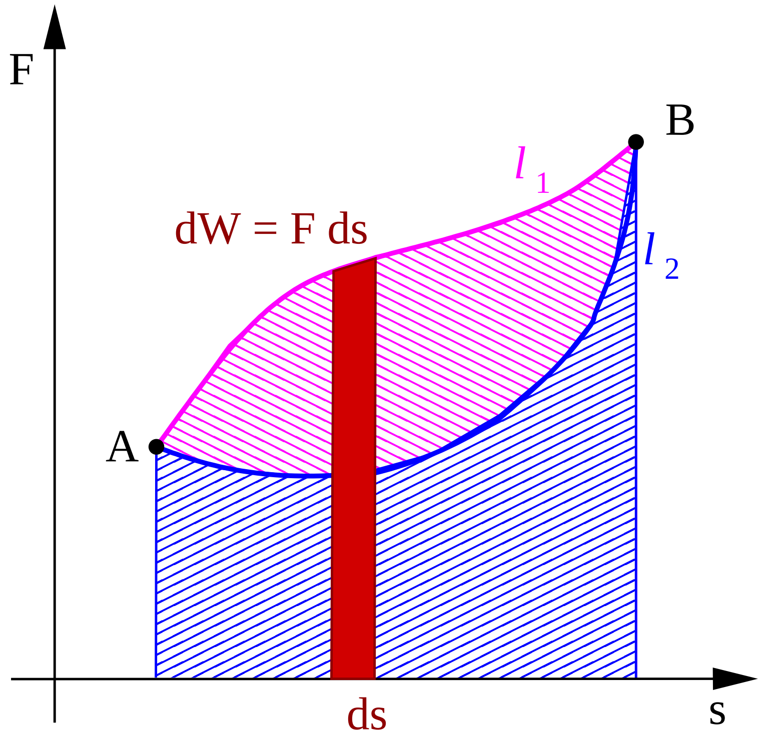
Wykonana praca:

$$W = \int_0^s F(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^s kx \cdot dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^s = \frac{1}{2}ks^2$$

Praca i energia





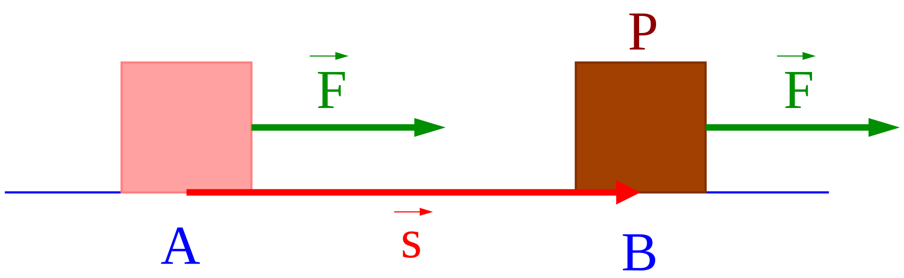
Praca

W ogólnym przypadku praca W_{AB} jaką wykonujemy podczas ruchu punktu z A do B może zależeć od:

- przebytej drogi l
  np. praca sił tarcia będzie proporcjonalna do l
- toru ruchu
  np. jeśli siły oporu zależą od wyboru toru
- prędkości
  siły oporu w ośrodku zależą od prędkości
- czasu
  jeśli działające siły zależą od czasu

Praca i energia

Energia kinetyczna



Przyjmijmy, że siła $\vec{F}$ jest siłą wypadkową działającą na ciało P. Zmiana prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$
\begin{aligned}
v_B - v_A &= \frac{F}{m} \cdot \Delta t \\
&= \frac{F}{m} \cdot \frac{s}{\langle v \rangle} = \frac{F}{m} \cdot \frac{2s}{v_A + v_B}
\end{aligned}
$$

Gdzie skorzystaliśmy z wyrażenia na prędkość średnią: $\langle v \rangle = \frac{v_A + v_B}{2}$

Otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
v_B^2 - v_A^2 &= (v_B - v_A)(v_B + v_A) = \frac{2}{m} \cdot F \cdot s = \frac{2}{m} \cdot W_{AB} \\
\Rightarrow \quad W_{AB} &= \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k
\end{aligned}
$$

Pracę możemy wyrazić poprzez zmianę energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Praca i energia

Energia kinetyczna

Praca jaką wykonuje siła $\vec{F}$ przy przesunięciu P o ds

$$dW = F_t\, ds = m\, a_t\, ds = m\, \frac{dv}{dt}\, ds$$

$$\frac{dv}{dt}\, ds = dv\, \frac{ds}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad = m\, \frac{ds}{dt}\, dv = m\, v\, dv$$

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B F_t(s) \cdot ds = \int_A^B mv\, dv = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

Niezależnie od postaci siły $\vec{F}$ i drogi

na ciało nie działają inne siły, układ inercjalny

praca siły jest równa zmianie energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Moc

Moc średnia opisuje średnią pracę wykonywaną na jednostkę czasu:

$$P^{(\acute{s}r)} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Moc chwilowa

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Wstawiając $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Moc siły jest proporcjonalna do prędkości ciała!

Jednostką pracy jest Dżul:

$$1J = 1N \cdot 1m = 1 \frac{kg\ m^2}{s^2}$$

Jednostką mocy jest Wat:

$$1W = \frac{1J}{1s} = 1 \frac{kg\ m^2}{s^3}$$

Kiedyś używano jako jednostki mocy konia mechanicznego:

$$1\ KM = 735.498\ W$$

Praca i energia

Energia potencjalna

Ruch w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym $\vec{g}$.

Siła ciężkości działająca na masę m: $\vec{F} = m\,\vec{g} = m\,(0, -g, 0)$

$$W_{AB} \;=\; \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \;=\; \vec{F}\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \;=\; -m\,\vec{g}\,(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \;=\; m\,g\,(y_A - y_B)$$

Możemy wprowadzić energię potencjalną dla jednorodnego pola grawitacyjnego

$$E_p(\vec{r}) \;=\; -m\,\vec{g}\,\vec{r} \;=\; m\,g\,y$$

Pracę możemy wtedy wyrazić przez zmianę energii potencjalnej

$$W_{AB} \;=\; E_p(\vec{r}_A) \;-\; E_p(\vec{r}_B) \;=\; -\Delta E_p$$

Mówimy, że siła ciężkości jest siłą zachowawczą.

Praca i energia

Energia potencjalna

Siła $\vec{F}(\vec{r})$ jest zachowawcza (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od położenia punktów początkowego (A) i końcowego (B)

$\Rightarrow$ można ją wyrazić przez zmianę energii potencjalnej

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Jeśli droga jest zamknięta to praca jest równa zeru

$$\int_A^A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

cyrkulacja (krążenie) $\vec{F}$

Siłami zachowawczymi są też wszystkie siły centralne, zależne tylko od odległości

$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$ siła kulombowska, siła grawitacyjna, siły sprężystości...

Praca i energia

Siła a energia potencjalna

Praca wykonana przy infintezymalnym przesunięciu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\,dE_p$$

zmiana energii potencjalnej $\Rightarrow$ $$= -\frac{\partial E_p}{\partial x}\,dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}\,dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}\,dz$$

Otrzymujemy:

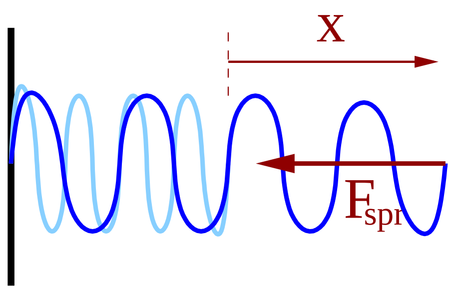
$$\boxed{\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x},\ -\frac{\partial E_p}{\partial y},\ -\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)}$$

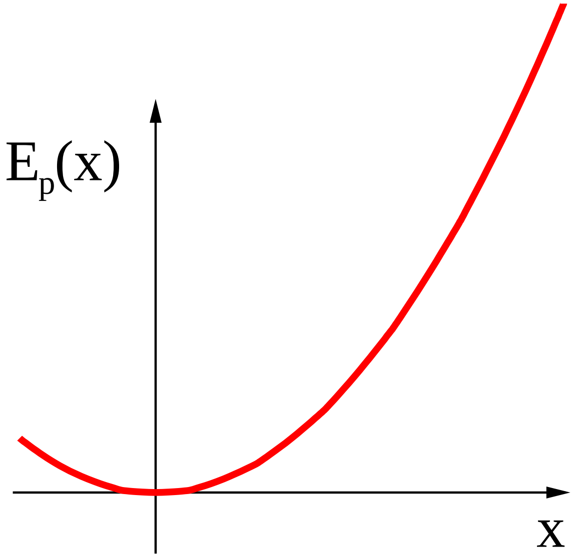
Znajomość potencjału siły zachowawczej jest rownoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany.

Praca i energia

Siła a energia potencjalna





Przykład:

Rozciągnięcie sprężyny wymaga wykonania pracy.

$$W = \int_0^s F(x) \cdot dx = \frac{1}{2} k s^2$$

Kosztem tej pracy rośnie energia potencjalna:

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

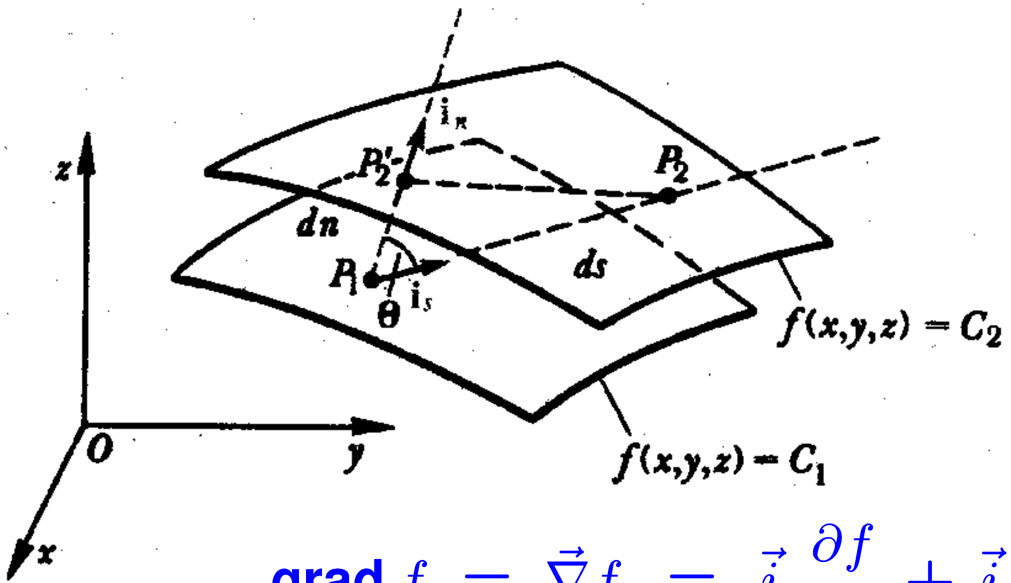
Siła sprężystości:

$$F_x^{spr}(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -kx$$

W momencie puszczenia sprężyny energia potencjalna zamienia się na kinetyczną...

Praca i energia

Gradient



Gradient wskazuje kierunek w którym następuje największa zmiana wartości funkcji skalarnej $f(x,y,z)$.

Wartość gradientu odpowiada wartości pochodnej funkcji $f(x,y,z)$ wzdłuż tego kierunku.

$$\textbf{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \vec{i}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

"nabla" $\Rightarrow$ $$\vec{\nabla} = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}_n \frac{\partial f}{\partial n}$$ $\vec{n}$ - wektor normalny do f=const

Siłę zachowawczą wyrażamy jako gradient energii potencjalej: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$ pomiędzy A i B wyraża się przez energię potencjalną

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B$$

Z drugiej strony, praca siły działającej na ciało zmienia energię kinetyczną:

$$W_{AB} = E_k^B - E_k^A$$

$$\Rightarrow \quad E_k^B - E_k^A = E_p^A - E_p^B$$

$$\Rightarrow \quad E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A$$

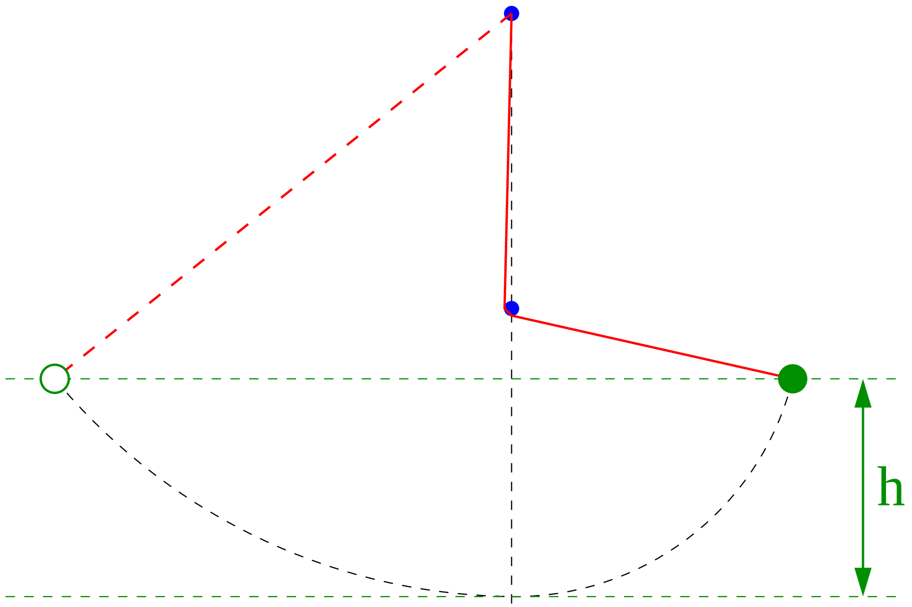
$$\Rightarrow \quad E = E_p + E_k = \text{const}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

Zasada zachowania energii

Wahadło Galileusza

Wysokość na jaką wznosi się wahadło
nie zmienia się przy zmianie długości nici:

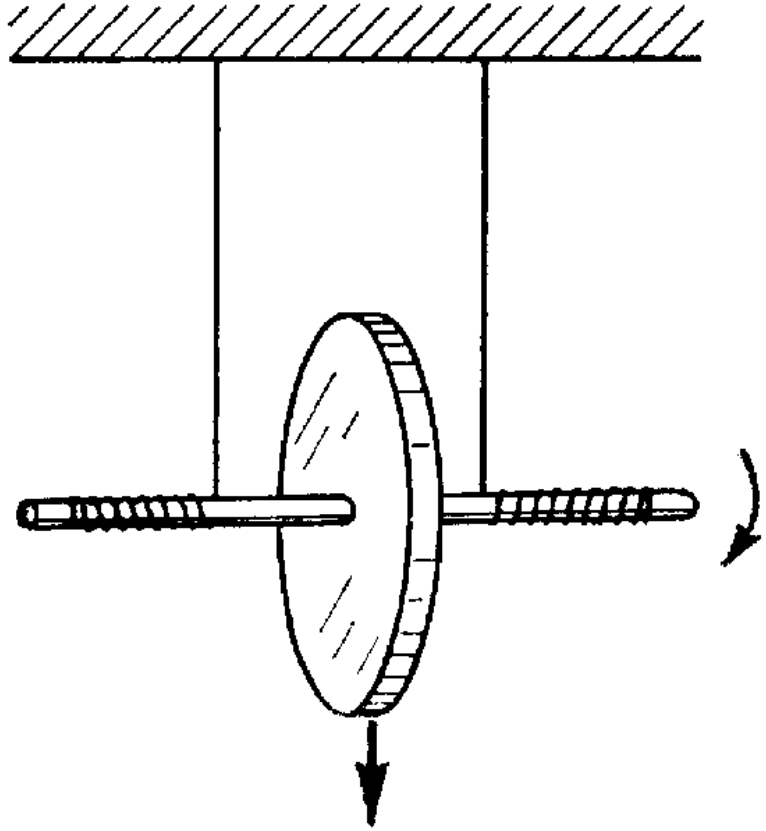


$$E_p + E_k \;=\; E \;=\; \text{const}$$

$$E_k = 0 \;\Rightarrow\; m\,g\,h = E$$

siły reakcji więzów nie wykonują pracy

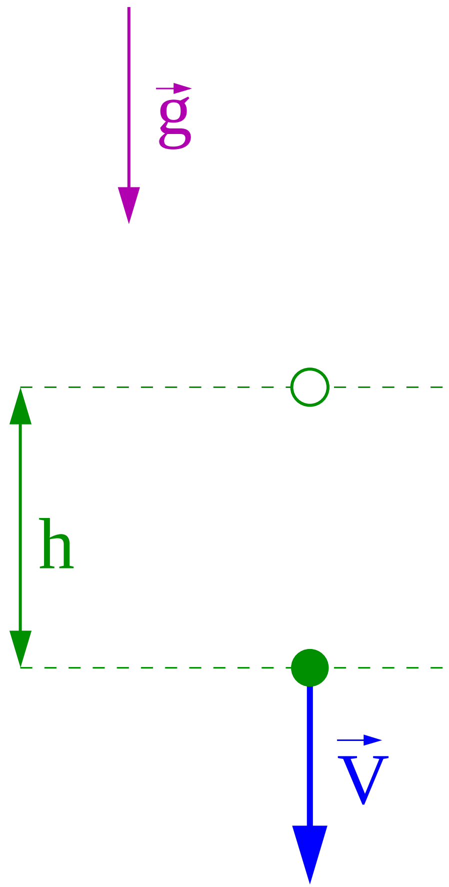
Koło Maxwella



Przemiana energii potencjalnej w energię kinetyczną ruchu obrotowego.

Zasada zachowania energii

Spadek swobodny



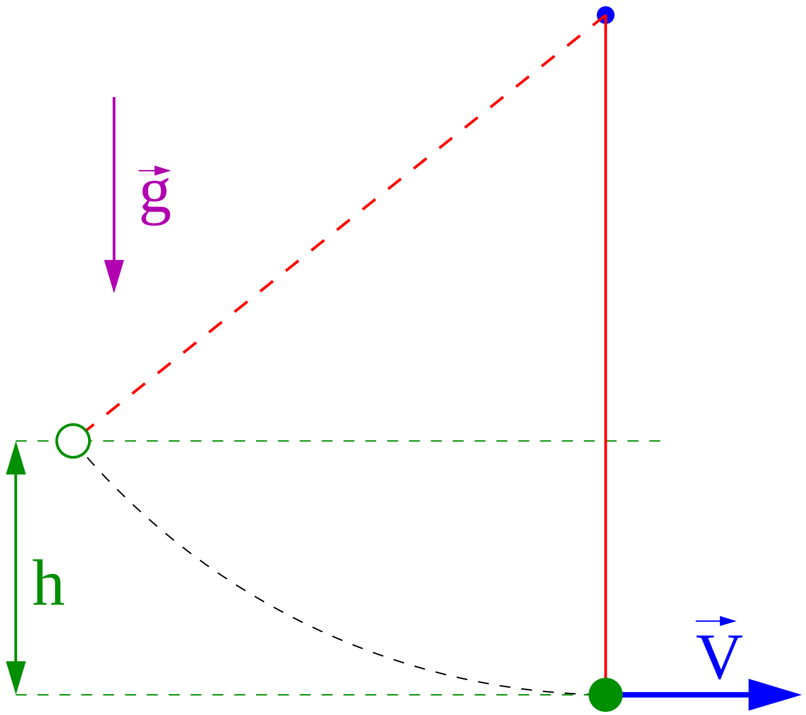
W jednorodnym polu $\vec{g}$ ciało spada swobodnie z wysokości h $(\vec{v}(0) = 0)$.

Prędkość końcowa z zasady zachowania energii:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\frac{m\,v^2}{2} = m\,g\,h$$

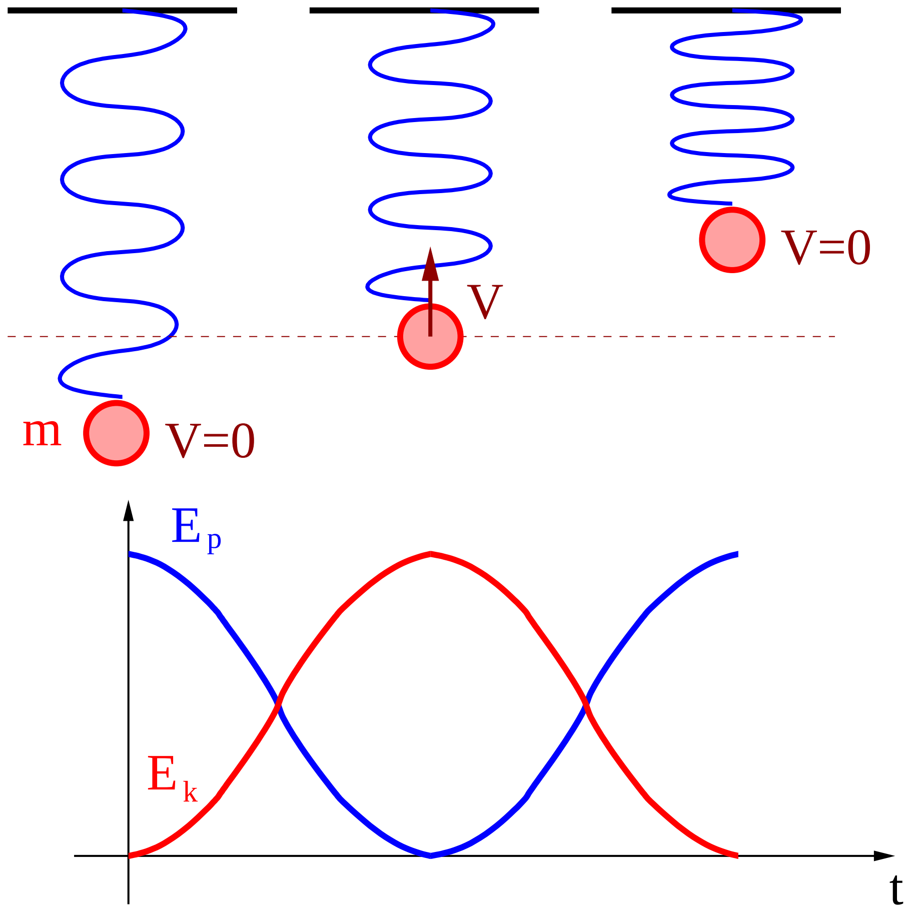
$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$



Taką samą prędkość uzyska wahadło puszczone z wysokości h

Zasada zachowania energii

Siły sprężystości



Ruchu pod wpływem sił sprężystości:

$$E = E_p(x) + E_k(x) = \text{const}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

Ruch harmoniczny $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\begin{aligned} x &= A \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ \Rightarrow \quad E_p(x) &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ v &= \omega\, A \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ \Rightarrow \quad E_k(x) &= \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$$

Zasada zachowania energii

Równania ruchu

Znajomość energii potencjalnej jest rownoważna znajomości siły (zachowawczej):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Czy znając $E_p(\vec{r})$ możemy rozwiązać równania ruchu ciała ?

- Możemy wyznaczyć zależność $\vec{F}(\vec{r})$ i skorzystać z II zasady dynamiki...

  albo

- Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii:

$$E = E_k(\dot{\vec{r}}) + E_p(\vec{r}) = const$$

W zależności od zagadnienia jeden albo drugi sposób może być bardziej użyteczny...

Zasada zachowania energii

Dla ruchu prostoliniowego pod działaniem siły zachowawczej $\vec{F}(x)$, energia potencjalna $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x) = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymujemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}}$$

$$t = \int_{x_\circ}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x')\right)}}$$

$\Rightarrow$ Znając $E_p(x)$ możemy zawsze znaleźć związek między x i t.

Zasada zachowania energii

Przykład: $\vec{F} = F\,\vec{i}_x = const \quad \Rightarrow E_p(x) \;=\; -F\,x \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

Przyjmując, że $x = 0$ w chwili $t = 0$ mamy:

$$t \;=\; \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E + F\,x'}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \;=\; \frac{2}{F}\left[\sqrt{E + F\,x'}\right]_0^x \;=\; \frac{2}{F}\sqrt{E + F\,x} - \frac{2}{F}\sqrt{E}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{\sqrt{2m}}\,t + \sqrt{E} \;=\; \sqrt{E + F\,x} \qquad \Rightarrow \quad x \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)\cdot t^2 \;+\; \sqrt{\frac{2E}{m}}\cdot t$$

$$\frac{1}{2}\;\; a \;\; \cdot t^2 \;+\; v_\circ \;\cdot t$$

$v_\circ$ - predkość w chwili $t = 0 \Rightarrow$ energia całkowita $E \;=\; \frac{m v_\circ^2}{2} > 0$

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. W wyniku czołowego zderzenia ciężarówki o masie 4 ton jadącej z prędkością 30 km/h z samochodem osobowym o masie 800 kg oba pojazdy zatrzymały się. Samochód osobowy poruszał się z prędkością:

   A 80 km/h   B 120 km/h   C 150 km/h   D 180 km/h

2. Prędkość jaką może uzyskać jednostopniowa rakieta zależy od masy końcowej m_k i masy początkowej rakiety m_0 jak

   A $\frac{m_0}{m_k} - 1$ B $\ln \frac{m_0}{m_k}$ C $\left(\frac{m_0}{m_k}\right)^2$ D $\sqrt{\frac{m_0}{m_k}}$

3. Dwa kamienie o różnej masie wystrzeliwane z tej samej procy (tak samo naciągniętej) będą miały równe

   A prędkości   B zasięgi   C energie kinetyczne   D pędy

4. Dla ciała, poruszającego się w polu sił zachowawczych, zachowana(y) jest

   A moment pędu   B pęd   C energia kinetyczna   D energia całkowita

5. Ciało A spuszczono swobodnie z wysokości cztery razy większej niż ciało B: $h_A = 4h_B$. Uzyskane prędkości

   A $v_A = 2\, v_B$ B $v_A = \sqrt{2}\, v_B$ C $v_A = 4\, v_B$ D $v_A = 2\sqrt{2}\, v_B$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego