KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zasady zachowania

Fizyka I (Mechanika)

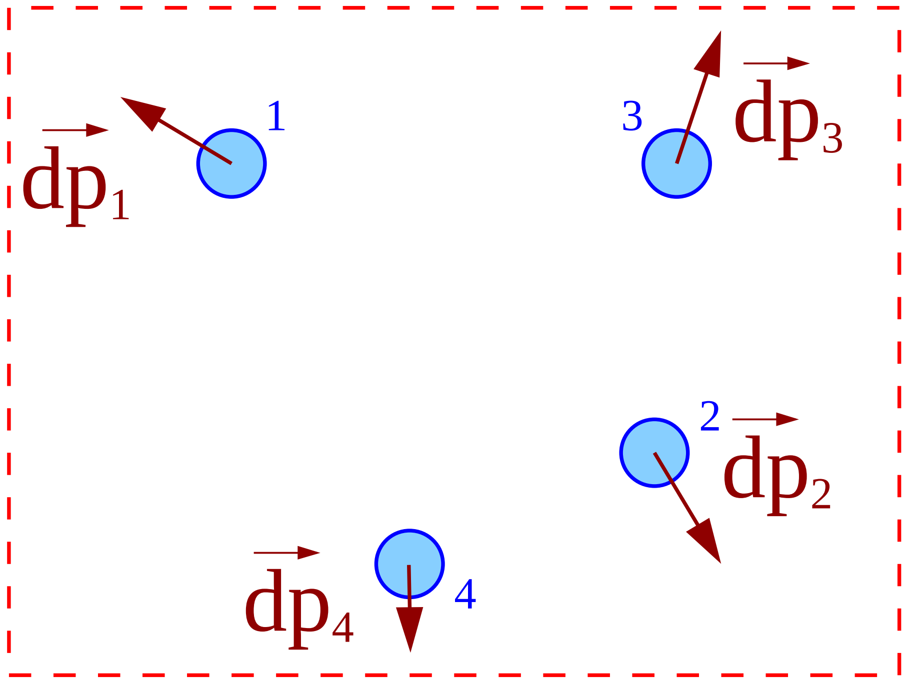
Wykład V:

- Zasady zachowania pędu i energii (usupełnienie)
- Zderzenia elastyczne
- Układ środka masy
- Zasada zachowania momentu pędu

Zasada zachowania pędu

II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\Sigma}$$



izolowany układ inercjalny

Pęd układu

Prawo ruchu układu:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const}$$

Dla dowolnego układu izolowanego, suma pędów wszystkich elementów układu pozostaje stała.

I odwrotnie: jeśli suma pędów jest stała to całkowita siła zewnętrzna jest zero

Praca i energia

Energia potencjalna

Siła $\vec{F}(\vec{r})$ jest zachowawcza (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od położenia punktów początkowego (A) i końcowego (B)

⇒ można ją wyrazić przez zmianę energii potencjalnej

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Związek siły i energii potencjalnej:

$$\boxed{\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, \; -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \; -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})}$$

Znajomość potencjału siły zachowawczej jest rownoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany.

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$ pomiędzy A i B wyraża się przez energię potencjalną

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B$$

Z drugiej strony, praca siły działającej na ciało zmienia energię kinetyczną:

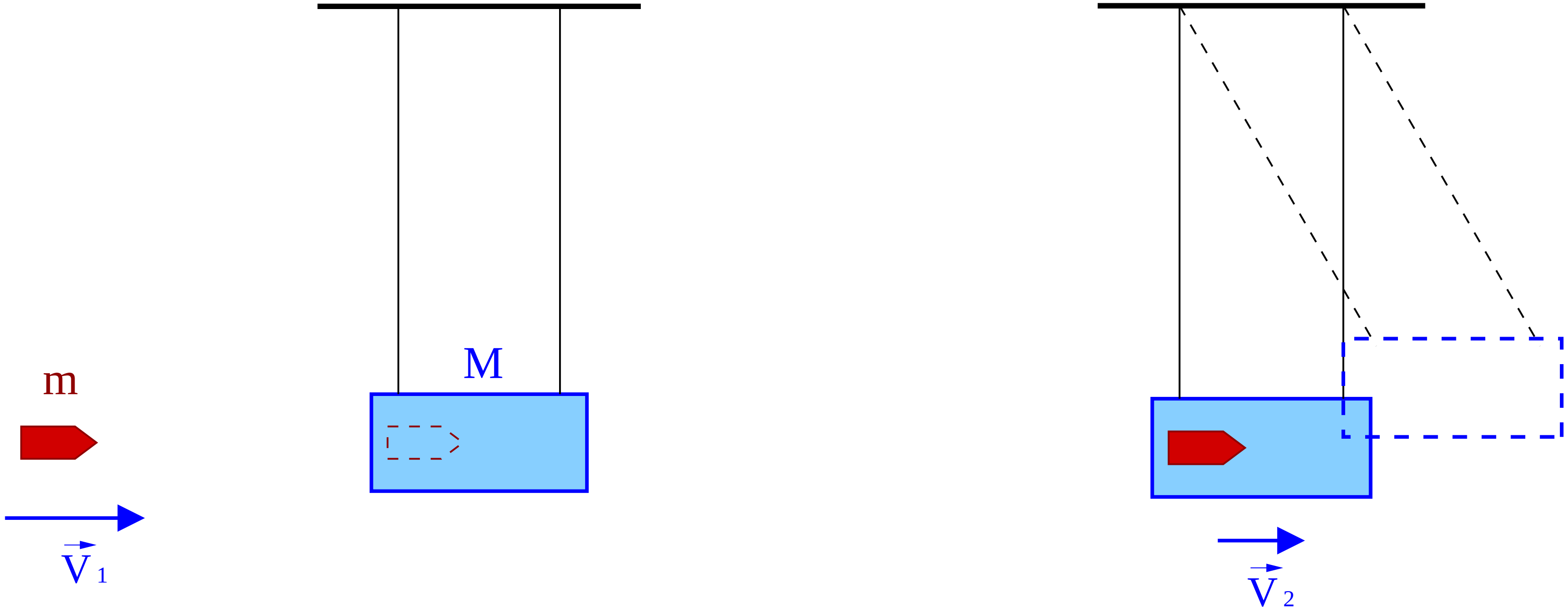
$$\begin{aligned} W_{AB} &= E_k^B - E_k^A \\ \Rightarrow \quad E_k^B - E_k^A &= E_p^A - E_p^B \\ \Rightarrow \quad E_k^B + E_p^B &= E_k^A + E_p^A \\ \Rightarrow \quad E &= E_p + E_k = \text{const} \end{aligned}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

Zasada zachowania energii

Wahadło balistyczne

Pocisk o masie m wbija się z prędkością $\vec{v}_1$ w nieruchome wahadło o masie M



Prędkość jaką uzyska wahadło możemy wyznaczyć z zasady zachowania pędu (zderzenie całkowicie nieelastyczne)

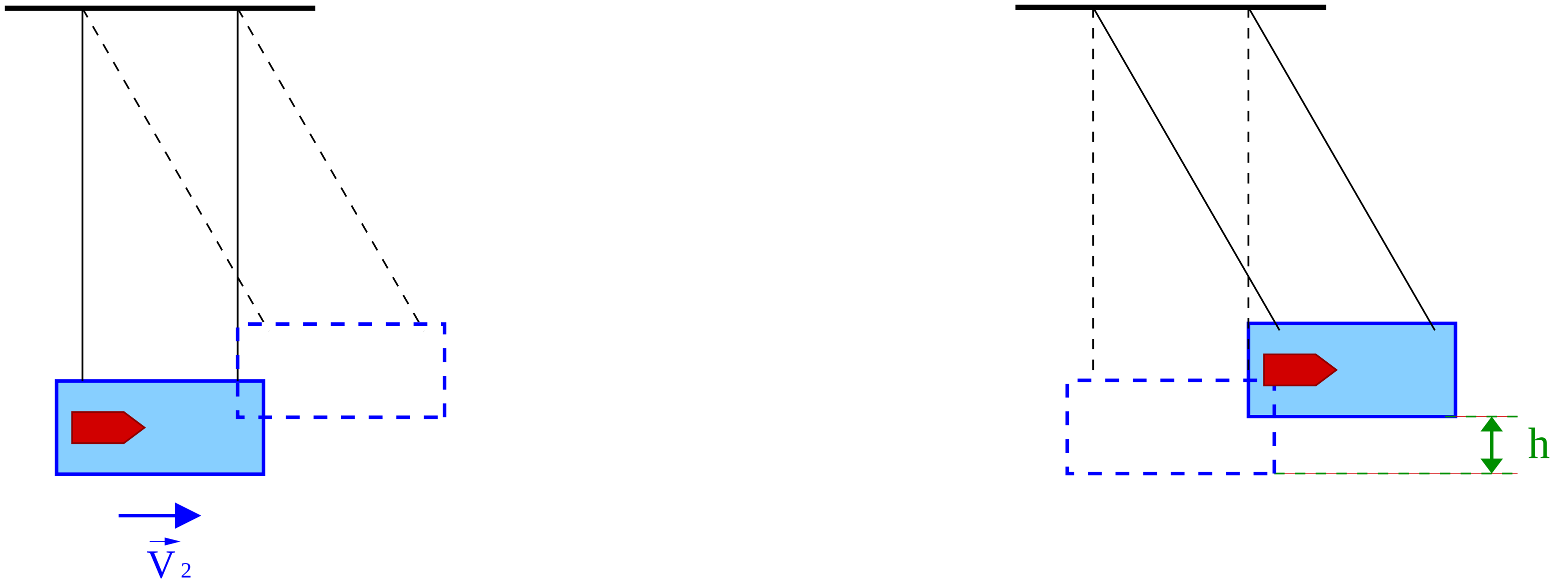
$$\vec{p}_i = m\vec{v}_1 = (m+M)\vec{v}_2 = \vec{p}_f$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{m\,\vec{v}_1}{m+M}$$

Zasada zachowania energii

Wahadło balistyczne

Wahadło wychyla się na wysokość h: energia kinetyczna zamienia się na potencjalną



Z zasady zachowania energii: (przyjmujemy, że w położeniu początkowym $E_p = 0$)

$$E_i = E_k = \frac{(M+m)v_2^2}{2} = E_f = E_p = (M+m)gh \quad E_k = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{v_2^2}{2g}$$

Początkowa energia kinetyczna wahadła NIE jest równa energii kinetycznej pocisku!!!

Zasada zachowania energii

Równania ruchu

Znajomość energii potencjalnej jest rownoważna znajomości siły (zachowawczej):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Czy znając $E_p(\vec{r})$ możemy rozwiązać równania ruchu ciała ?

- Możemy wyznaczyć zależność $\vec{F}(\vec{r})$ i skorzystać z II zasady dynamiki...

albo

- Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii:

$$E \;=\; E_k(\dot{\vec{r}}) \;+\; E_p(\vec{r}) \;=\; const$$

W zależności od zagadnienia jeden albo drugi sposób może być bardziej użyteczny...

Zasada zachowania energii

Dla ruchu prostoliniowego pod działaniem siły zachowawczej $\vec{F}(x)$, energia potencjalna $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x) = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymujemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}}$$

$$t = \int_{x_\circ}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x')\right)}}$$

$\Rightarrow$ Znając $E_p(x)$ możemy zawsze znaleźć związek między x i t.

Zasada zachowania energii

Przykład: $\vec{F} = F\,\vec{i}_x = const \quad \Rightarrow E_p(x) \; = \; -F\,x \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

Przyjmując, że $x = 0$ w chwili $t = 0$ mamy:

$$t \; = \; \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E + F\,x'}}$$

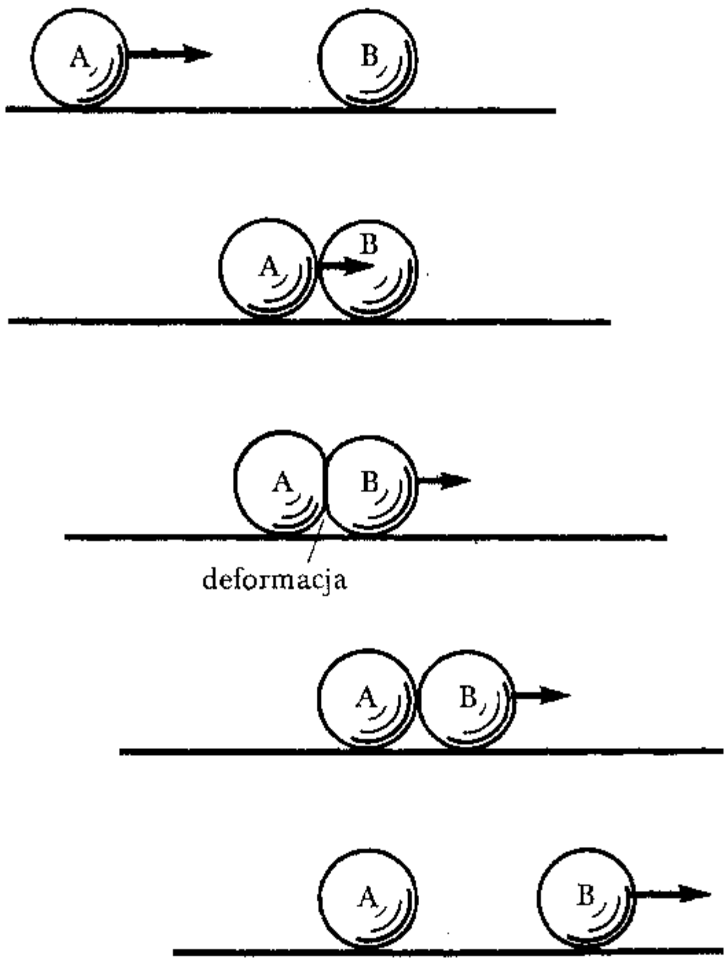
$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{m}}\, t \; = \; \frac{2}{F}\left[\sqrt{E + F\,x'}\right]_0^x \; = \; \frac{2}{F}\sqrt{E + F\,x} - \frac{2}{F}\sqrt{E}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{\sqrt{2m}}\, t + \sqrt{E} \; = \; \sqrt{E + F\,x} \qquad \Rightarrow \quad x \; = \; \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)\cdot t^2 \; + \; \sqrt{\frac{2E}{m}}\cdot t$$

$$\frac{1}{2} \quad a \quad \cdot t^2 \; + \; v_\circ \; \cdot t$$

$v_\circ$ - predkość w chwili $t = 0 \Rightarrow$ energia całkowita $E \; = \; \frac{mv_\circ^2}{2} > 0$

Zderzenia



Poprzednio rozpatrywaliśmy zderzenia ciał z punktu widzenia zasady zachowania pędu (i momentu pędu)

zasada zachowania pędu jest zawsze bezwzględnie spełniona

Czy zachowana jest energia kinetyczna ?

TAK

- jeśli działające siły mają charakter zachowawczy

siły kulombowskie, siły spężystości

$$\Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_k = 0$$

NIE

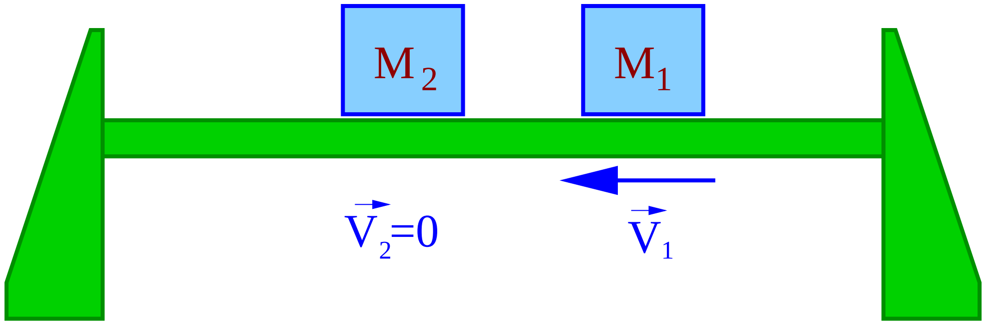
- jeśli mamy wkład sił niezachowawczych

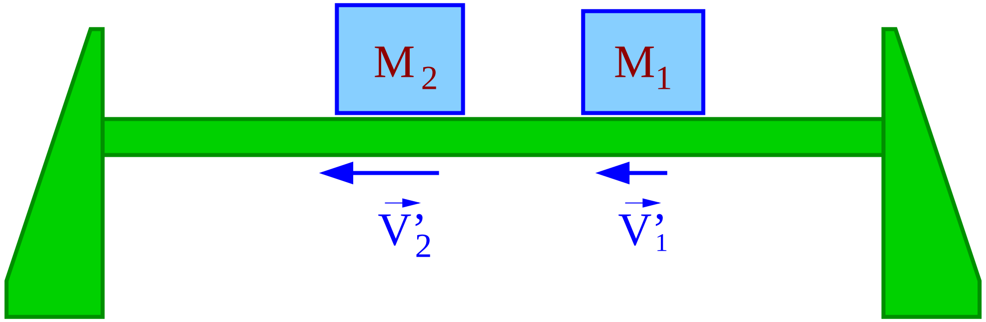
w wyniku zderzenia następują trwałe zmiany (np. odkształcenia) w zderzających się ciałach

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przypadek jednowymiarowy:





Z zasad zachowania:

$$\begin{array}{llcl} & \text{po} & & \text{przed} \\ p: & m_1 V_1' + m_2 V_2' & = & m_1 V_1 \\ E: & \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} & = & \frac{m_1 V_1^2}{2} \end{array}$$

Przekształcamy:

$$p: \quad m_2 V_2' = m_1 (V_1 - V_1')$$

$$\begin{aligned} E: \quad m_2 V_2'^2 &= m_1 (V_1^2 - V_1'^2) \\ &= m_1 (V_1 - V_1')(V_1 + V_1') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_2' = V_1 + V_1' \quad \Rightarrow V_2' - V_1' = V_1$$

wartość bezwzględna prędkości względnej przed i po zderzeniu jest taka sama

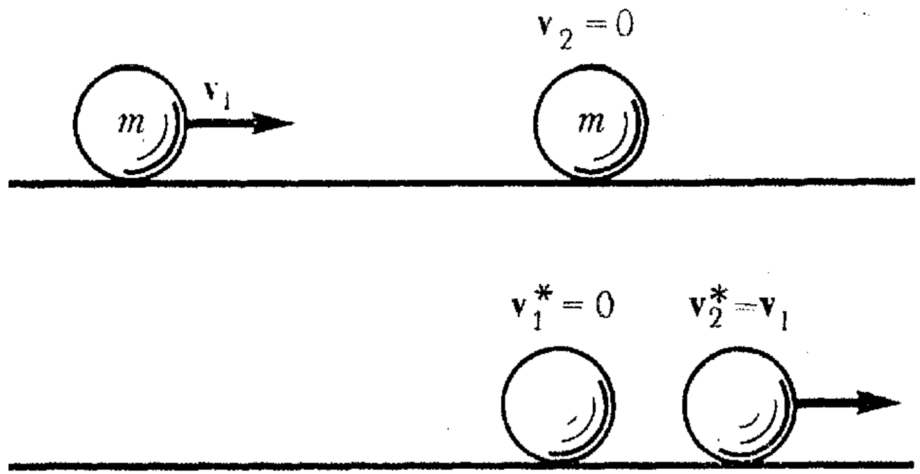
Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przekształcając dalej otrzymujemy:

$$m_2\,(V_1 + V_1') \;=\; m_1\,(V_1 - V_1')$$

$$\Rightarrow \quad V_1'\,(m_1 + m_2) \;=\; V_1\,(m_1 - m_2)$$



Ostatecznie:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,V_1$$

$$V_2' = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,V_1$$

Przypadek szczególny: $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow \quad V_1' = V_2 = 0$$
$$V_2' = V_1$$

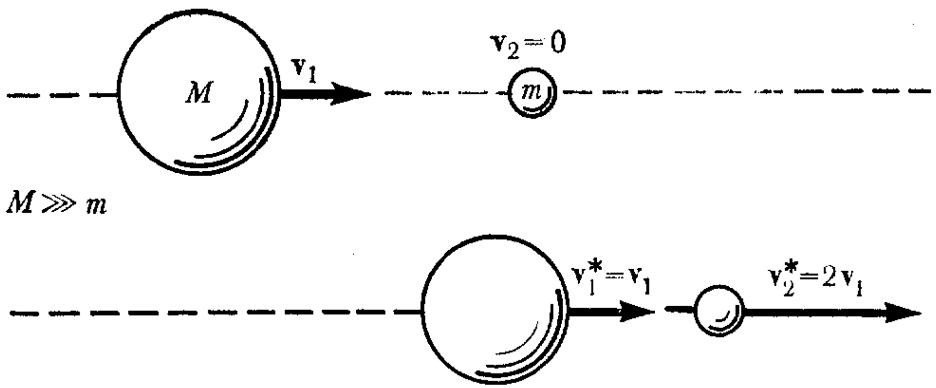
Zderzające się ciała "wymieniają się" prędkościami; rozwiązanie słuszne także w przypadku $\vec{V}_2 \neq 0$

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$m_1 \;>\; m_2$

Masa "pocisku" większa od masy "tarczy":



Przypadek graniczny: $m_1 \;\gg\; m_2$

$$\Rightarrow \quad V_1' \;=\; \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,V_1 \;= V_1$$

$$V_2' \;=\; \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,V_1 \;= 2 \cdot V_1$$

"Pocisk" nie zauważa zderzenia

"Tarcza" uzyskuje prędkość $2 \cdot V_1$

Otrzymujemy: $V_2' > V_1' > 0$

Po zderzeniu oba ciała poruszają się w tą samą stronę.

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$m_1 \; < \; m_2$

Masa “pocisku” mniejsza od masy “tarczy”:

Otrzymujemy:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 < 0$$

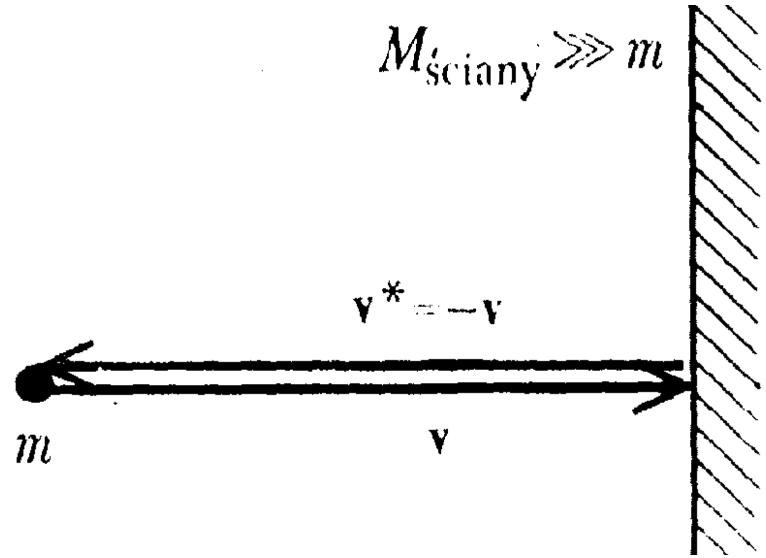
$$V_2' = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} V_1 > 0$$

Prędkość “pocisku” zmienia znak

$\Rightarrow$ “pocisk” odbija się od “tarczy”

Przypadek graniczny: $m_1 \;\ll\; m_2$

$$\Rightarrow \quad V_1' = -V_1$$
$$V_2' = 0$$



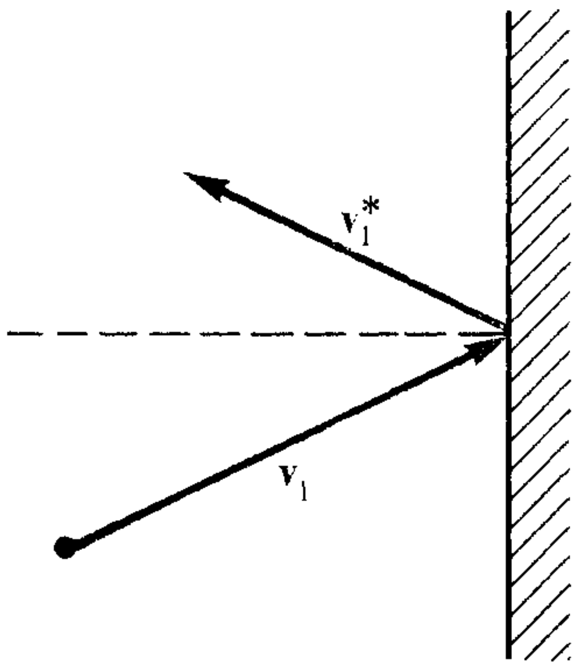
Sprężyste odbicie od nieruchomej “ściany”

Zderzenia

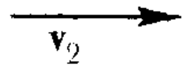
$m_1 \ll m_2$

“Tarcza” oddala się od “pocisku”

(“ściana”)

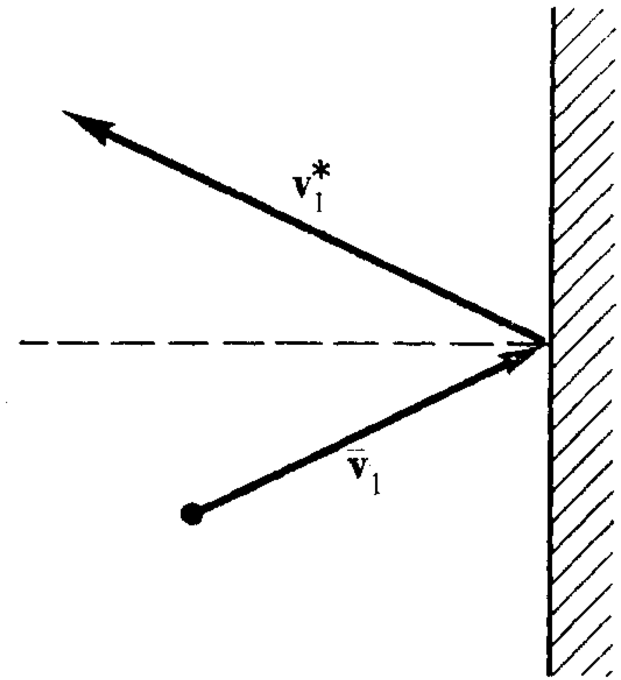


“pocisk” traci energię

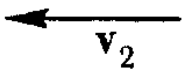


“Tarcza” przybliża się do “pocisku”

(“ściana”)



“pocisk” zyskuje energię

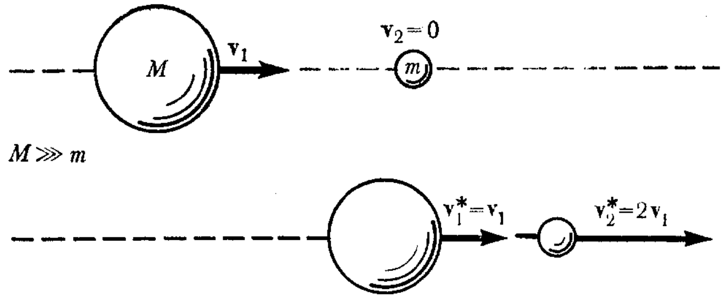


Mikroskopowy obraz ochładzania (ogrzewania) się gazu przy rozprężaniu (sprężaniu)

Zderzenia

Zderzenia centralne

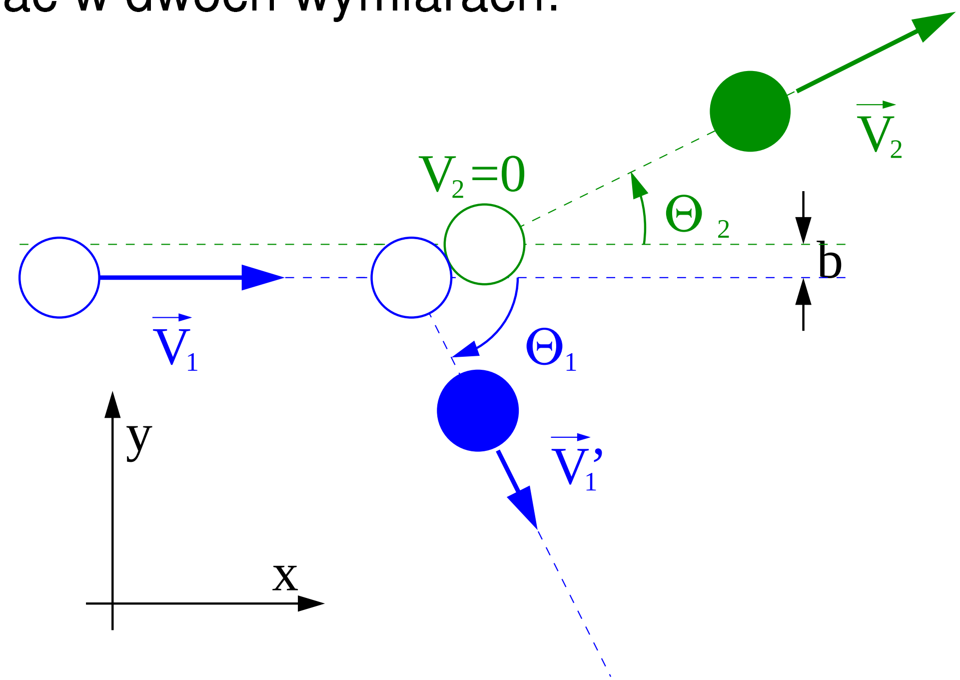
Do tej pory rozpatrywaliśmy tzw. zderzenia centralne, dla których "pocisk" trafia w sam środek "tarczy"



parametr zderzenia (odległość między pierwotnym torem pocisku i środkiem tarczy) $b = 0$

Zderzenia nie centralne

W przypadku gdy $b \neq 0$ zderzenie trzeba rozpatrywać w dwóch wymiarach:



Wciąż nie jest to sytuacja najbardziej ogólna!

Uwzględniamy rozmiary pocisku i tarczy, ale traktujemy je jako punkty materialne, zaniedbujemy ruch obrotowy (wirowanie, toczenie).

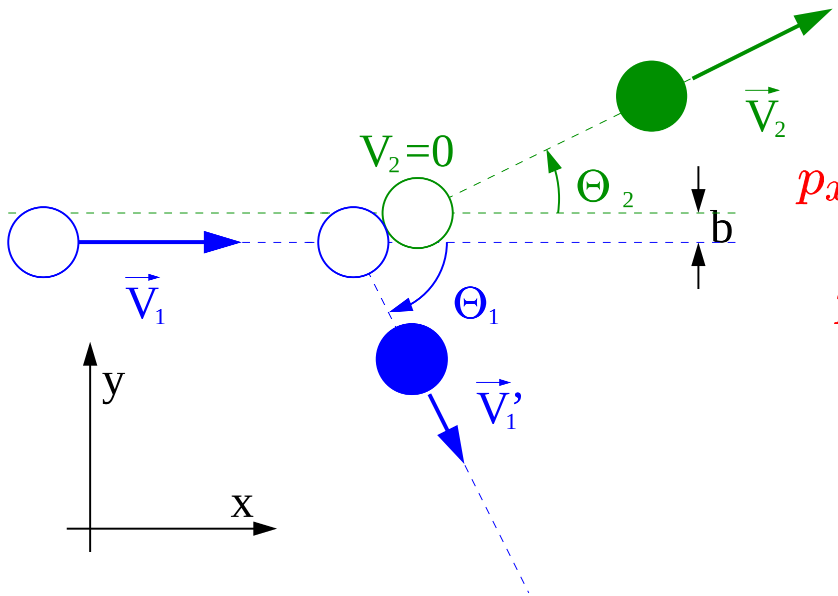
Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Znajomość mas m_1, m_2 i prędkości pocisku V_1 ($V_2 = 0$) nie wystarcza do wyznaczenia pełnej kinematyki zderzenia (prędkości i kątów rozproszenia: V_1', V_2', θ_1 i θ_2) !

$\Rightarrow$ możemy ustalić b, ale wygodniej ustalić jeden z parametrów rozproszenia np. kąt θ_1

Przyjmijmy, że rozpraszanie zachodzi w płaszczyźnie XY



Z zasady zachowania pędu:

po zderzeniu | przed

$$p_x : \quad m_2 V_2' \cos\theta_2 + m_1 V_1' \cos\theta_1 = m_1 V_1$$

$$p_y : \quad m_2 V_2' \sin\theta_2 - m_1 V_1' \sin\theta_1 = 0$$

Dla zderzeń spężystych mamy też:

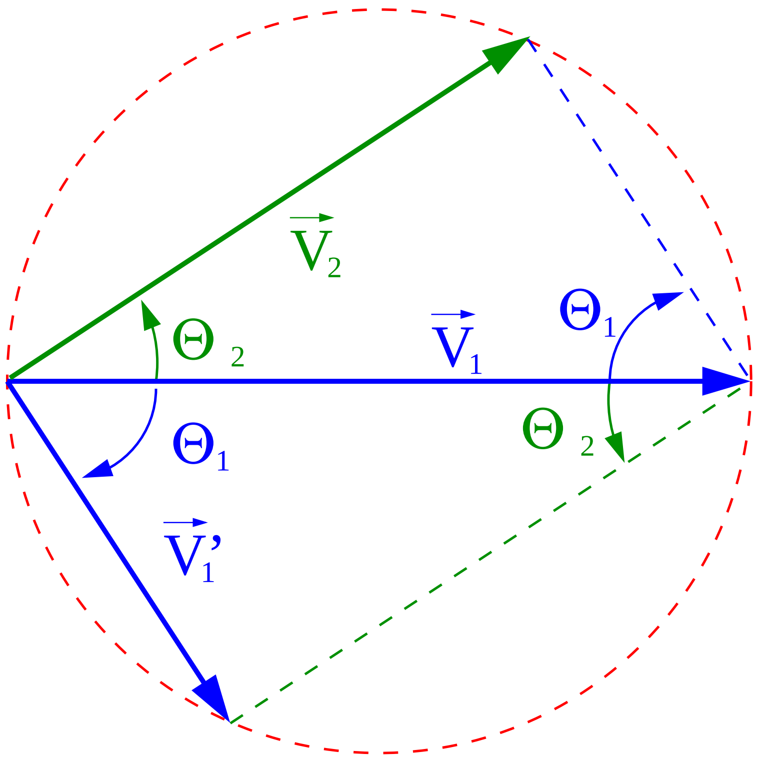
$$E_k : \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Jeśli masy zderzających się sprężyście ciał są równe

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ zagadnienie bardzo się upraszcza



Z zasad zachowania:

$$\vec{V'}_1 + \vec{V'}_2 = \vec{V}_1$$

$$V_1'^2 + V_2'^2 = V_1^2$$

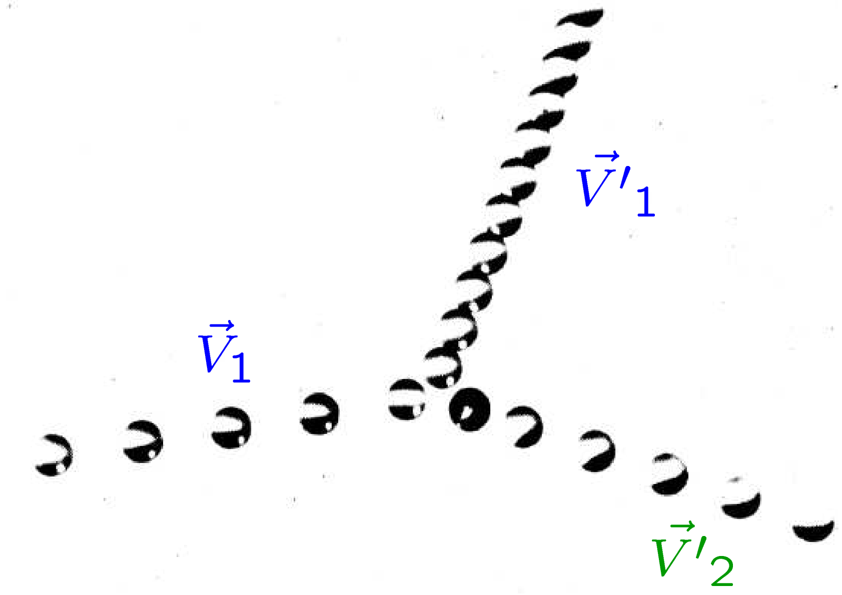
$\Rightarrow$ wektory $\vec{V}_1$, $\vec{V'}_1$ i $\vec{V'}_2$ tworzą trójkąt prostokątny.

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

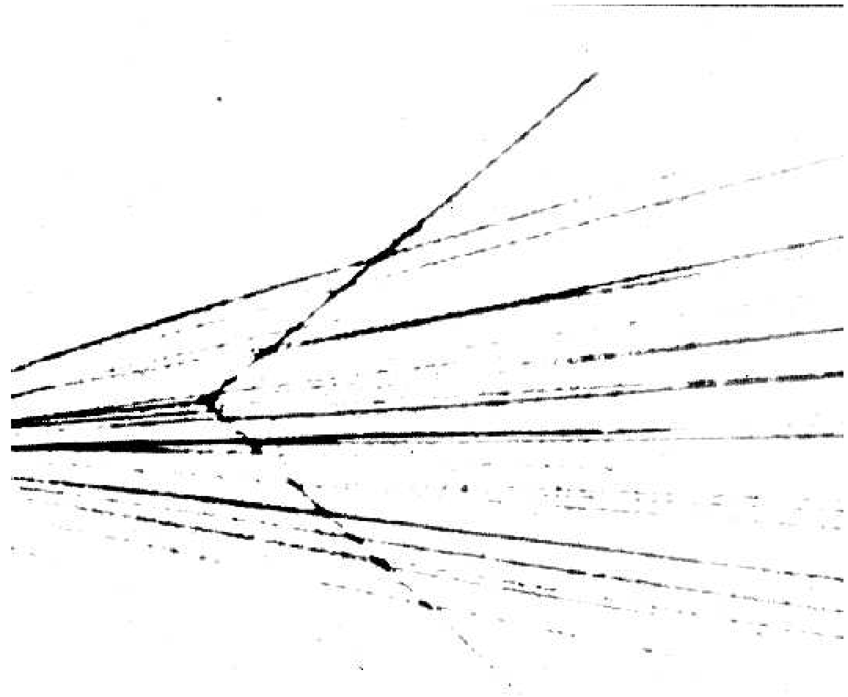
Zderzenia

$m_1 = m_2$

Fotografia zderzających się kul:



Zderzenie proton-proton w komorze pęcherzykowej:

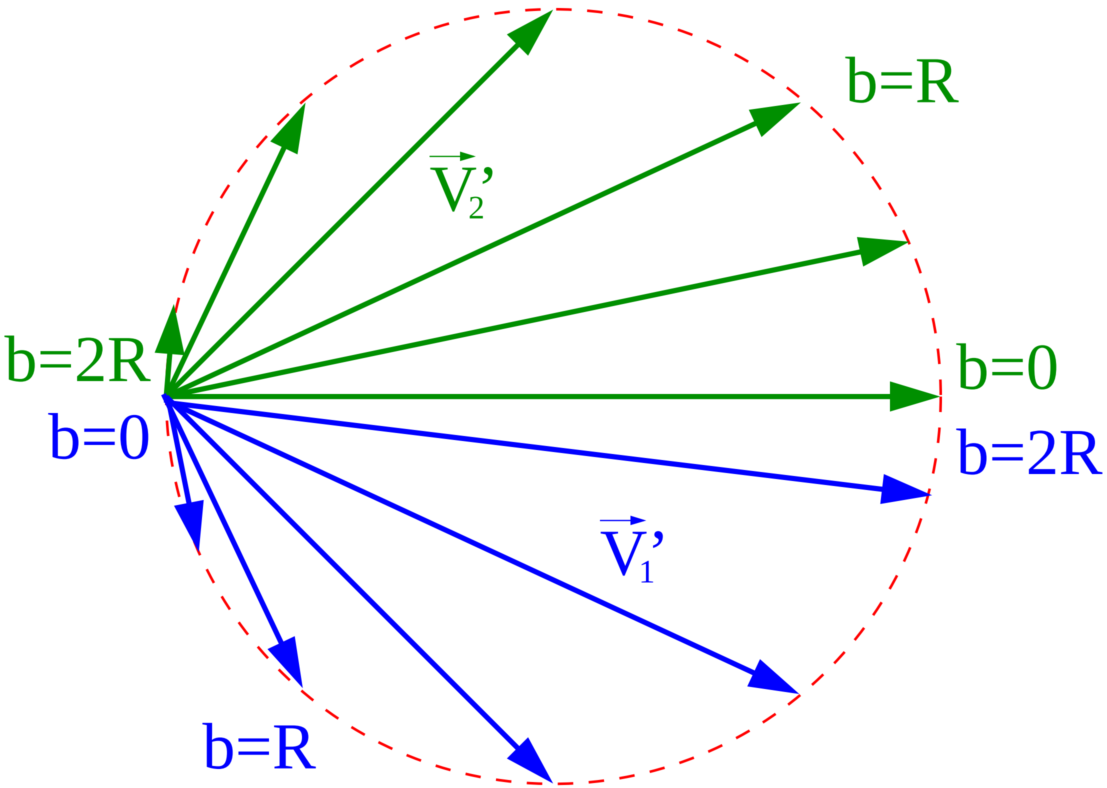


niska energia padającej wiązki

$\Rightarrow$ dynamika nierelatywistyczna

Zderzenia

$m_1 = m_2$



Stan końcowy pocisku i tarczy zależy od parametru zderzenia b

- $b = 0 \Rightarrow$ zderzenie centralne

$$\vec{V'}_2 = \vec{V}_1$$
$$\vec{V'}_1 = 0$$

- $0 < b < 2R \Rightarrow$ zderzenie nie centralne, ciała "dzielą się" początkową energią i pędem

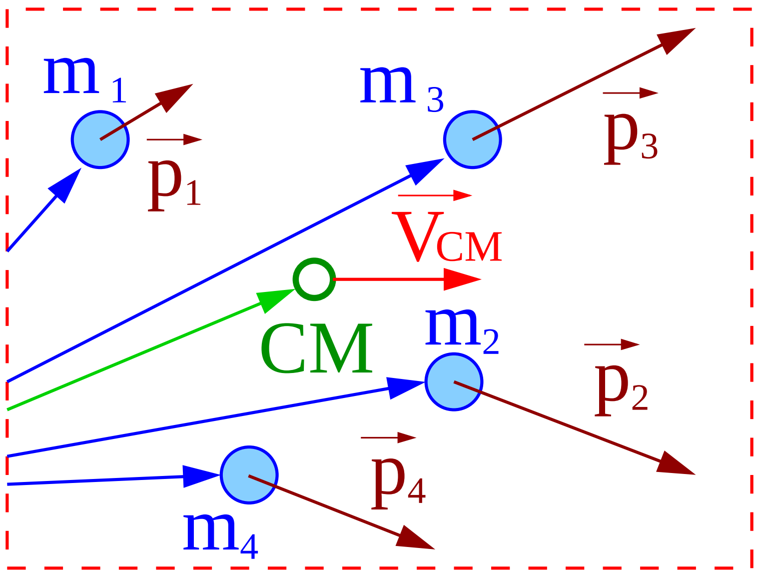
- $b >= 2R \Rightarrow$ brak zderzenia (kule mijają się)

$$\vec{V'}_2 = 0$$
$$\vec{V'}_1 = \vec{V}_1$$

Układ środka masy

Układ izolowany

Izolowany układ wielu ciał:



układ inercjalny

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Środek masy

Klasyczna definicja położenia środka masy:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$\Rightarrow$ średnia ważona z $\vec{r}_i$ (z wagami $w_i = m_i$)

Ruch środka masy: m_i=const

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_i m_i\right) \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M\,\vec{V}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

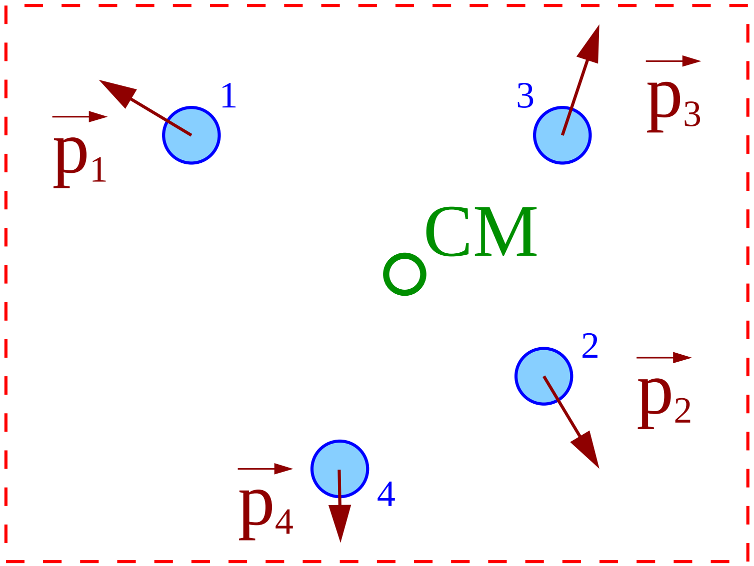
pęd układu możemy związać z ruchem środka masy

Układ środka masy

Prędkość środka masy: (klasycznie)

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Zawsze możemy tak zmienić układ odniesienia, żeby środek masy spoczywał



$\Rightarrow$ układ środka masy (CMS)

Układ środka masy

Układ środka masy jest w wielu przypadkach najwygodniejszym układem odniesienia

$\Rightarrow$ szereg relacji bardzo się upraszcza

Zasada zachowania pędu w CMS:
(zmienne w CMS oznaczamy *)

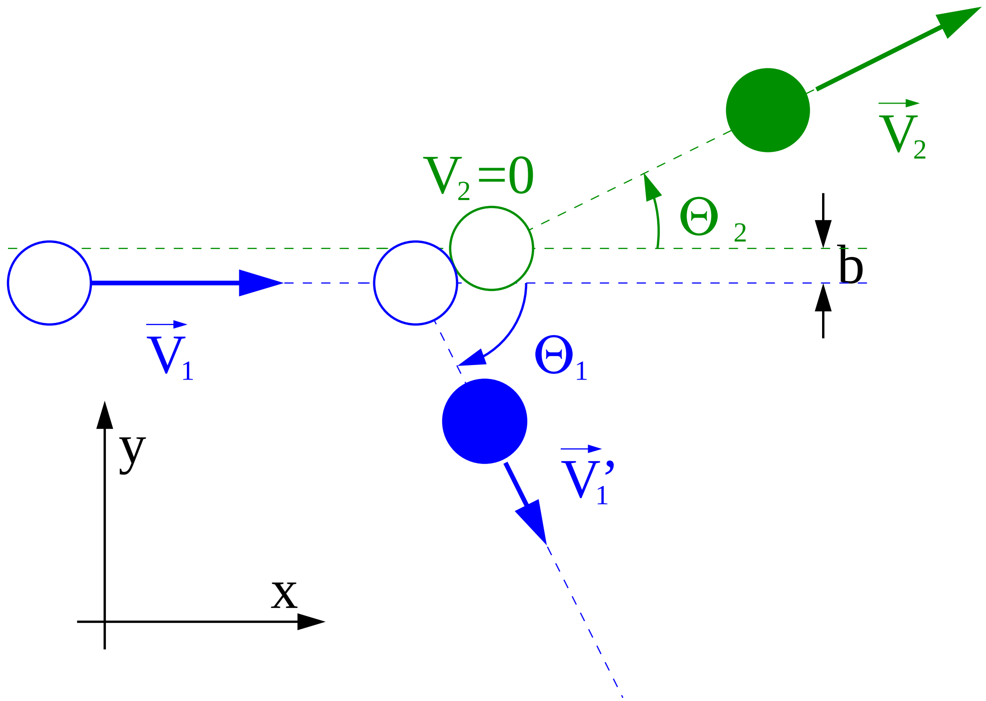
$$\vec{P}^\star = \sum_i \vec{p}_i^{\,\star} = 0$$

ogólna definicja układu środka masy słuszna także w przypadku $v \sim c$

Układ środka masy

Zderzenia nie centralne

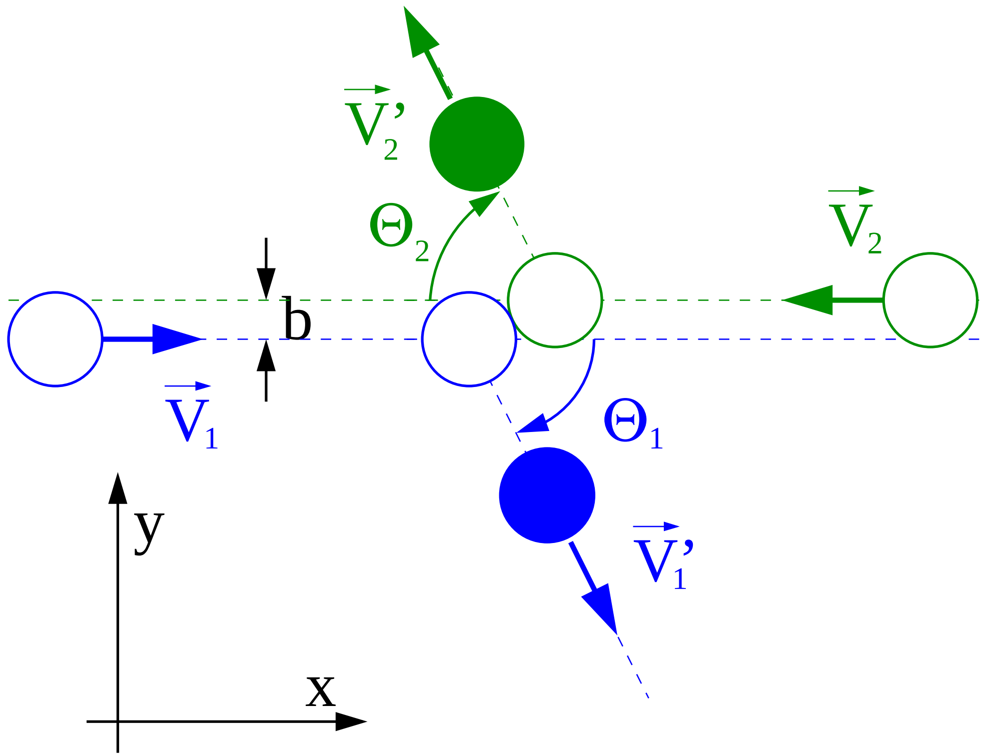
Układ laboratoryjny:



Skomplikowane wyrażenia na prędkości końcowe w funkcji np. kąta rozproszenia θ_1.

Łatwiej jeśli $m_1 = m_2$

Układ środka masy:



Zasada zachowania pędu: $\vec{P}^\star = 0$

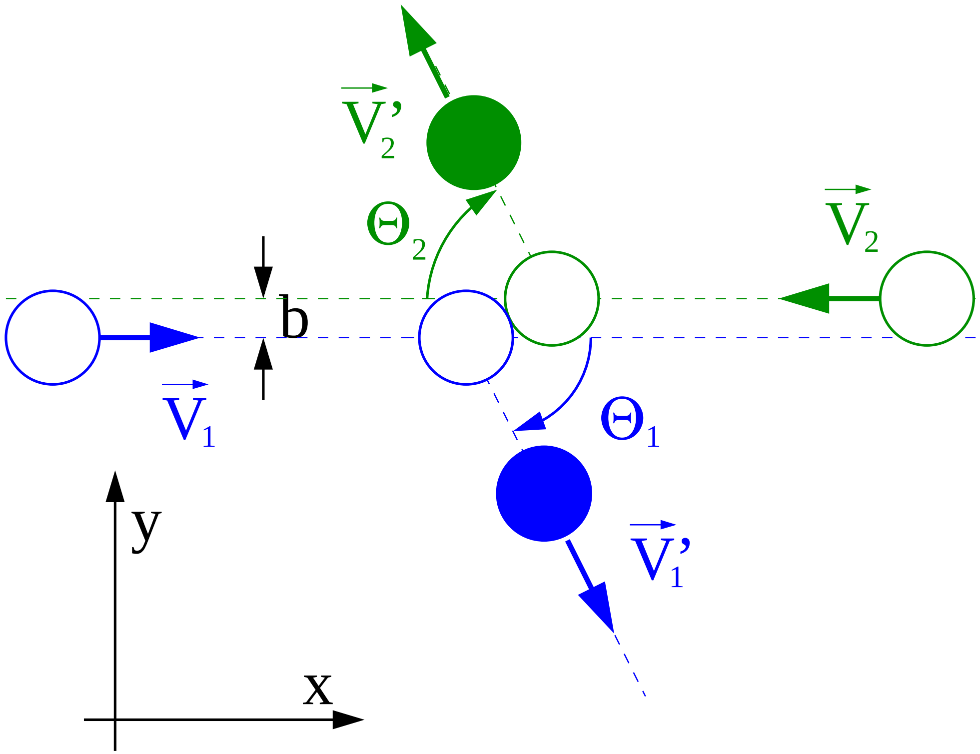
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

Układ środka masy

Zderzenia sprężyste

Układ środka masy:



Z definicji CMS: $V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1$

Zasada zachowania energii:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}$$

$$\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1'^2$$

$$\Rightarrow \quad V_1' = V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2' = V_2$$

Niezależnie od mas zderzających się ciał, wartości ich prędkości przed i po zderzeniu sprężystym są takie same.

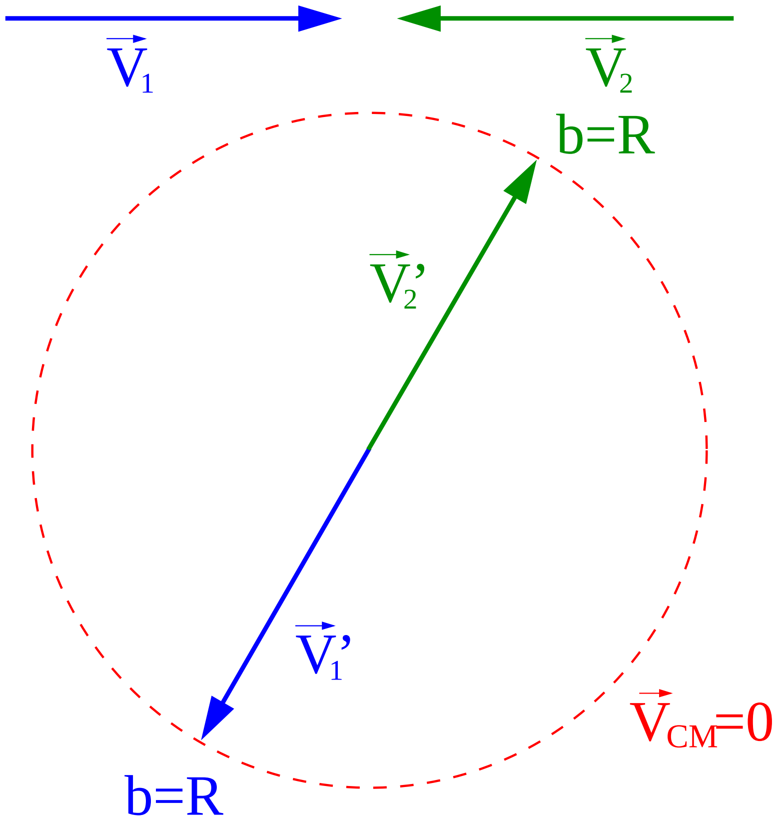
W układzie środka masy !

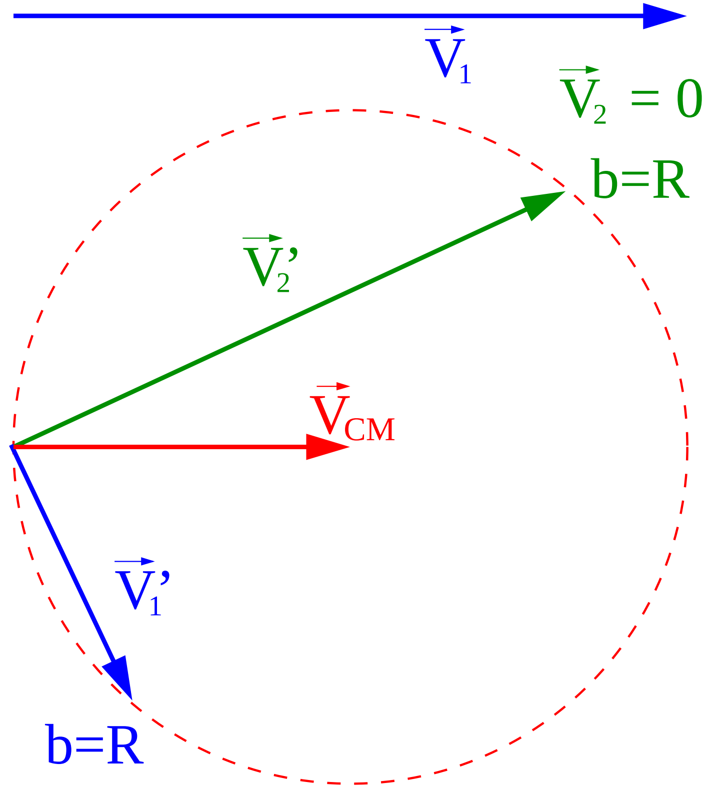
Układ środka masy

$m_1 = m_2$

Układ środka masy:

Układ laboratoryjny:



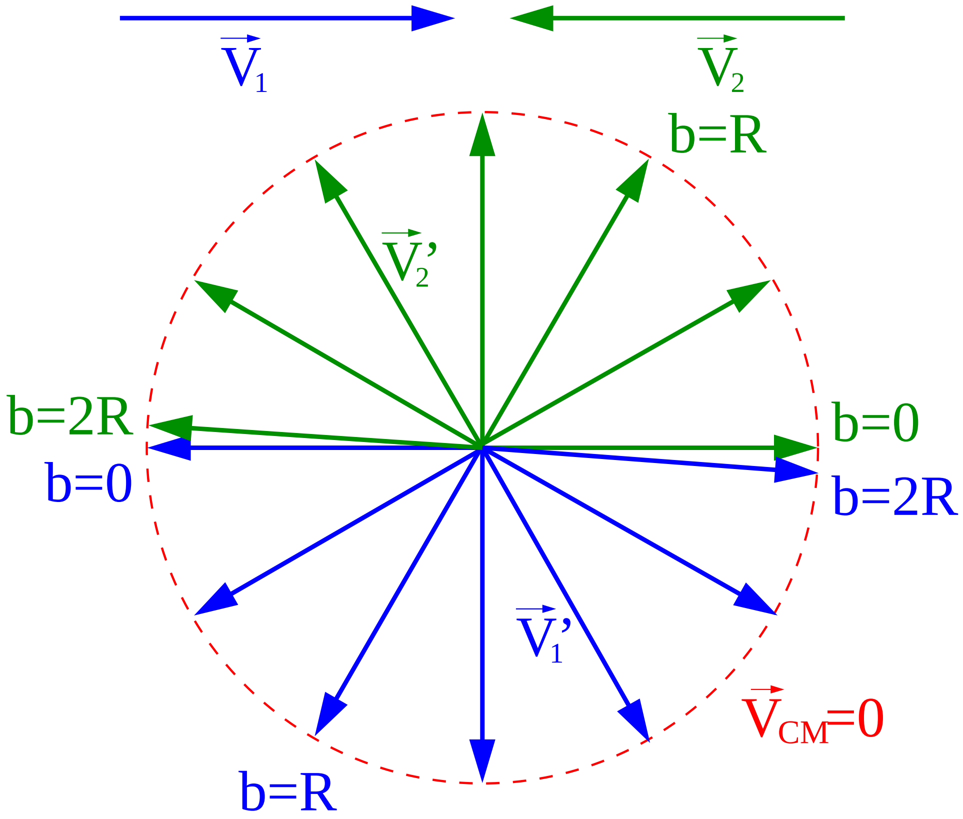


Do wszystkich prędkości dodane $\vec{V}_{CM}$

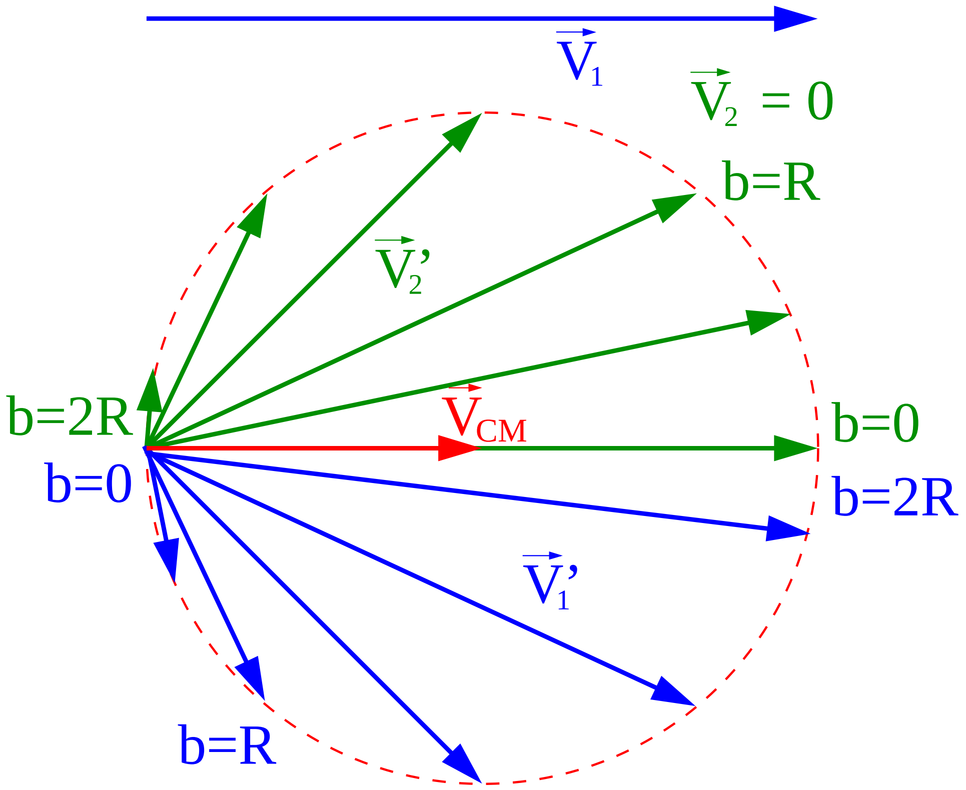
Układ środka masy

$m_1 \ = \ m_2$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny:

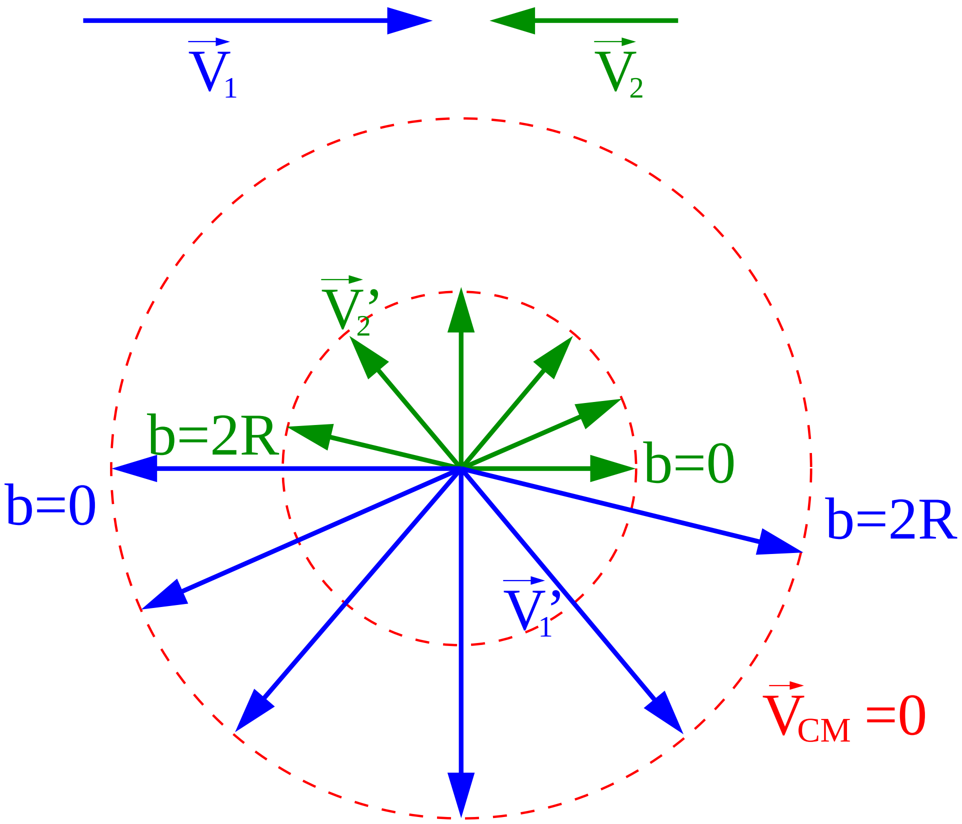


Do wszystkich prędkości dodane $\vec{V}_{CM}$

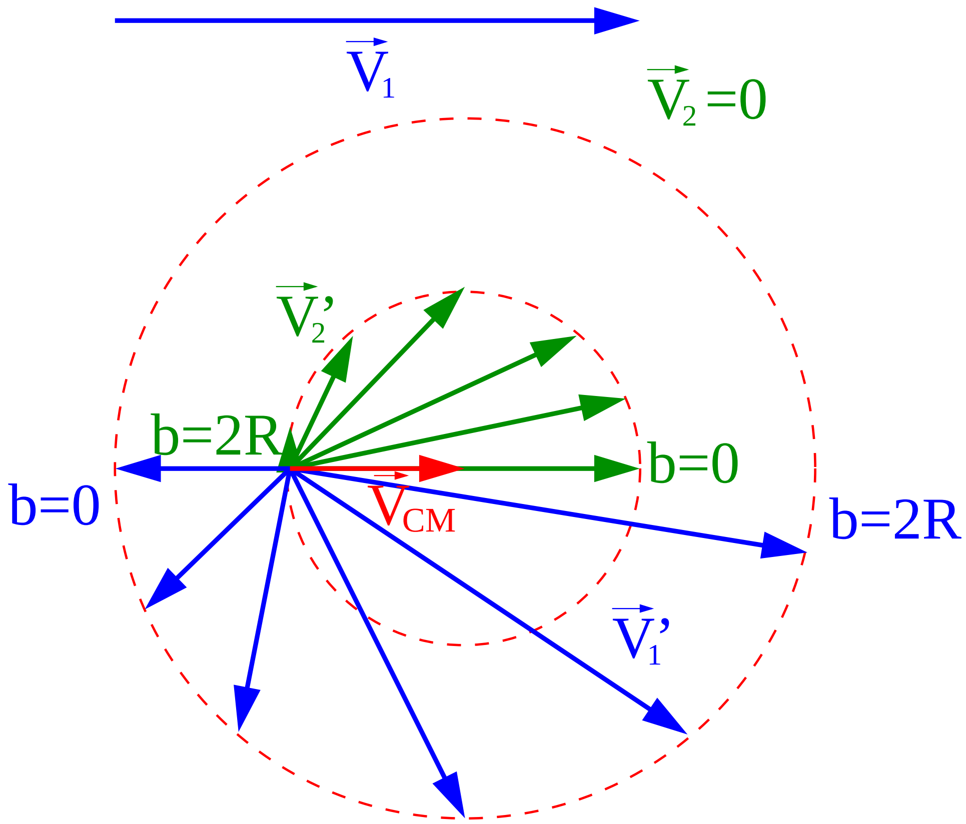
Układ środka masy

$m_1 \;<\; m_2$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny



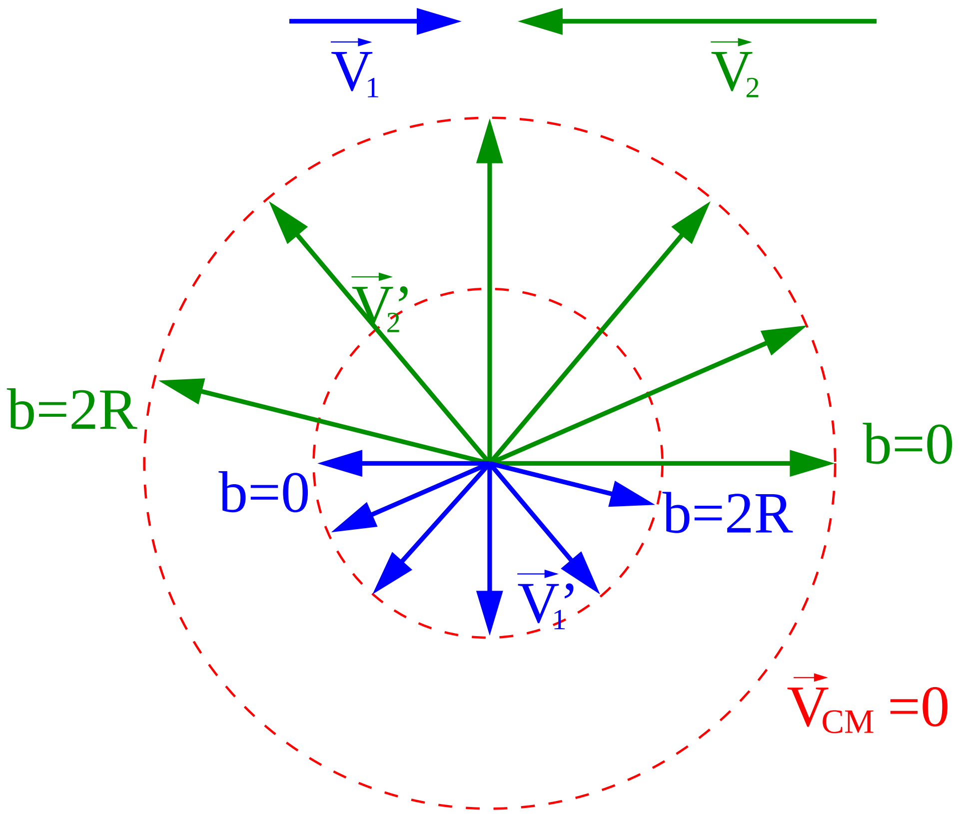
Dla $m_1 = \frac{1}{2} m_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2\,v_2$

$V_{CM} \;=\; \frac{1}{3}\,V_1$

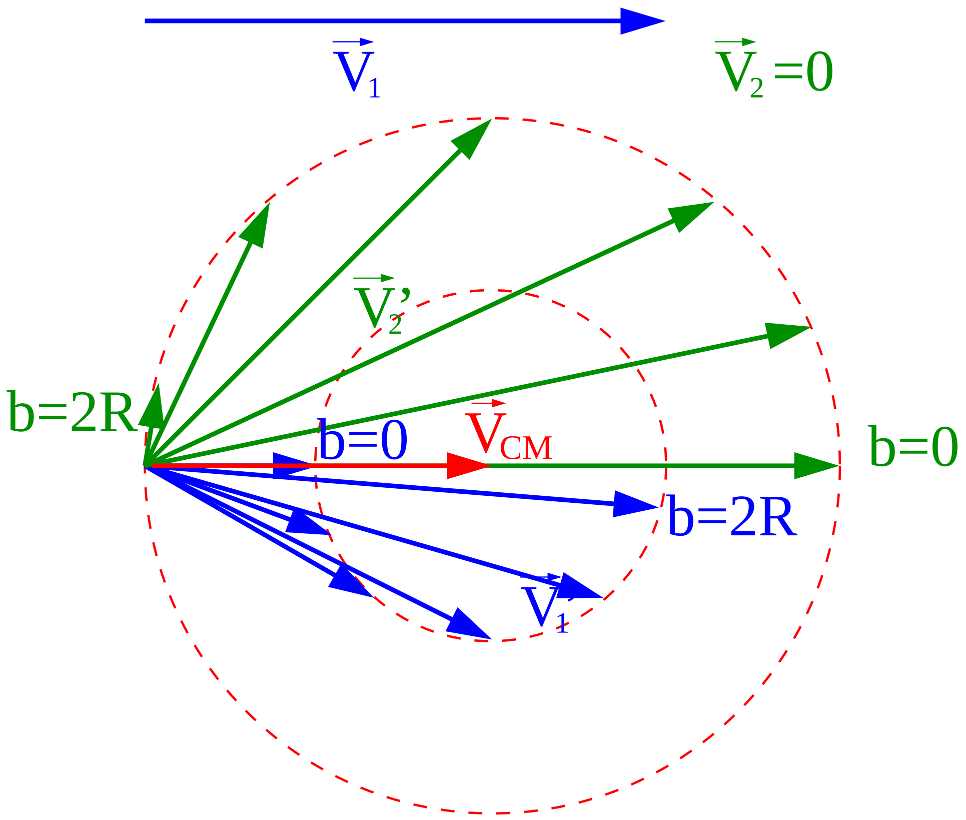
Układ środka masy

$m_1 \; > \; m_2$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny:



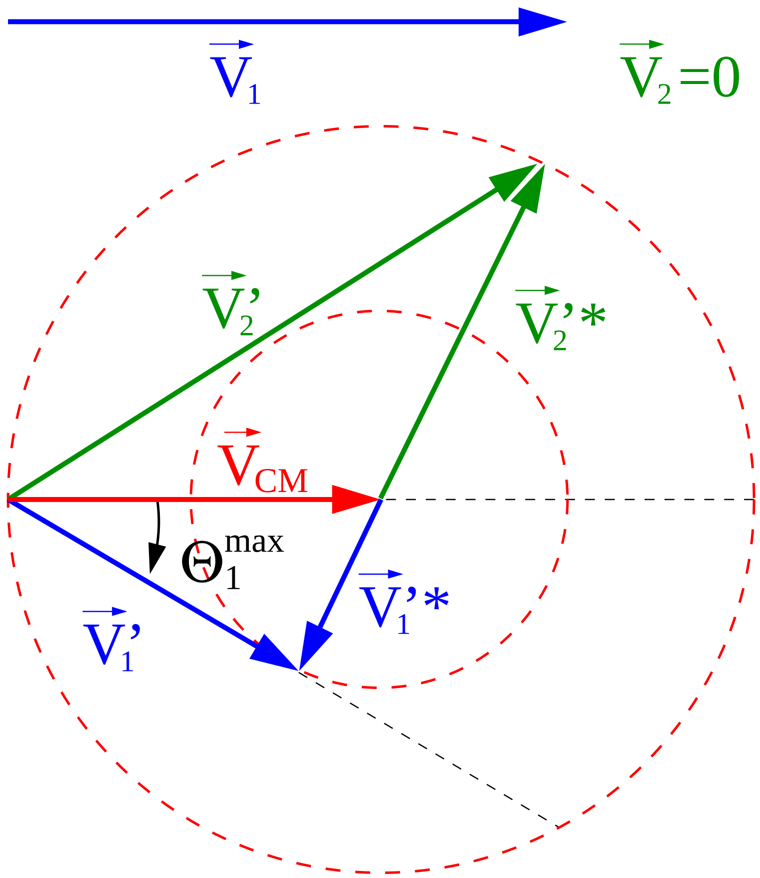
Dla $m_1 = 2\,m_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{2} v_2$

$$V_{CM} = \frac{2}{3} V_1$$

Układ środka masy

$m_1 > m_2$

Układ laboratoryjny:



Związek między prędkościami:

$$V_{CM} = v_2^\star = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

$$v_1^\star = \frac{m_2}{m_1} v_2^\star = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

Maksymalny kąt rozproszenia “pocisku”:

$$\sin \theta_1^{max} = \frac{v_1^\star}{V_{CM}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Dla “tarczy” ograniczenie nie zależy od stosunku mas:

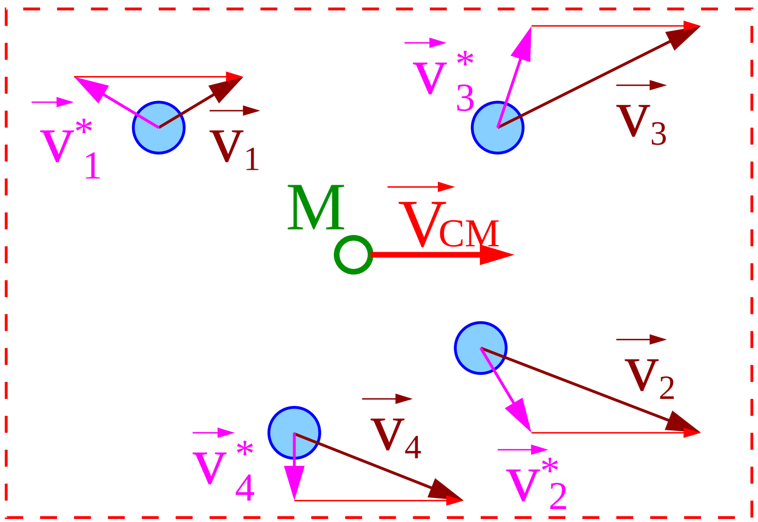
$$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

Układ środka masy

Energia układu

Transformacja prędkości:

$$\vec{v_i} = \vec{v_i}^\star + \vec{V}_{CM}$$



Energia kinetyczna układu:

$$E_k = \sum_i \frac{m_i\, v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i\, |\vec{v_i}^\star + \vec{V}_{CM}|^2}{2}$$

$$= \sum_i \left(\frac{m_i\, (v_i^\star)^2}{2} + 2\frac{m_i\, \vec{v_i}^\star \vec{V}_{CM}}{2} + \frac{m_i\, V_{CM}^2}{2} \right)$$

Z zasady zachowania pędu:

$$\sum_i m_i\, \vec{v_i}^\star \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM} \sum_i m_i\, \vec{v_i}^\star = \vec{V}_{CM}\, \vec{P}^\star = 0$$

Ostatecznie:

$$E_k = E_k^\star + \frac{M\, V_{CM}^2}{2}$$

Energia kinetyczna układu jest sumą energii “wewnętrznej” ($E_k^\star$) i energii kinetycznej układu jako całości.

Układ środka masy

Ruch środka masy

Dla układu izolowanego

$$\vec{P} = \text{const}$$

środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym   I Zasada Dynamiki

Pod działaniem sił zewnętrznych:

$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw}$$

zmiana pędu układu:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{zw} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}^{zw} \end{aligned}$$

II Zasada Dynamiki

W oparciu o pojęcie środka masy możemy opisać ruch układu jako całości stosując równania ruchu punktu materialnego.

Zasada zachowania momentu pędu

Siły centralne

Jeśli układ ciał (lub pojedyńcze ciało) działa jakaś siła zewnętrzna $\vec{F}_{tot} \neq 0$ to pęd układu musi się zmieniać: $\sum \vec{p}_i \neq$ const.

Siły które działają na układ często są
siłami centralnymi - działają w kierunku ustalonego źródła siły.

Jeśli położenie źródła przyjmiemy za środek układu $\Rightarrow \vec{F}_{tot} = F(r, \ldots) \cdot \vec{i}_r$

Przykład:

- siła grawitacyjna $F(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
- siła kulombowska $F(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_\circ r^2}$
- siła spężysta $F(r) = -k \cdot r$

Czy można coś “uratować” z zasady zachowania pędu ?...

Zasada zachowania momentu pędu

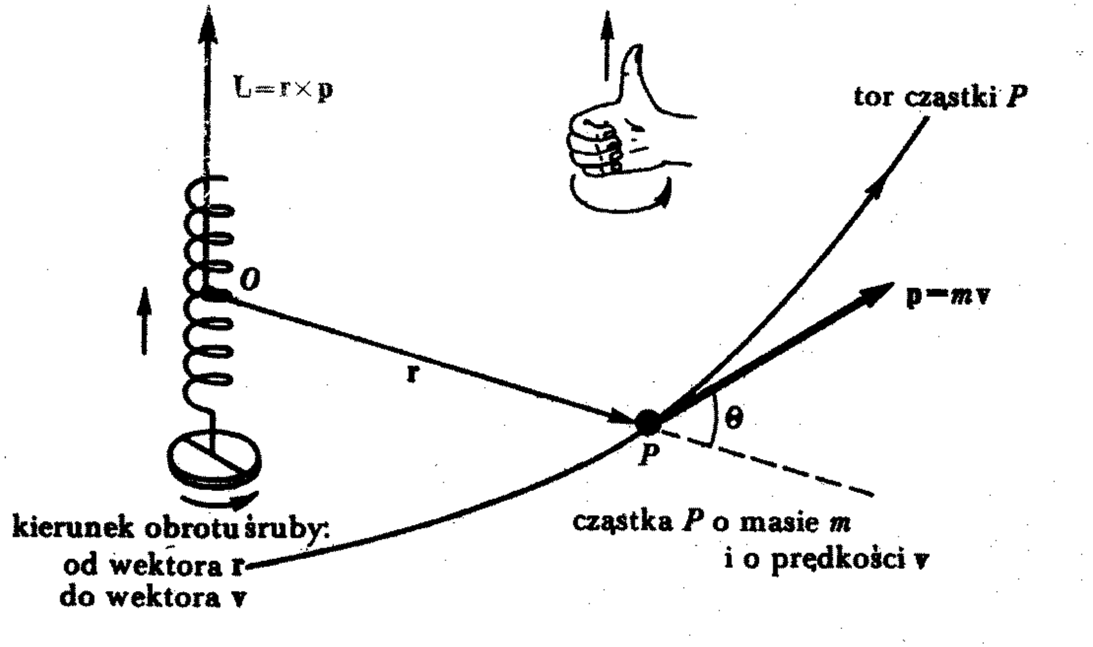
Moment pędu

Zdefiniujmy dla punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\Leftarrow$ moment pędu **względem O**

zależy od wyboru początku układu



Dla $v \ll c$

$$\vec{L} = m\, \vec{r} \times \vec{v}$$
$$L = m\, r\, v \sin\theta$$

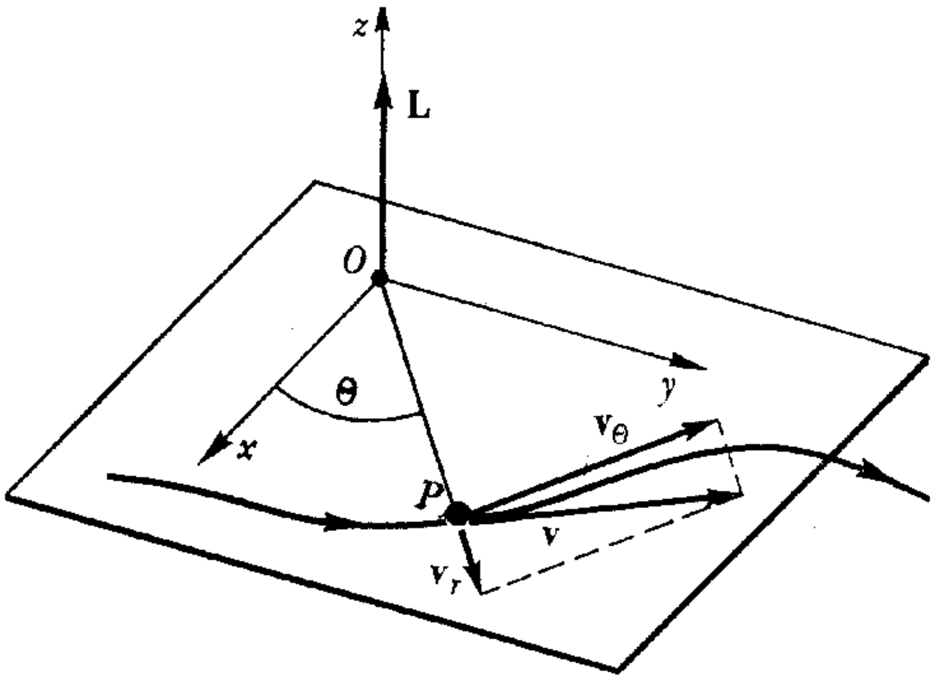
Kierunek wektora momentu pędu jest prostopadły do płaszczyzny ruchu, zwrot z reguły śruby prawoskrętnej

Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu

Ruch po płaszczyźnie:

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$
$$L = m\,r\,v_\theta$$
$$\Rightarrow \quad L = m\,r^2 \frac{d\theta}{dt} = m\,r^2\,\omega$$



Przypadek szczególny:

ruch po okręgu - r=const

Zdefiniujmy moment bezwładności

$$I = m\,r^2$$

(dla punktu materialnego)

$\Rightarrow$ moment pędu możemy przedstawić w ogólnej postaci

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

ω - prędkość kątowa

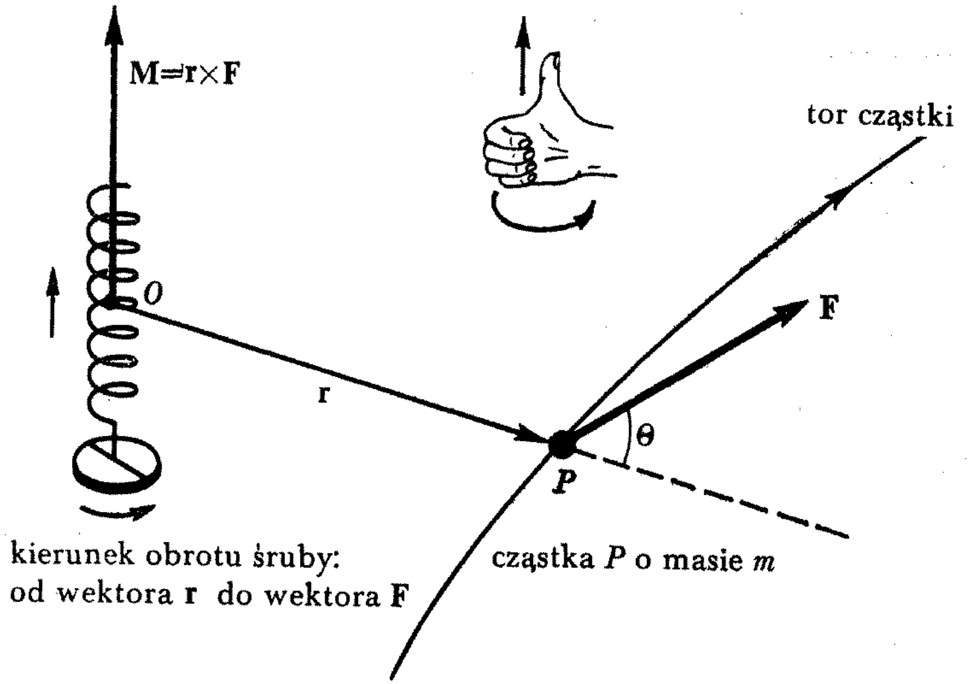
Zasada zachowania momentu pędu

Moment siły

Definiujemy analogicznie do momentu pędu

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\Leftarrow$ moment siły **względem O**



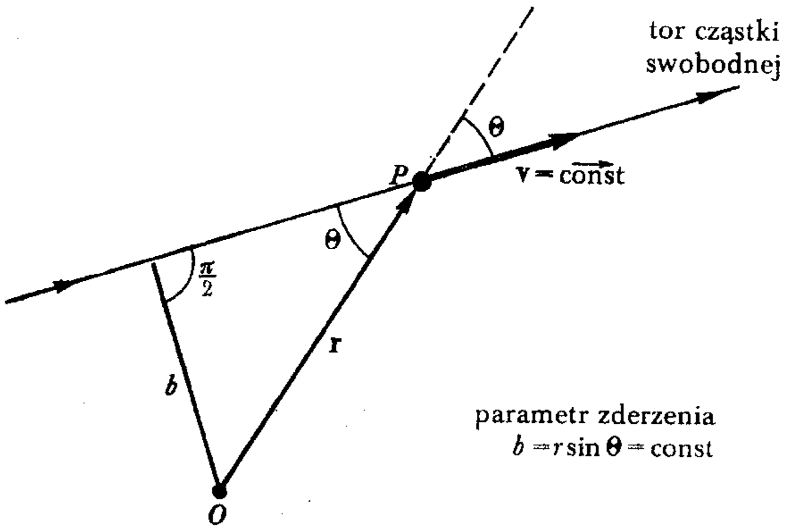
Z II zasady dynamiki

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \\
&= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\
&= 0 + \vec{M}
\end{aligned}$$

$$\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Cząstka swobodna



Moment pędu względem dowolnego punktu 0 pozostaje stały:

$$L = m\,v\,r\,\sin\theta = m\,v\,b = \text{const}$$

b - parametr zderzenia
odległość najmniejszego zbliżenia do O

Siła centralna

Moment siły: (względem źródła)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= \vec{r} \times \vec{i}_r \cdot F(r, \ldots) = 0$$

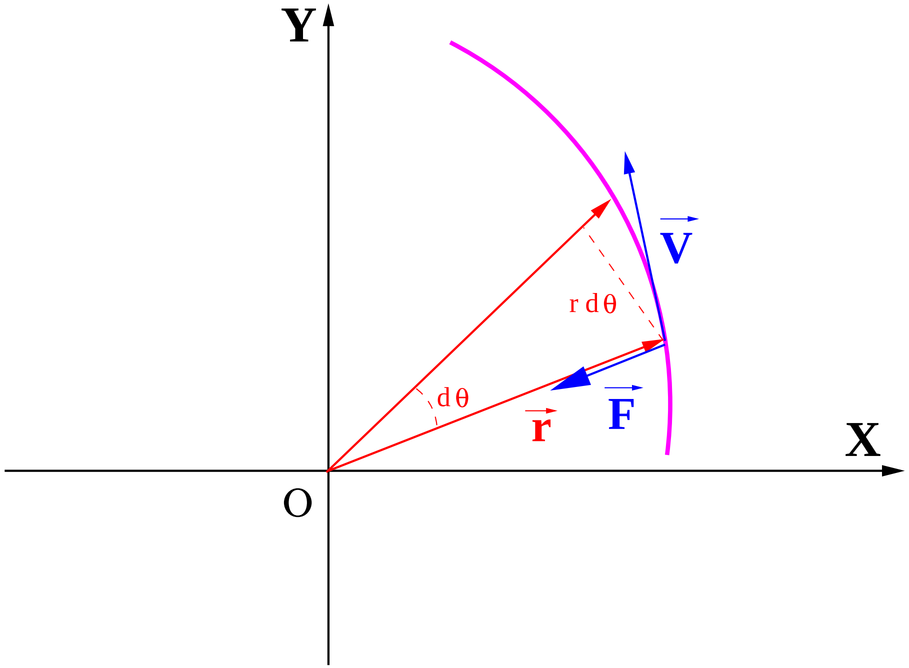
$$\boxed{\vec{L} = \text{const}}$$

Moment pędu, liczony względem źródła siły centralnej pozostaje stały.

Zasada zachowania momentu pędu

Prędkość polowa

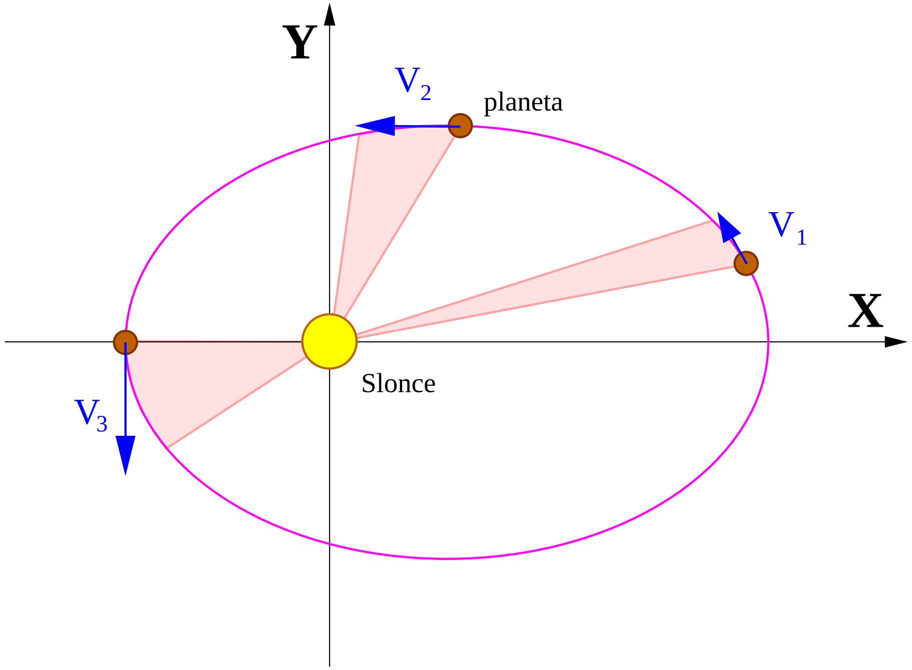
Pole jakie wektor wodzący punktu zakreśla w jednostce czasu: $\frac{dS}{dt}$



$$dS = \frac{1}{2}\, r\, r d\theta = \frac{1}{2}\, |\vec{r} \times \vec{dr}| = \frac{1}{2}\, |\vec{r} \times \vec{v}|\, dt$$

II prawo Keplera

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\, |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{L}{2\,m} = \text{const}$$



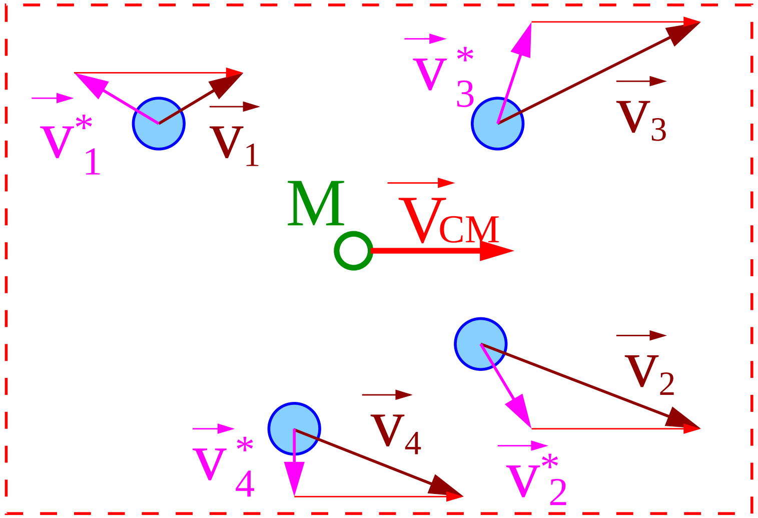
W ruchu pod działaniem sił centralnych prędkość polowa jest stała.

Układ środka masy

Moment pędu układu

Transformacja galileusza:

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}^\star + \vec{R}_{CM}$$
$$\vec{v_i} = \vec{v_i}^\star + \vec{V}_{CM}$$



Całkowity moment pędu względem początku układu

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i\,\vec{r_i} \times \vec{v_i} \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{R}_{CM} + \vec{r_i}^\star\right) \times \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v_i}^\star\right) \\
&= \left[\sum_i m_i\right] \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \sum_i m_i\vec{v_i}^\star \\
&\quad + \left[\sum_i m_i\vec{r_i}^\star\right] \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i\vec{r_i}^\star \times \vec{v_i}^\star
\end{aligned}$$

Z definicji CMS: $\sum m_i\vec{v_i}^\star = \sum m_i\vec{r_i}^\star = 0$

$\Rightarrow$ otrzymujemy:

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}^\star_{CM}$$

Moment pędu układu jest sumą "wewnętrznego" momentu pędu ($\vec{L}^\star_{CM}$) (względem CM) i momentu pędu układu jako całości.

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Dla ciała, poruszającego się w polu sił centralnych, zachowana(y) jest

   A energia potencjalna B moment pędu C energia kinetyczna D pęd

2. Dla ciała, poruszającego się w polu sił zachowawczych, zachowana(y) jest

   A moment pędu B pęd C energia kinetyczna D energia całkowita

3. Ciało A spuszczono swobodnie z wysokości cztery razy większej niż ciało B: $h_A = 4h_B$. Uzyskane prędkości

   A $v_A = 2\, v_B$ B $v_A = \sqrt{2}\, v_B$ C $v_A = 4\, v_B$ D $v_A = 2\sqrt{2}\, v_B$

4. Pocisk uderza centralnie z prędkością $\vec{v}$ w nieruchomą tarczę o takiej samej masie. Zakładając, że zderzenie jest elastyczne, prędkość pocisku po zderzeniu wyniesie

   A $\vec{v}' = -\vec{v}$ B $\vec{v}' = 0$ C $\vec{v}' = -\frac{1}{2}\vec{v}$ D $\vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{v}$

5. W zderzeniu sprężystym pocisku o masie m z nieruchomą tarczę o masie M suma kątów rozproszenia pocisku i tarczy była większa od 90°. Można na tej podstawie wnioskować, że

   A $m \gg M$ B $m > M$ C $m < M$ D $m \ll M$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego