



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Mechanika ruchu obrotowego

Fizyka I (Mechanika)

Wykład VI:

- Ruch harmoniczny i po okręgu
- Ruch w jednorodnym polu elektrycznym i magnetycznym
- Prawa ruchu w układzie obracającym się

Pojęcia podstawowe

Układ współrzędnych

Służy do określenia położenia ciała w danym układzie odniesienia

Położenie możemy zapisać na wiele różnych sposobów:

- układ współrzędnych kartezjańskich:

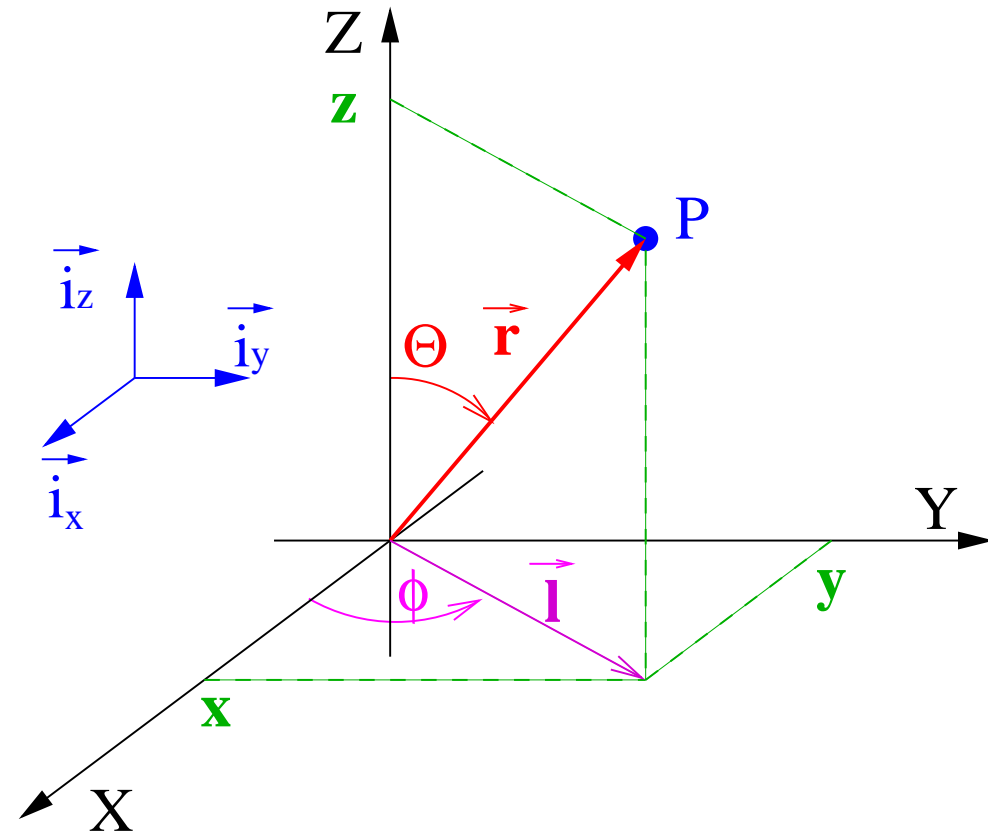
$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \cdot \vec{i}_x + y \cdot \vec{i}_y + z \cdot \vec{i}_z \\ &\equiv (x, y, z)\end{aligned}$$

- układ współrzędnych biegunowych:

$$\vec{r} = (r, \Theta, \phi)$$

- układ współrzędnych walcowych:

$$\vec{r} = (l, \phi, z)$$



Ruch harmoniczny

Szczególny przykład ruchu drgającego:

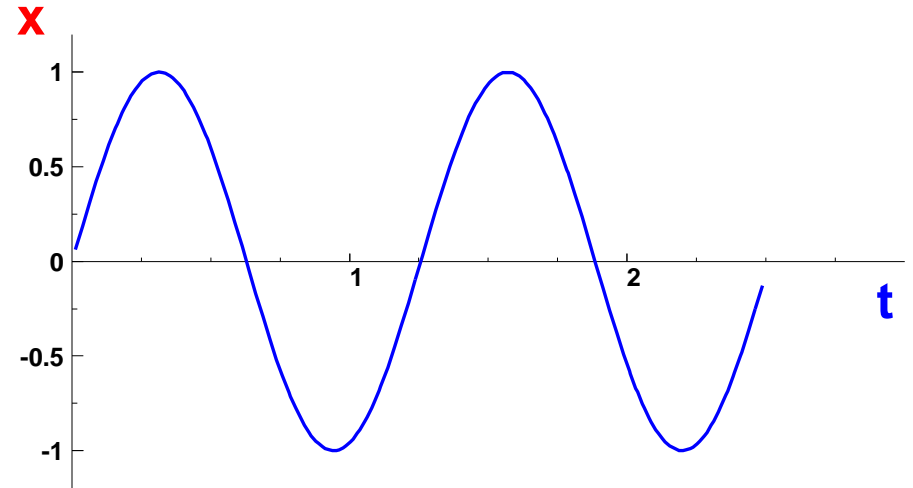
$$x = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Parametry

- amplituda A
- częstość kołowa ω
okres drgań $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- faza początkowa ϕ

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (\text{ruch w jednym wymiarze})$$



Prędkość: $V = \frac{dx}{dt} = \omega A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

Przyspieszenie:

$$a = \frac{dV}{dt} = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 \cdot x$$

Ruch harmoniczny

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r} \quad (\text{postać ogólna})$$

Równanie oscylatora dobrze opisuje zachowanie bardzo wielu układów fizycznych: ciężarek na sprężynie, wahadło matematyczne (dla małych wychyleń), struna, itp...

Równanie oscylatora harmonicznego jest przykładem równania różniczkowego.

Ogólna postać rozwiązania:

$$1D: \quad x = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

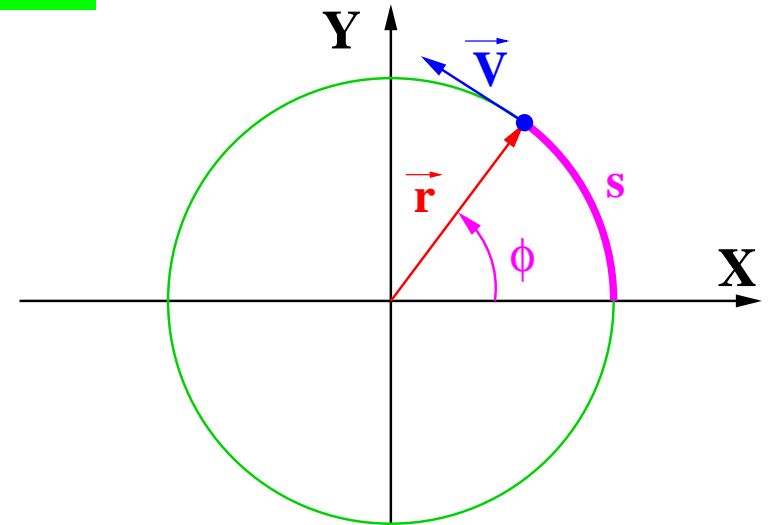
$$3D: \quad \vec{r} = \vec{A} \cdot \cos(\omega t) + \vec{B} \cdot \sin(\omega t)$$

W ogólnym przypadku ruch będzie płaski, w płaszczyźnie wyznaczonej przez początkowe położenie i prędkość: $\vec{A} = \vec{r}(0) = \vec{r}_0$ $\omega \vec{B} = \vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

Ruch po okręgu

Ruch **jednostajny po okręgu** jest szczególnym rozwiązaniem równania oscylatora harmonicznego ($|\vec{A}| = |\vec{B}|$ i $\vec{A} \perp \vec{B}$); możemy też go przedstawić jako złożenie dwóch niezależnych ruchów harmonicznym (z różnicą faz $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\omega \cdot t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \\y &= r \cdot \sin(\omega \cdot t)\end{aligned}$$



Składowe przyspieszenia (jak dla ruchu harmonicznego):

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 \cdot x \\ a_y = -\omega^2 \cdot y \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r} \Rightarrow a_n = \omega^2 \cdot r = \frac{V^2}{r}$$

Przyspieszenie to jest nazywane **przyspieszeniem dośrodkowym** lub **przyspieszeniem normalnym** (prostopadłym do kierunku ruchu).

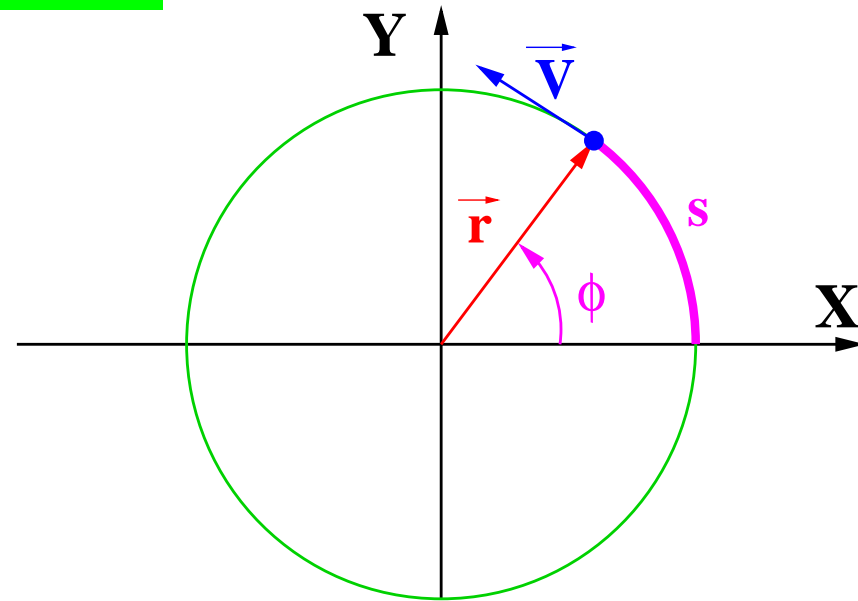
Gdy ruch po okręgu nie jest jednostajny pojawia się też składowa styczna: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_s$

Ruch po okręgu

Przypadek ogólny: $r = \text{const}$ i $z = 0$

Położenie ciała opisane jest jedną zmienną:

- kąt w płaszczyźnie XY - ϕ , lub
- długość łuku okręgu - $s = r \cdot \phi$



Wartość prędkości:

$$V = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} = r \omega$$

$$\text{prędkość kątowa } \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

Przyspieszenie kątowe: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

Przyspieszenie styczne: $a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = r\alpha \quad \leftarrow \text{styczne: } \vec{a}_s \parallel \vec{V}$

Ruch jednostajny po okręgu: $\alpha = 0 \Rightarrow \omega = \text{const} \Rightarrow V = \text{const} \Rightarrow a_s = 0$

ale $\vec{V} \neq \text{const} \Rightarrow \vec{a}_n \neq 0 !!!$

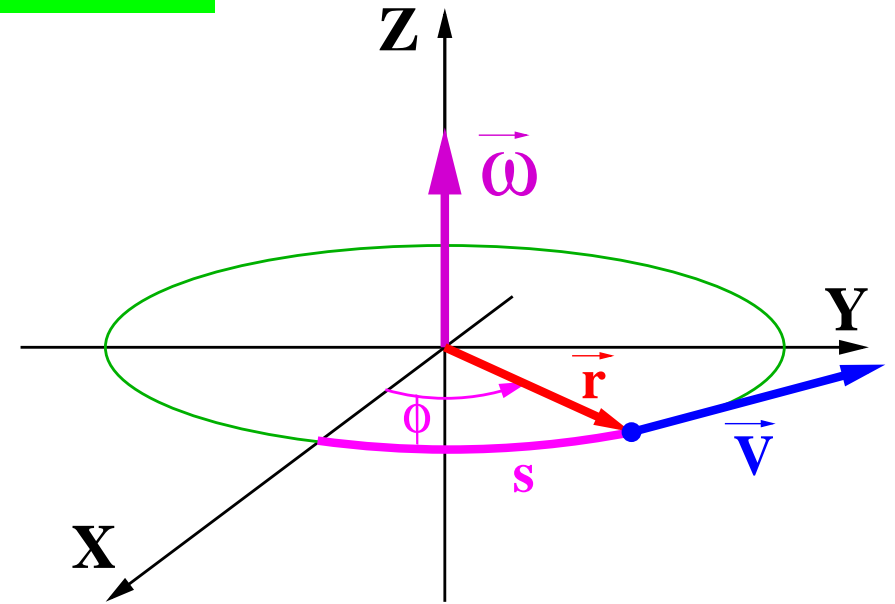
Ruch po okręgu

Prędkość w zapisie wektorowym:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Przyspieszenie:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \\ &= \vec{a}_s + \vec{a}_n\end{aligned}$$



Oprócz przyspieszenia stycznego $\vec{a}_s \parallel \vec{V}$, opisującego zmianę $|\vec{V}|$, jest też przyspieszenie normalne \vec{a}_n , odpowiedzialne za zmianę kierunku \vec{V} w czasie.

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C) \cdot B - (A \cdot B) \cdot C$$

przyspieszenie dośrodkowe

Równania ruchu

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu, czyli określanie ruchu ciała ze znajomości działających na nie sił.

Siła działająca na ciało może zależeć od położenia i prędkości cząstki oraz czasu
⇒ równanie ruchu:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Ogólne rozwiązanie ma sześć stałych całkowania:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2, \dots, C_6)$$

Aby ściśle określić ruch ciała musimy poza rozwiązaniem równań ruchu wyznaczyć wartości wolnych parametrów (w ogólnym przypadku sześciu)

Najczęściej dokonujemy tego określając warunki początkowe:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$$

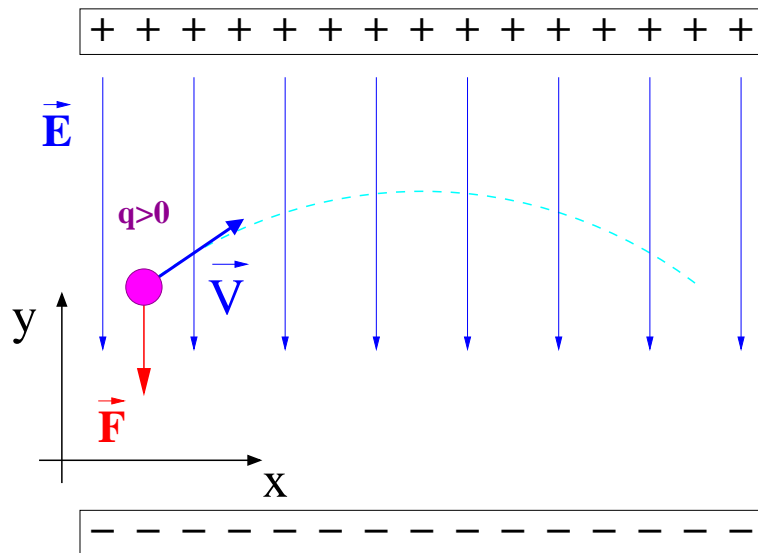
$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

t_0 - wybrana "chwila początkowa"

Równania ruchu

Pole elektryczne

Rozważmy cząstkę naładowaną o masie m i ładunku q poruszającą się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} (np. wewnątrz kondensatora płaskiego).



$$\vec{E} = (0, -E, 0)$$

Na cząstkę działa stała siła (z definicji natężenia):

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$$

Ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_E}{m} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

Pełna analogia do **poła grawitacyjnego**:

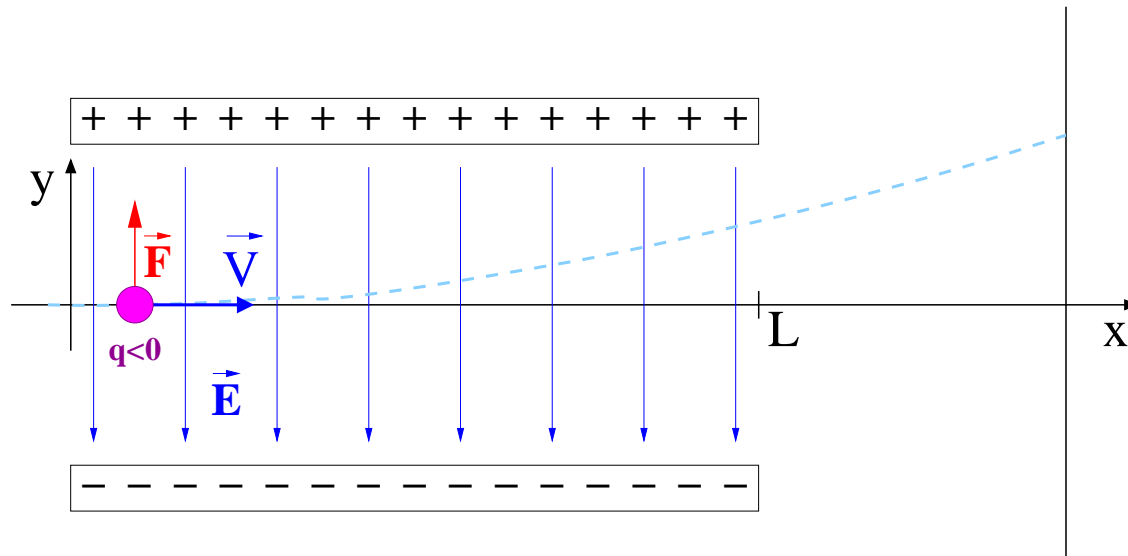
$$\vec{g} \Leftrightarrow \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

Np. energia potencjalna:

$$E_p^g = mgy \Leftrightarrow E_p^E = qEy$$

Równania ruchu

Pole elektryczne



Stałe jednorodne pole elektryczne $\vec{E} = (0, E, 0)$

W chwili $t_0 = 0$ w punkcie $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ w pole wlatuje z prędkością $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ cząstka o masie m i ładunku Q

$$\vec{F}_E = Q \vec{E}$$

Równania ruchu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Q E$$

Całkowanie + warunki początkowe

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = \frac{Q E}{2m} \cdot t^2$$

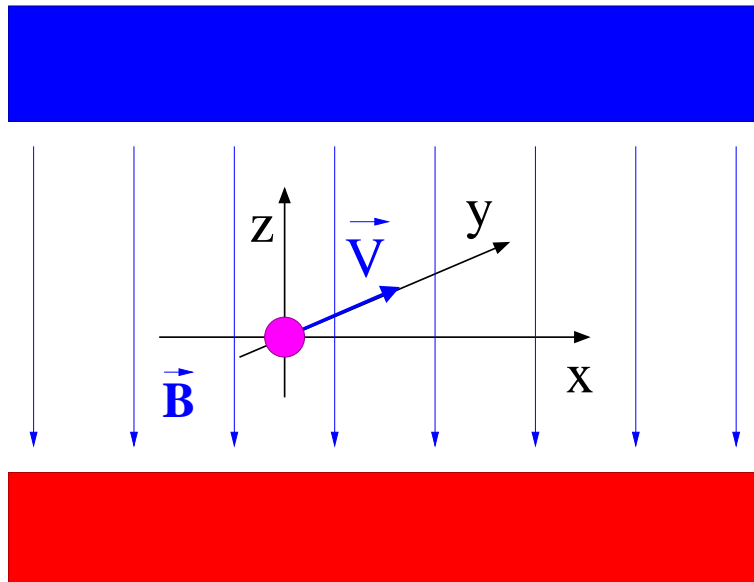
$$\Rightarrow \text{równanie toru: } y = \frac{Q E}{2m v_0^2} \cdot x^2$$

Kąt odchylenia:

$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{Q E L}{m v_0^2}$$

Równania ruchu

Pole magnetyczne



Stałe jednorodne pole $\vec{B} = (0, 0, B)$

W chwili $t_0 = 0$ w punkcie $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$

w pole wlatuje z prędkością $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$

cząstka o masie m i ładunku Q

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{siła Lorentza}$$

Z definicji iloczynu wektorowego

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = Q \cdot \begin{pmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Układ dwóch równań:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Q B \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Q B \frac{dx}{dt}$$

Całkując pierwsze równanie

$$m \frac{dx}{dt} = Q B (y - y_c)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = - \left(\frac{Q B}{m} \right)^2 (y - y_c)$$

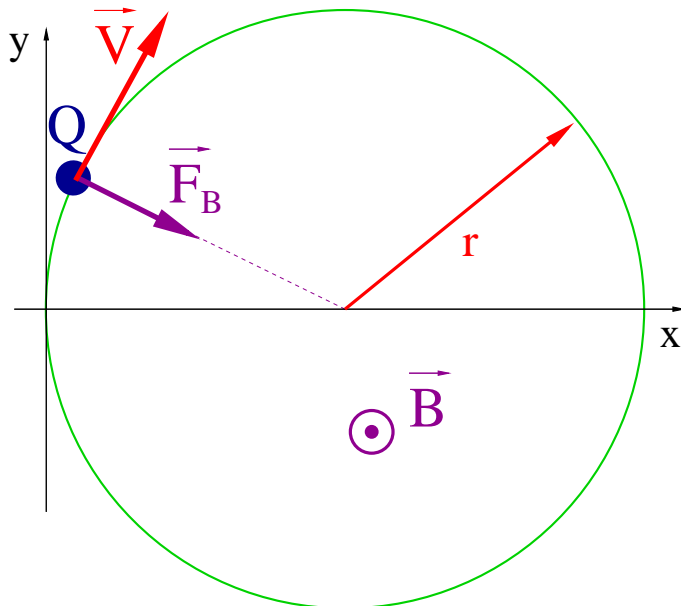
Równania ruchu

Pole magnetyczne

Otrzymujemy równania ruchu:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 (y - y_c) \quad \text{oscylator}$$
$$\frac{dx}{dt} = \omega (y - y_c) \quad \omega = \frac{Q B}{m}$$

⇒ ruch po okręgu ω - częstość cyklotronowa



Rozwiązanie:

$$x = r \cdot \sin(\omega t + \phi_0) + x_c$$

$$y = r \cdot \cos(\omega t + \phi_0) + y_c$$

gdzie r - promień cyklotronowy:

$$r = \frac{m v_0}{Q B}$$

Z warunków początkowych
($\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ i $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$):

$$x = r \cdot (1 - \cos \omega t)$$

$$y = r \cdot \sin \omega t$$

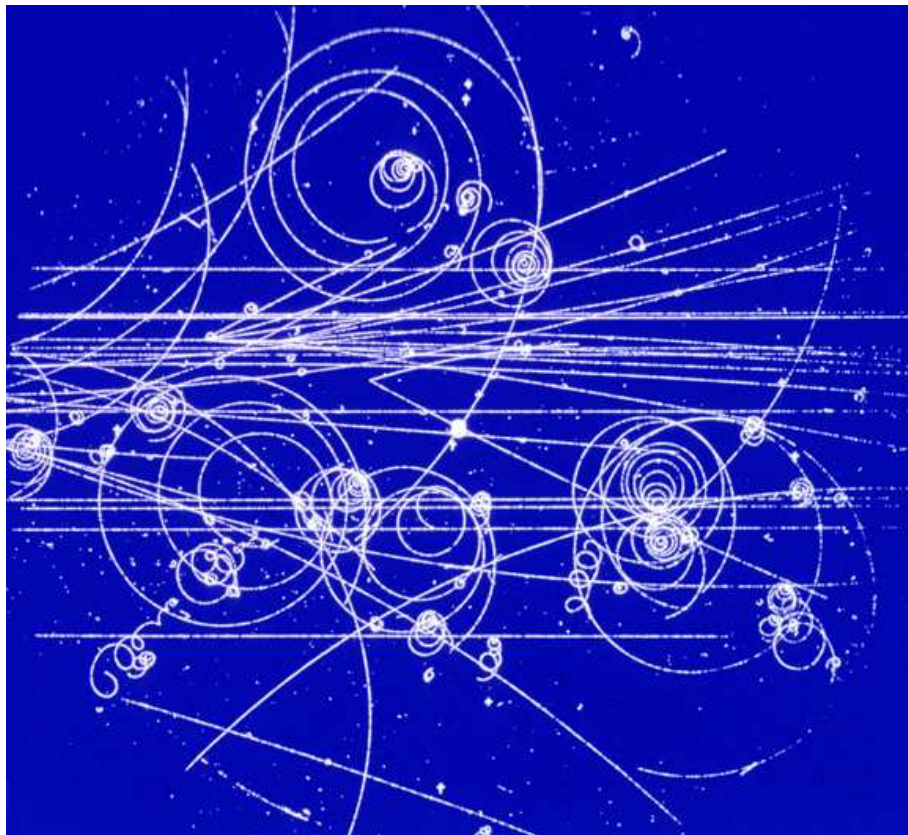
Ruch w polu magnetycznym
jest jednostajny: $v = \text{const}$

$$r = \frac{m v}{Q B} = \frac{p}{Q B}$$

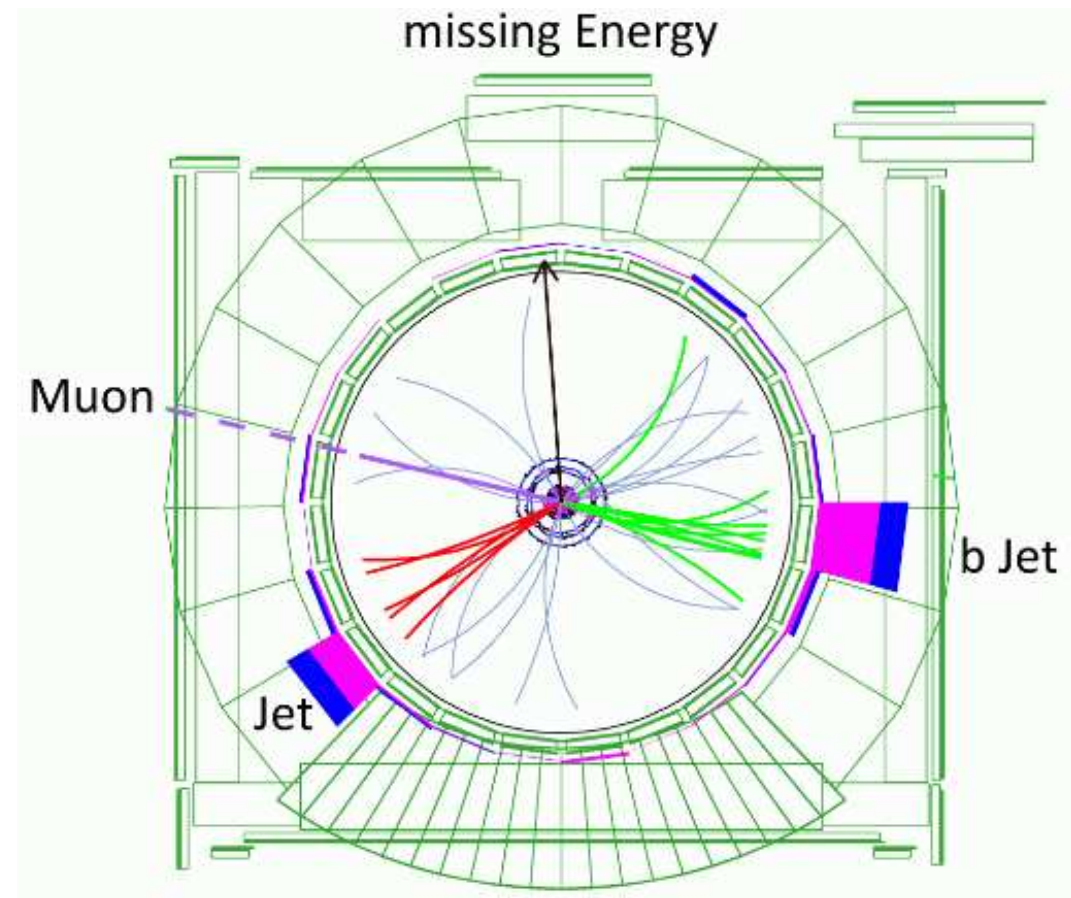
Równania ruchu

W fizyce cząstek **pole magnetyczne** powszechnie wykorzystywane jest do **pomiaru pędu cząstek**. Wszystkie długożyciowe cząstki naładowane mają ładunek $\pm 1e$...

Komora pęcherzykowa w CERN



Detektor CDF w Fermilab



Równania ruchu

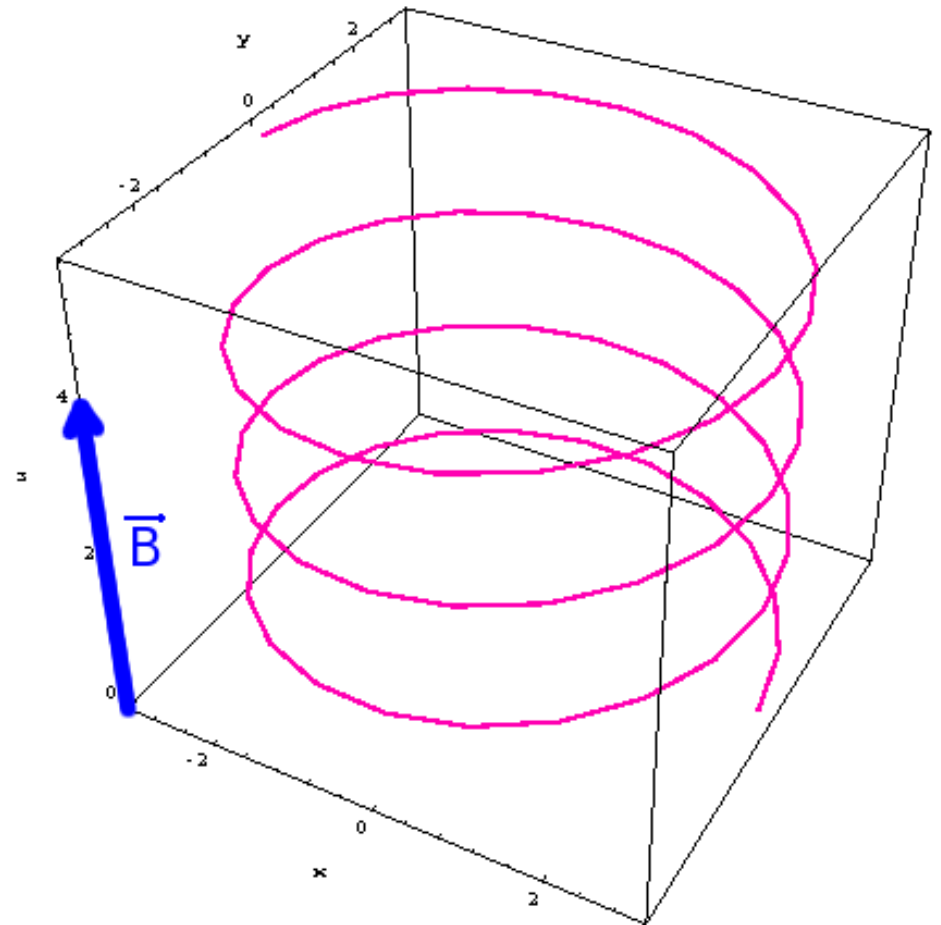
Pole magnetyczne

W ogólnym przypadku prędkość cząstki \vec{V} nie musi być prostopadła do wektora indukcji pola magnetycznego \vec{B} .

Jednak siła Lorentza zawsze prostopadła do $\vec{B} \Rightarrow$ na kierunku równoległym do pola znika!

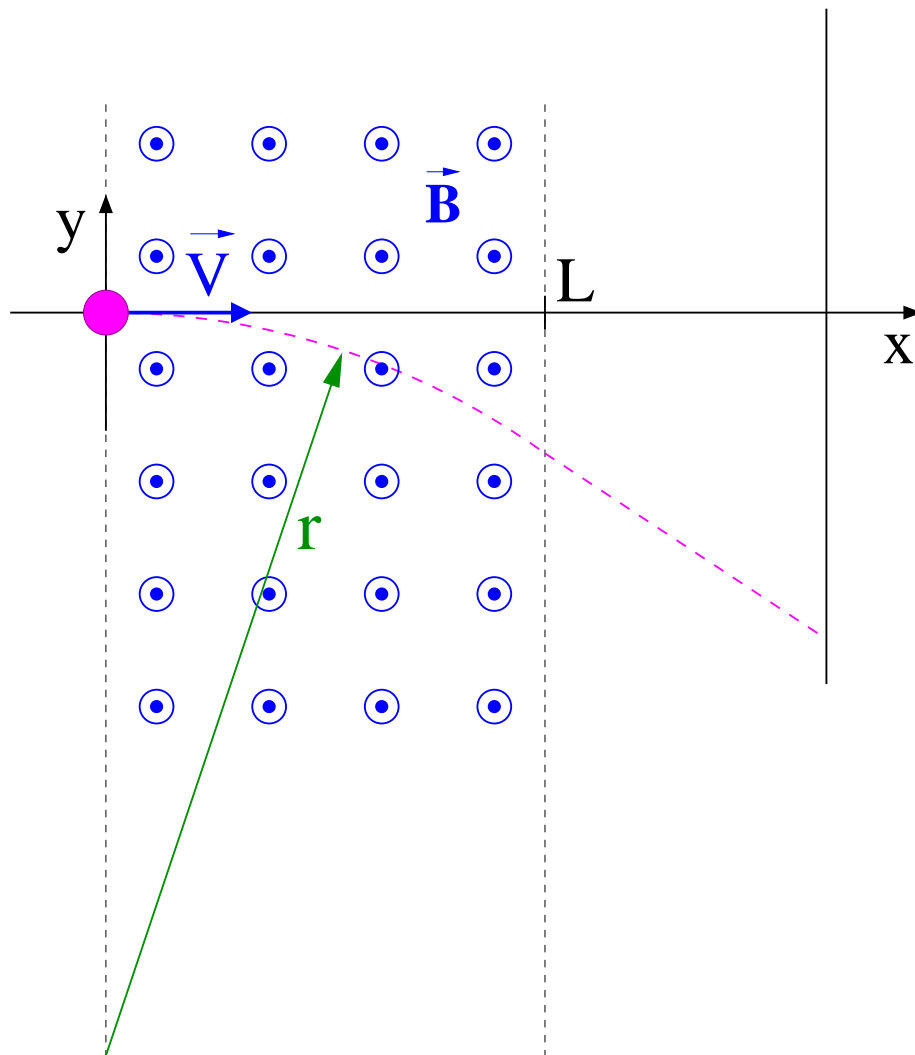
W kierunku wektora pola ruch cząstki jest ruchem jednostajnym.

W ogólnym przypadku torem ruchu jest spirala.



Równania ruchu

Pole magnetyczne



Odchylenie cząstki przelatującej przez wąski obszar jednorodnego pola zakładamy $\omega t \ll 1$:

$$x \approx r \cdot \omega t$$

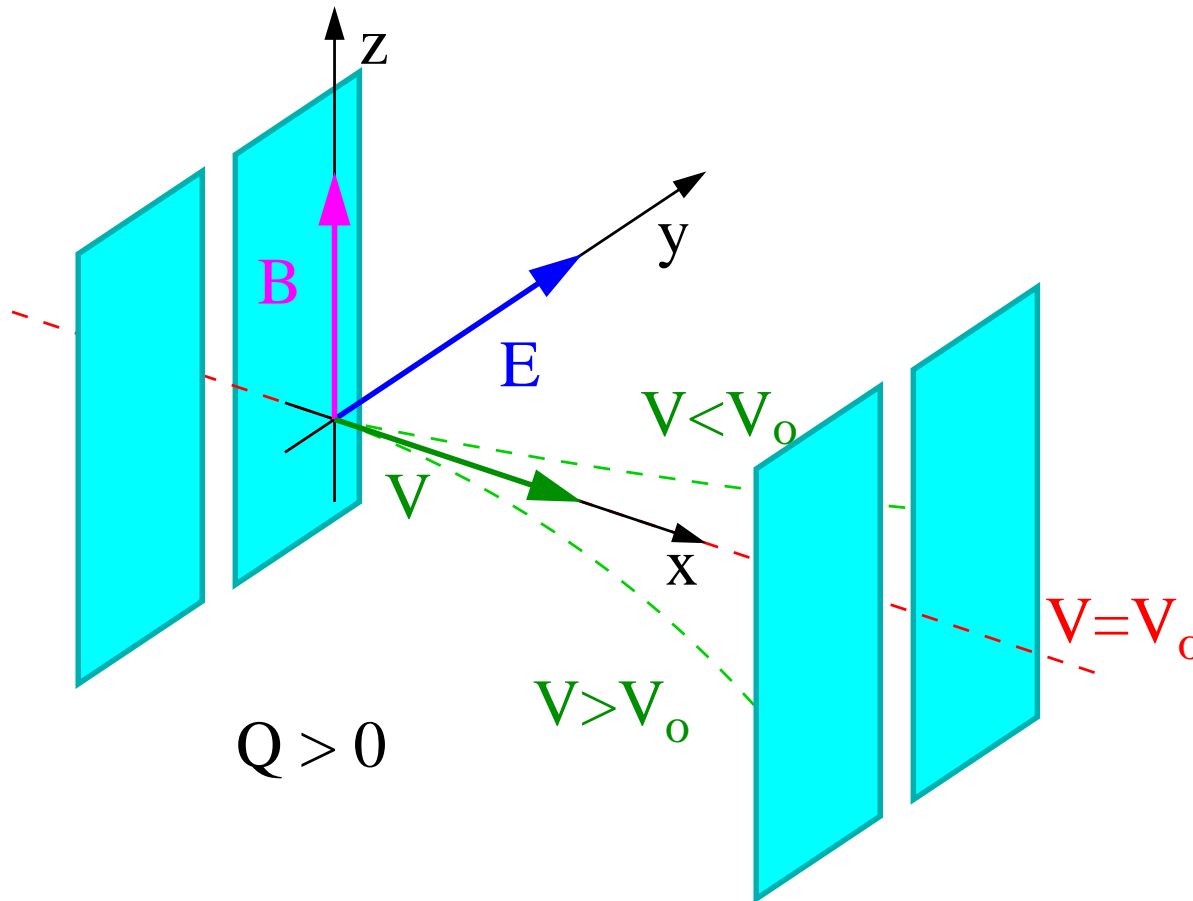
$$y \approx r \cdot \left[\left(1 - \frac{(\omega t)^2}{2} \right) - 1 \right]$$
$$= -\frac{x^2}{2r}$$

Kąt odchylenia:

$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{L}{r} = \frac{Q B L}{m v_0}$$

Równania ruchu

Selektor prędkości



Cząstka w skrzyżowanych
jednorodnych polach $\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\vec{F}_E = Q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla prędkości $v_0 = \frac{E}{B}$
wypadkowa siła $\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$

\Rightarrow tor prostoliniowy

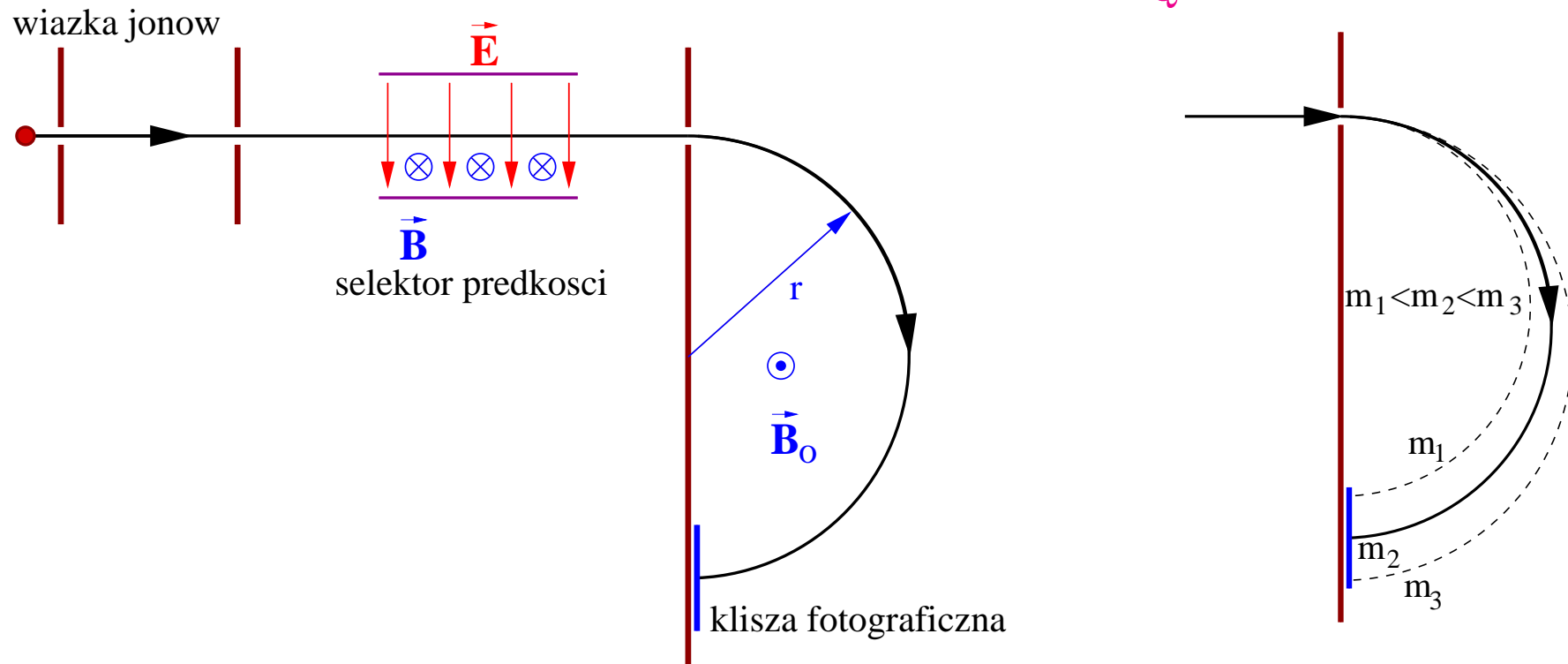
\Rightarrow metoda selekcji cząstek
o ustalonej prędkości

niezależnie od ich Q i m

Równania ruchu

Spektrometr Bainbridge'a

Mierzimy promień cyklotronowy $r = \frac{m v_0}{Q B}$
dla cząstek o ustalonej prędkości $v_0 = \frac{E}{B}$
 \Rightarrow pomiar $\frac{m}{Q}$

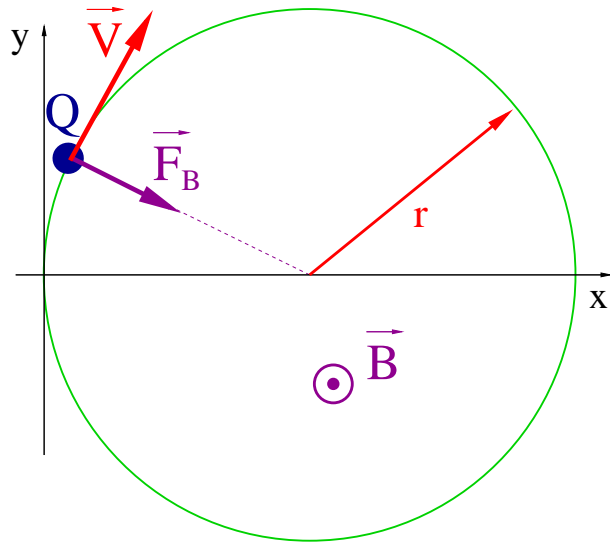


Cząstki o różnych masach zaczną kliszę w różnych odległościach od szczeliny

Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Cząstka naładowana w polu magnetycznym



Siła Lorentza:

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla $\vec{v} \perp \vec{B}$:

$$F_B = Q v B$$

Promień cyklotronowy:

$$r = \frac{m v}{Q B} = \frac{p}{Q B}$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{Q B}{m v} m v^2 = \frac{1}{r} m v^2$$

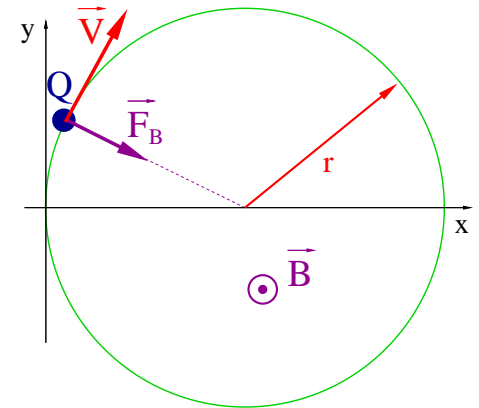
$$F_B = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r$$

Ruch po okręgu

Zasada bezwładności

“Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.” I. Newton

⇒ aby ciało pozostawało w ruchu po okręgu konieczne jest działanie siły ⇒ **siła dośrodkowa**



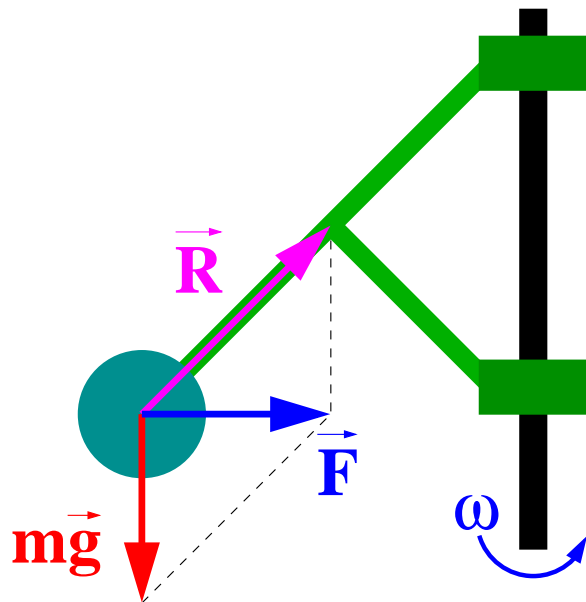
Ruch po okręgu może być wynikiem działania różnego rodzaju sił:

- siły zewnętrzne
 - ⇒ siła Lorenza (pole magnetyczne)
 - ⇒ siły sprężystości
- siły reakcji więzów (kulka na nitce)
- wypadkowej sił reakcji i sił zewnętrznych (regulator Watta, kulka w wirującym naczyniu...)

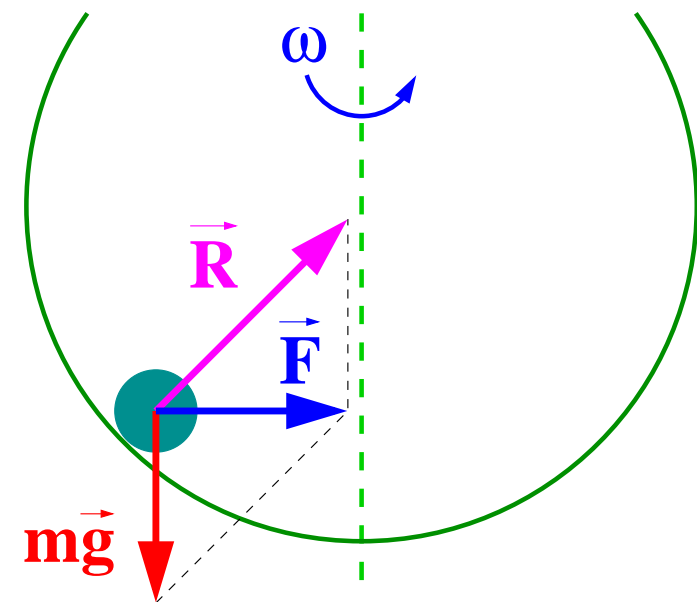
Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu

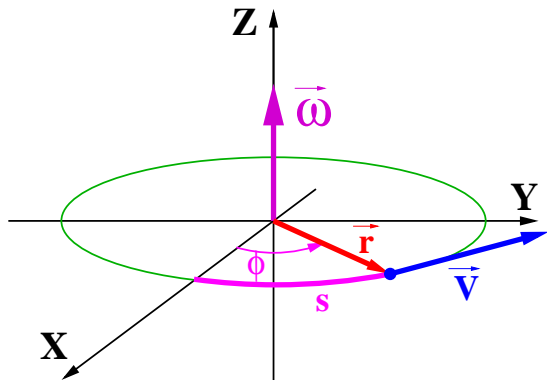


Siła dośrodkowa jest wypadkową siły reakcji i siły ciężkości:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa



$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$z \equiv 0$$

$$\Rightarrow a_x = -\omega^2 r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a_y = -\omega^2 r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

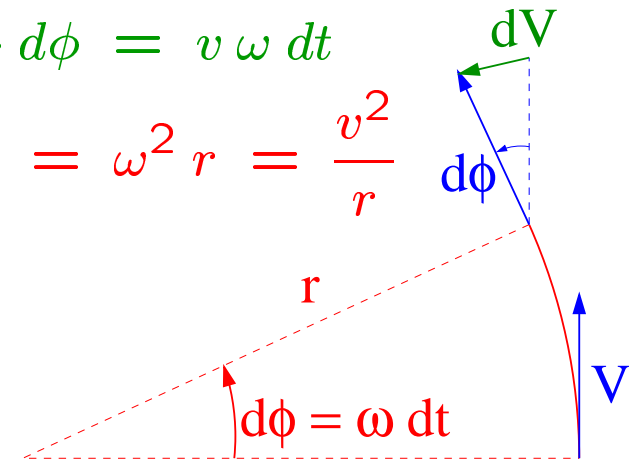
$$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dv = v \cdot d\phi = v \omega dt$$

$$a = v \omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$



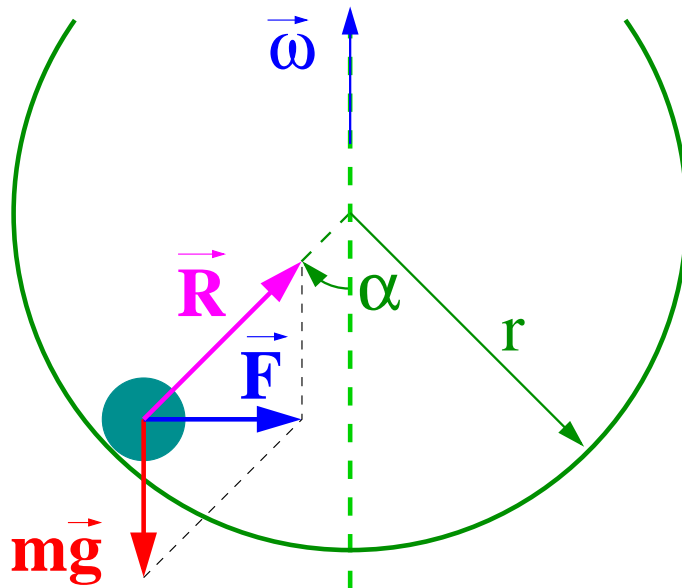
W zapisie wektorowym: $\vec{\omega} = const$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= -\omega^2 \cdot \vec{r}_{\perp} \quad \vec{r}_{\perp} = (x, y, 0) \end{aligned}$$

Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Kulka w wirującym naczyniu



$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Siła dośrodkowa skierowana poziomo ze składania sił:

$$\Rightarrow R \cdot \cos \alpha - mg = 0$$

$$F = R \cdot \sin \alpha = mg \cdot \tan \alpha$$

Z równania ruchu:

$$F = m\omega^2 r_{\perp} = m\omega^2 r \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 r}$$

Kulka odchyli się dopiero dla $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}} = \omega_0$

ω_0 - częstość drgań wahadła

matematycznego o długości r

Układy nieinercyjne

Prawa ruchu

Niech układ O' porusza się względem układu inercyjnego O .

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)

Niech $\vec{r}_o(t)$ opisuje położenie układu O' w O . Przyspieszenie: $\vec{a}_o = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}$

Prawa ruchu w układzie inercyjnym O :

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym O' :

$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_o$$

⇒ w układzie nieinercyjnym musimy wprowadzić siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_o$

Czy możemy to podejście zastosować także w przypadku, gdy układy obracają się względem siebie?

Problem komplikuje się, bo przyspieszenie względne zależy od położenia...

Układ obracający się

Niech układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O .

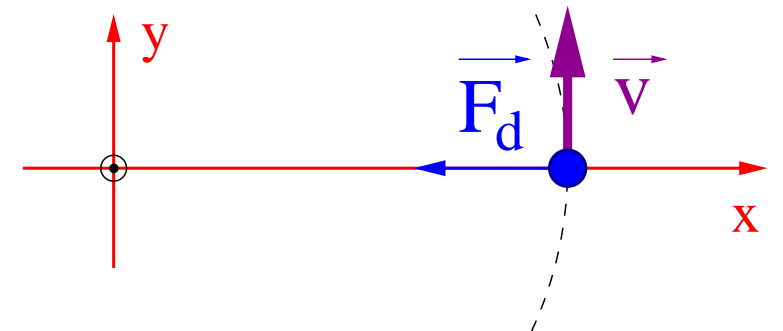
Dla uproszenia przyjmijmy, że początki obu układów pokrywają się.

Rozważmy ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O'



Z punktu widzenia obserwatora O ciało porusza się po okręgu więc musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F}_d = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$



Układ obracający się

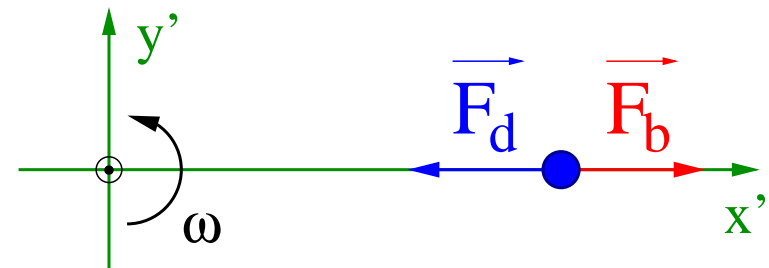
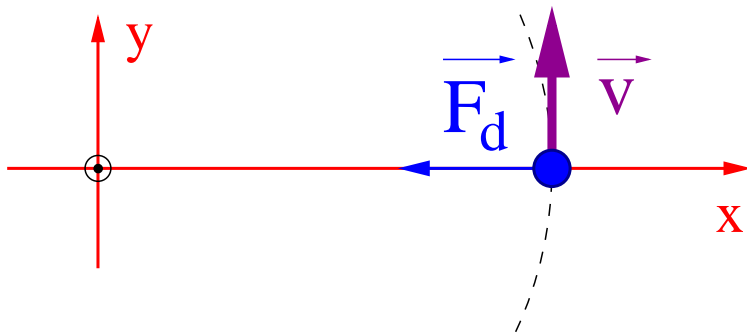
Z punktu widzenia obserwatora O (układ inercjalny) ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F}_d = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

W układzie O' , aby opisać równowagę sił (ciało pozostaje w spoczynku) musimy wprowadzić siłę bezwładności:

$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

\Rightarrow siła odśrodkowa

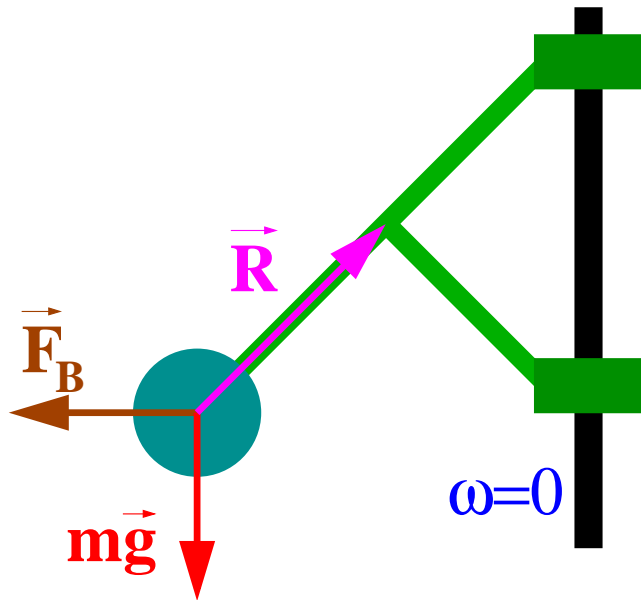


Siły bezwładności są siłami pozornymi, wynikającymi z nieinercyjnego charakteru układu odniesienia

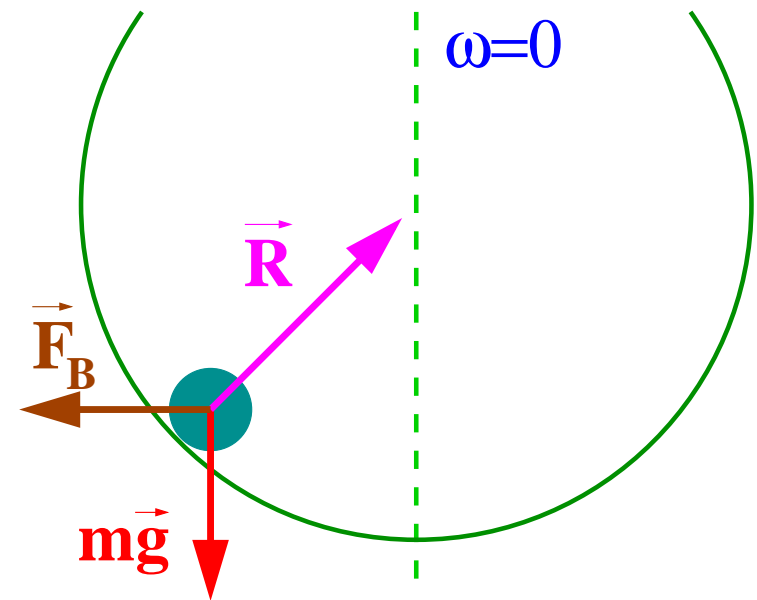
Układ obracający się

Siła odśrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu



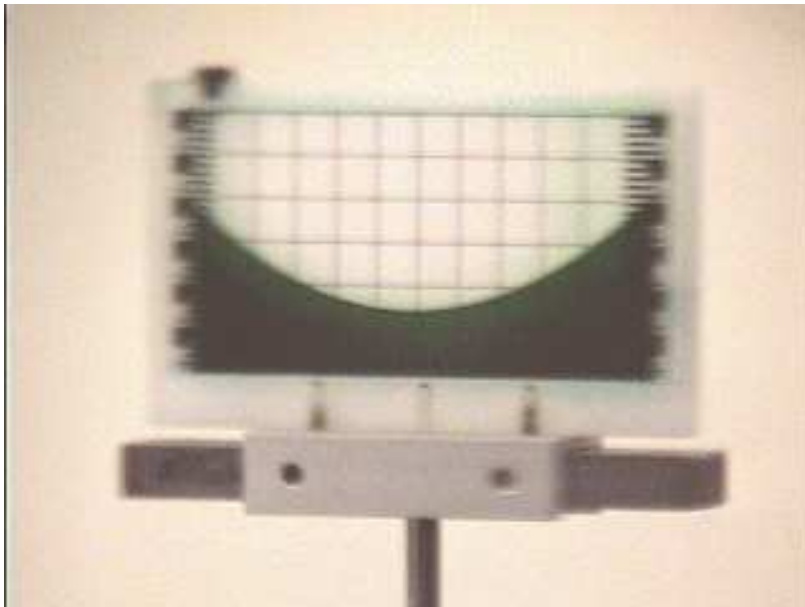
Równowaga sił w układzie obracającym się:

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_b = m\vec{a}' = 0$$

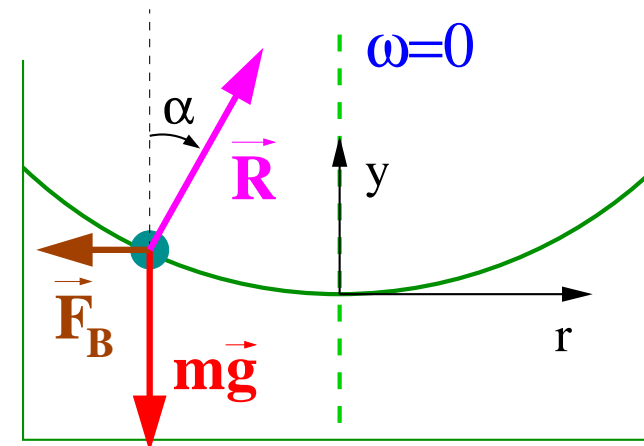
Układ obracający się

Siła odśrodkowa

Ciecz w wirującym naczyniu



Powierzchnia cieczy przyjmuje kształt paraboliczny



Równowaga drobiny na powierzchni cieczy:

$$mg \sin \alpha - m\omega^2 r \cos \alpha = 0$$

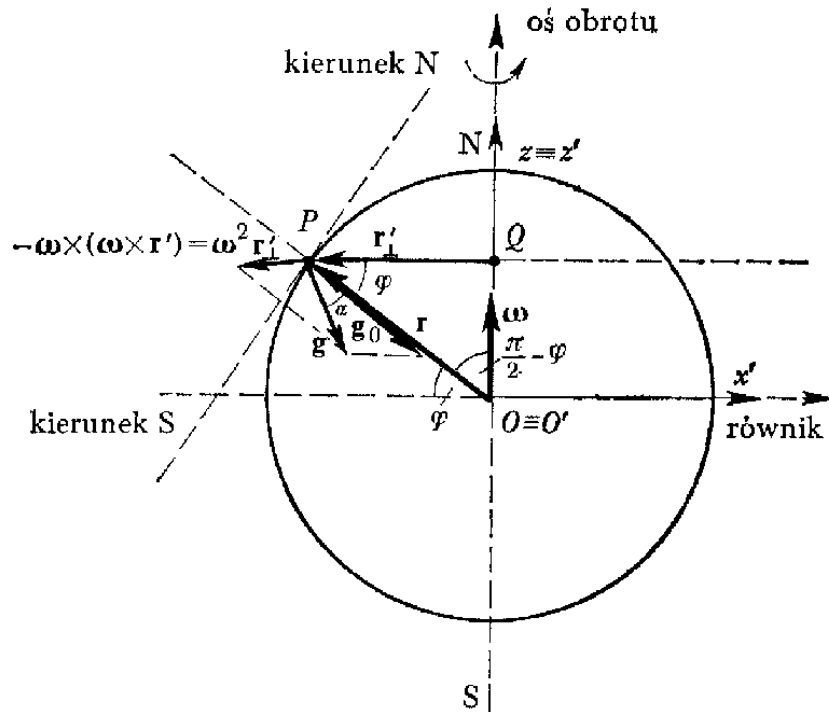
(rzut na powierzchnie cieczy)

$$\frac{dy}{dr} = \tan \alpha = \frac{\omega^2}{g} r$$

$$\Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2 + y_0$$

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi



$$\omega \approx \frac{2\pi}{23^h 56^m 04^s} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$$

Ciała nieruchome względem powierzchni Ziemi. Zmiana efektywnego przyspieszenia ziemskiego związana z ruchem obrotowym Ziemi:

$$\Delta g = -\omega^2 r_{\perp} \cos \phi = -\omega^2 r_Z \cos^2 \phi$$

$$\approx -0.033 \frac{m}{s^2} \cdot \cos^2 \phi \quad \phi - \text{szerokość geo.}$$

Wyniki pomiarów:

biegun N $g = 9.83216 \frac{m}{s^2}$

Warszawa $g = 9.81230 \frac{m}{s^2}$

równik $g = 9.78030 \frac{m}{s^2}$

Efekt większy ze względu na spłaszczenie Ziemi

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercyjnego O .

Rozważmy teraz ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O :

W układzie O' ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}_{\perp}$$

W układzie O' działa tymczasem pozorna siła odśrodkowa skierowana przeciwnie

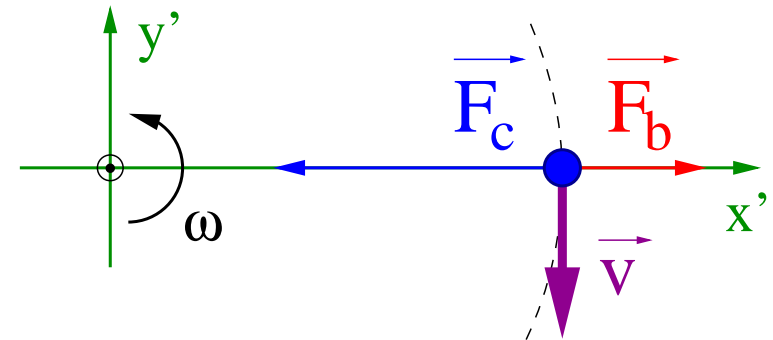
$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_{\perp}$$

⇒ musimy wprowadzić kolejną siłę ?!

Aby “uratować” równania ruchu potrzebujemy

$$\vec{F}_c = -2 m \omega^2 \vec{r}_{\perp}$$

⇒ czy to w ogóle ma sens ?...

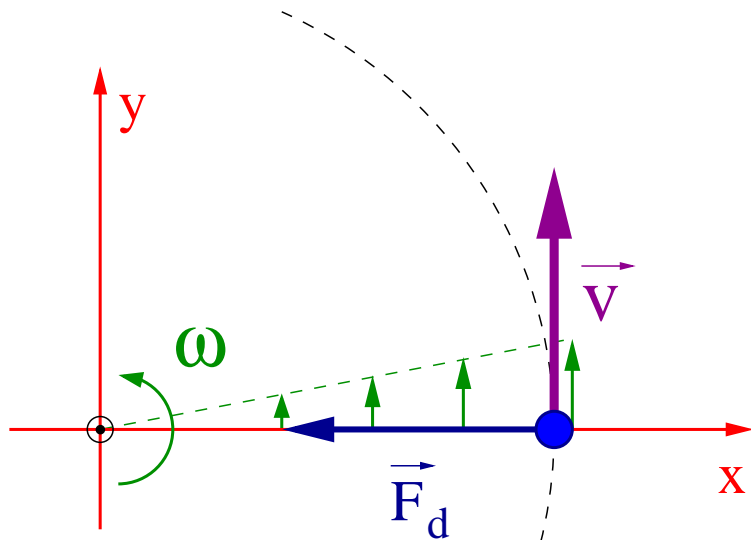


Układ obracający się

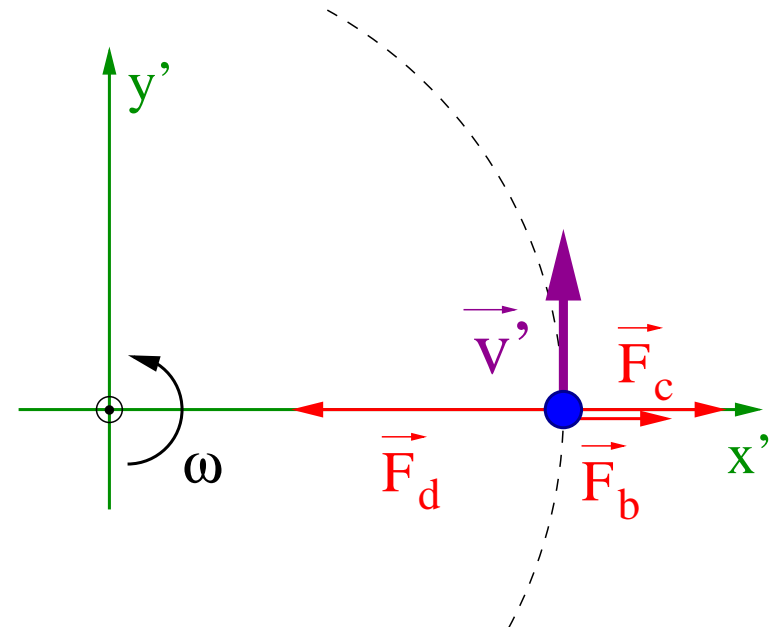
Punkt materialny poruszający się po okręgu w układzie O , siła dośrodkowa $F_d = m \frac{V^2}{r}$.

W układzie obracającym się O' prędkość punktu wynosi $V' = V - \omega r$

Układ O



Układ O'



Związek między siłą wypadkową w O' i w O :

$$F'_d = m \frac{V'^2}{r} = m \frac{(V' + \omega r)^2}{r} - 2m\omega V' - m\omega^2 r = F_d - F_c - F_b$$

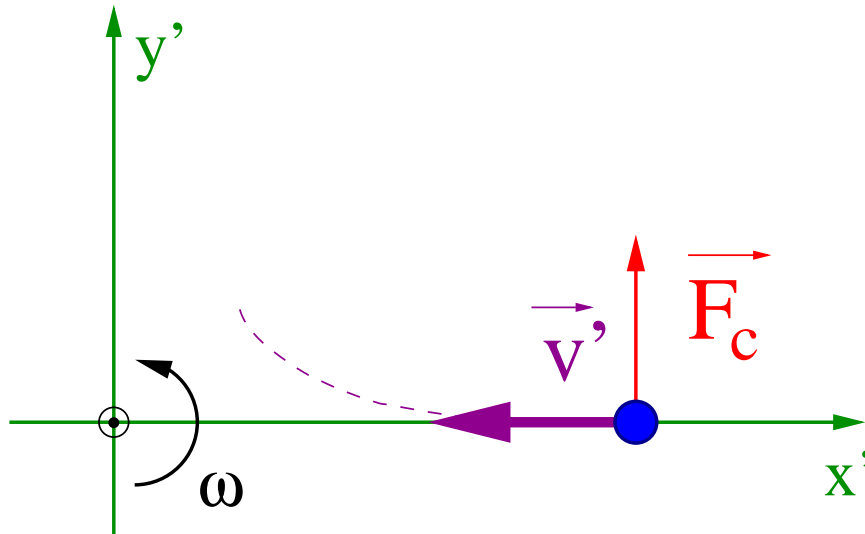
Dodatkowa siła pozorna \vec{F}_c (siła **Coriolisa**) konieczna do opisanie ruchu po okręgu w O'

Układ obracający się

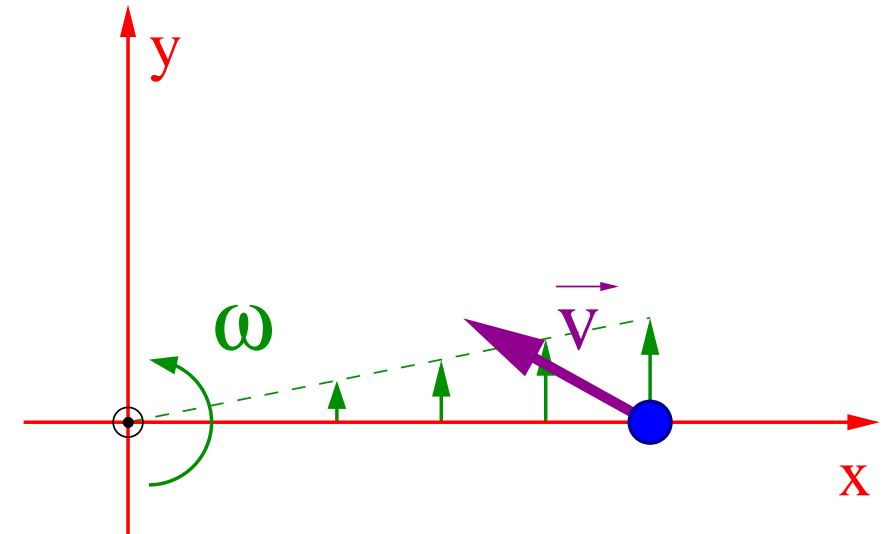
Rozważmy teraz punkt materialny poruszający się radialnie w układzie O' .

W inercyjnym układzie O zbliżający się do centrum układu punkt materialny zaczyna “wyprzedzać” punkty układu O' , gdyż ich prędkość w ruchu obrotowym maleje...

Układ O'



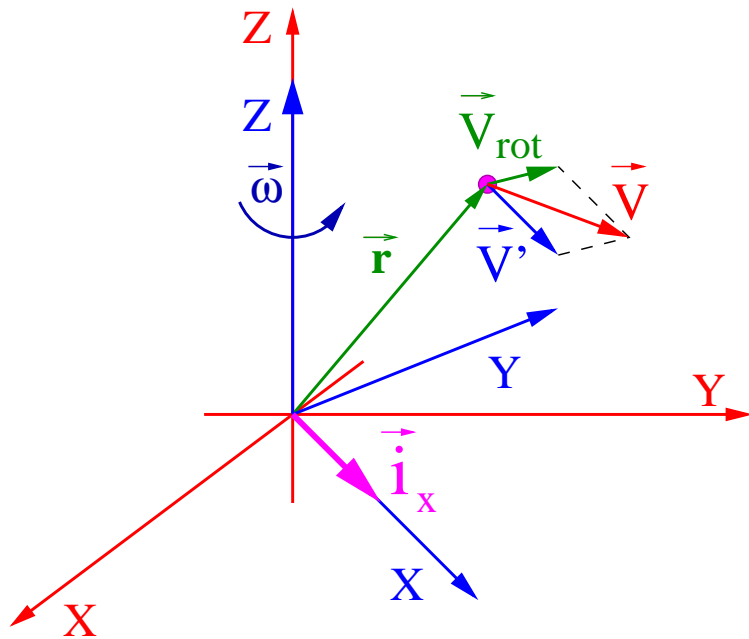
Układ O



Pozorna siła Coriolisa pojawia się w układzie obracającym się (nieinercyjnym), żeby opisać odchylenie od toru prostoliniowego...

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O .



Dodawanie prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{rot} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Pochodna dla wektora \vec{o} z układu O' : $(\vec{r}' \text{ i } \vec{v}')$

$$\frac{d\vec{o}'}{dt} = \frac{d\vec{o}'}{dt'} + \vec{\omega} \times \vec{o}'$$

pochodna w O' + obrót osi O'

$$\Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\vec{a}'}_{\text{przyp. w } O'} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}_{\text{przyp. } O'} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{przyp. dośrodkowe}} + \underbrace{2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{przyp. Coriolisa}}$$

Układ obracający się

Równanie ruchu

W układzie inercyjnym O:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym O':

$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

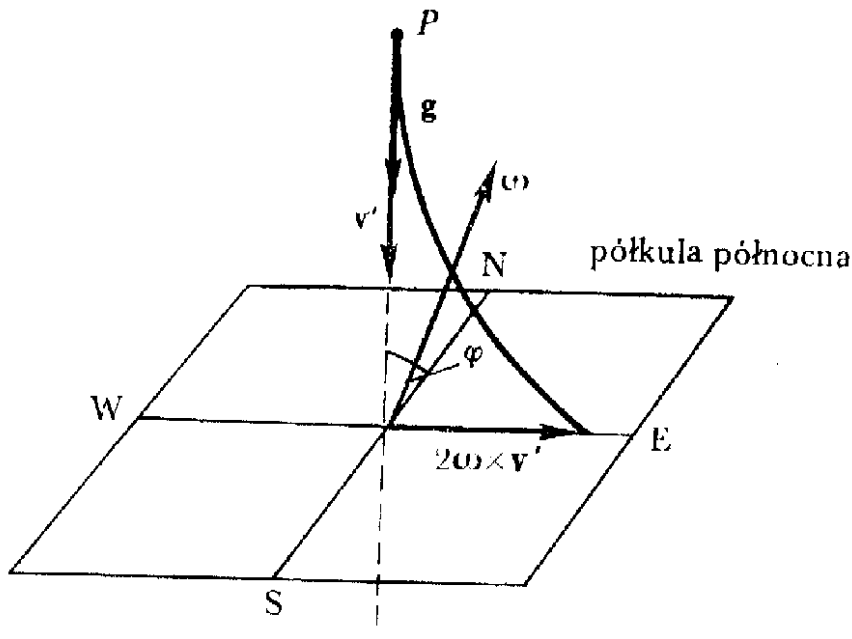
W układzie obracającym się wprowadzamy dwie pozorne siły bezwładności:

- siłę odśrodkową $\vec{F}_o = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = +m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$
- siłę Coriolisa $\vec{F}_c = -2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi

Spadek swobodny z dużej wysokości



Siła Coriolisa odchyła tor ciała
w kierunku wschodnim (obie półkule!)

Spadek swobodny z wysokości $h=5.5$ km,
zaniedbując opory powietrza:

$$y = h - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = -gt$$

Zaniedbując odchylenie od pionu:

$$a_c = 2\omega |v_y| \cos \phi = 2\omega g \cos \phi \cdot t$$

Ruch w poziomie (całkując $a_x = a_c$):

$$v_x = \omega g \cos \phi \cdot t^2, \quad x = \frac{1}{3}\omega g \cos \phi \cdot t^3$$

Końcowe odchylenie toru od pionu:

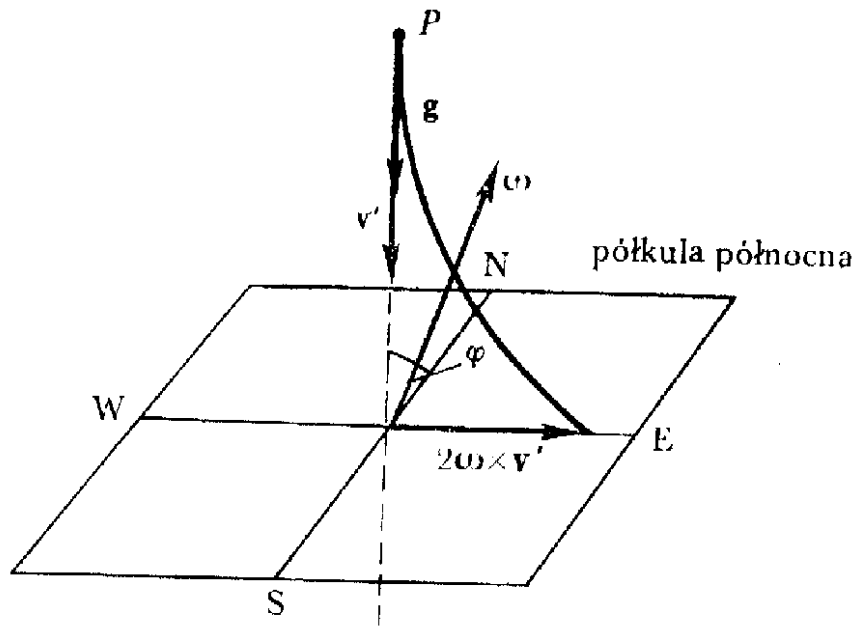
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 33s \Rightarrow \Delta \approx 9m \cdot \cos \phi$$

w Warszawie około 5.5 m

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi

Spadek swobodny z dużej wysokości



Siła Coriolisa odchyła tor ciała
w kierunku wschodnim (obie półkule!)

Opory powietrza \Rightarrow przez większość czasu
spadek z prędkością $v \approx 55 \text{ m/s}$:

$$a_c = 2\omega v \cos \phi \\ \approx 0.008 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos \phi$$

Spadek z 5.5 km zajmie $t \approx 100 \text{ s}$.
Końcowe odchylenie toru od pionu:

$$\Delta = \frac{a_c t^2}{2} \approx 40 \text{ m} \cdot \cos \phi$$

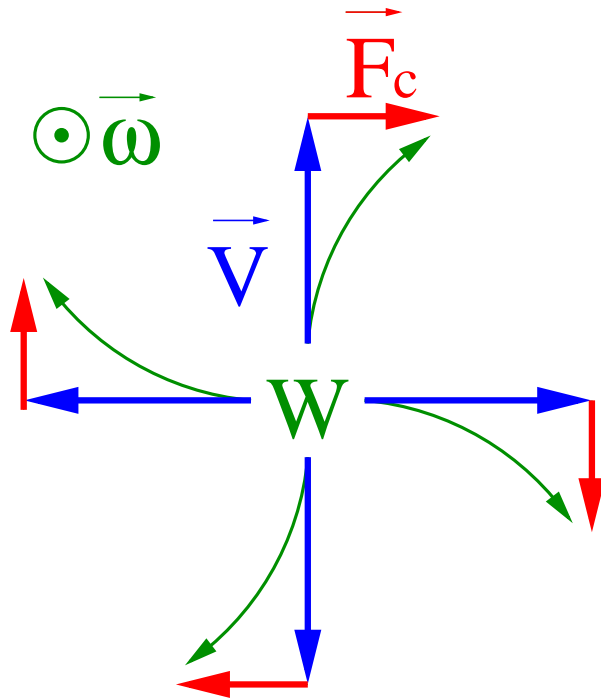
w Warszawie około 25 m

Układ obracający się

Siła Coriolisa

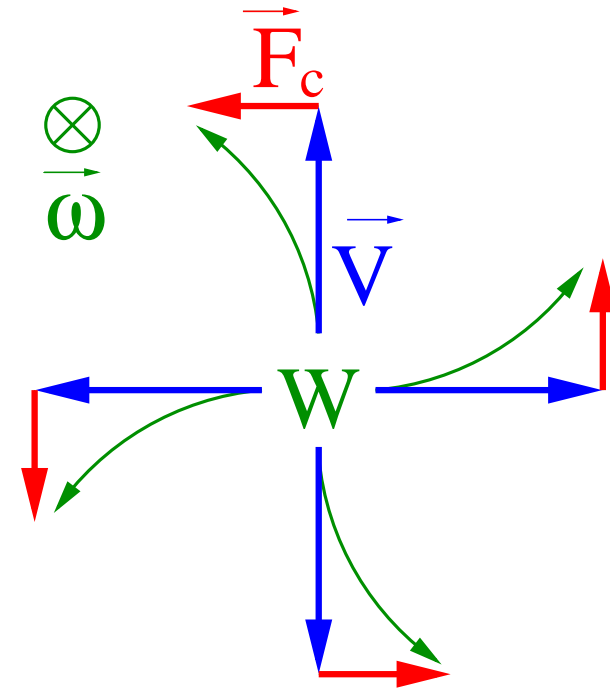
$$\vec{F}_c = -2 \cdot m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Półkula północna



Wiatry zakręcają “w prawo”; wiatr “kręci się” zgodnie z ruchem wskazówek zegara

Półkula południowa

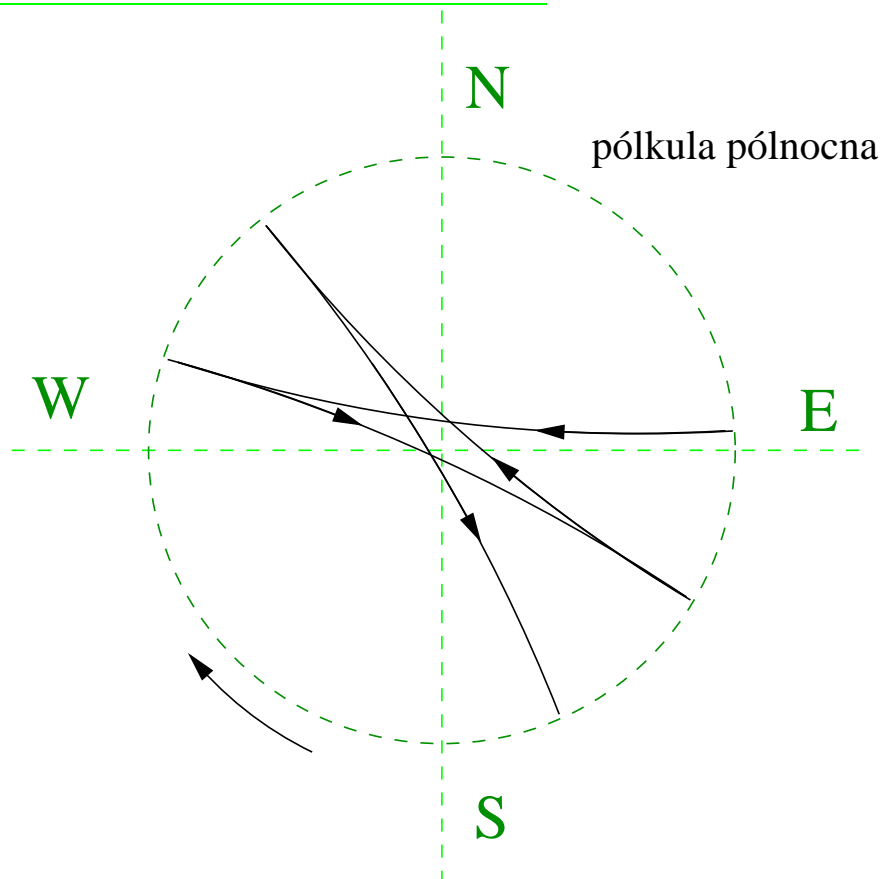


Wiatry zakręcają “w lewo”; wiatr “kręci się” przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Układ obracający się

Wahadło Foucault'a

1851 r.



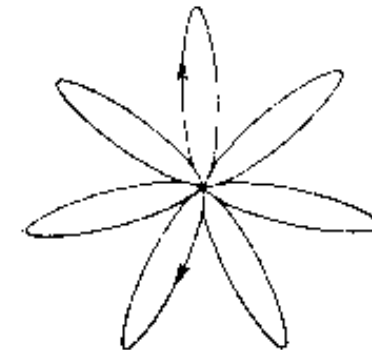
start z wychylenia maksymalnego

Dla obserwatora na Ziemi płaszczyzna ruchu wahadła obraca się z prędkością kątową

$$\omega_1 = \omega \cdot \sin \phi$$

w Warszawie ($\phi = 52^\circ$): $\omega_1 \approx 12^\circ/h$

dla startu z położenia równowagi:



Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. W jednorodnym polu magnetycznym cząstka naładowana nie może poruszać się po
 A linii śrubowej B okręgu C elipsie D prostej
2. W ruchu jednostajnym po okręgu wartość siły dośrodkowej wynosi
 A $m\omega^2 r$ B $\frac{m\omega^2}{r}$ C 0 D $mv^2 r$
3. Przyspieszenie ziemskie wyznaczone z pomiaru spadku swobodnego
 A jest największe dla $\phi = 45^\circ$ B nie zależy od położenia na Ziemi
 C jest największe na biegunie D jest największe na równiku
4. W idealnie pionową studnię upuszczamy kamień. W którą ścianę studni uderzy
 A wschodnią B południową C północną D zachodnią
5. Okres precesji (obrotu płaszczyzny drgań) wahadła Foucaulta znajdującego się na równiku wynosi
 A 24 h B nie ma precesji C 12 h D 48 h



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego