KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Bryła sztywna

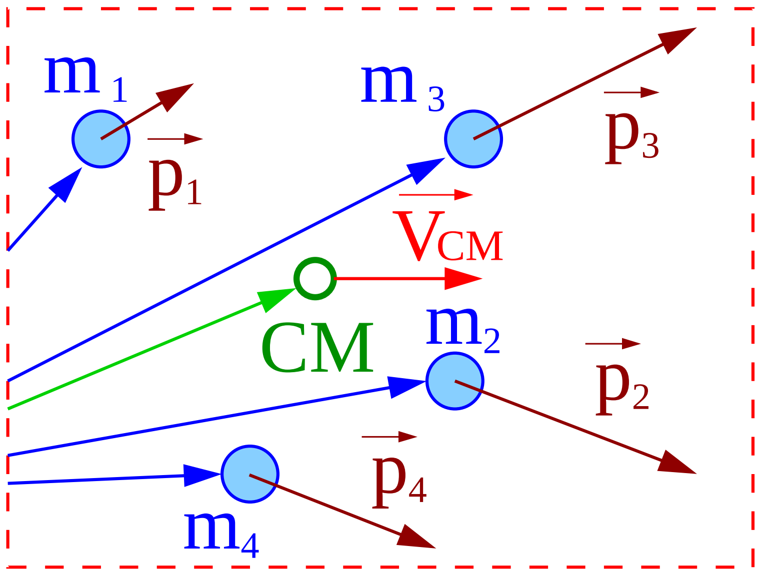
Fizyka I (Mechanika)

Wykład VIII:

- Bryła sztywna
- Statyka i prawa ruchu
- Moment bezwładności
- Energia ruchu obrotowego
- Żyroskop i bąk
- Tensor momentu bezwładności

Bryła sztywna

Układ wielu ciał



układ inercjalny

Masa układu

$$M = \sum_i m_i$$

Położenie środka masy:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \, \vec{r}_i$$

Ruch układu jako całości

Pęd:

$$\vec{P} = M \, \vec{V}_{CM}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{M \, V_{CM}^2}{2} + E_k^\star$$

Moment pędu:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^\star$$

$E_k^\star$ - energia “wewnętrzna”

$\vec{L}_{CM}^\star$ - “wewnętrzny” moment pędu

Bryła sztywna

Układ wielu ciał

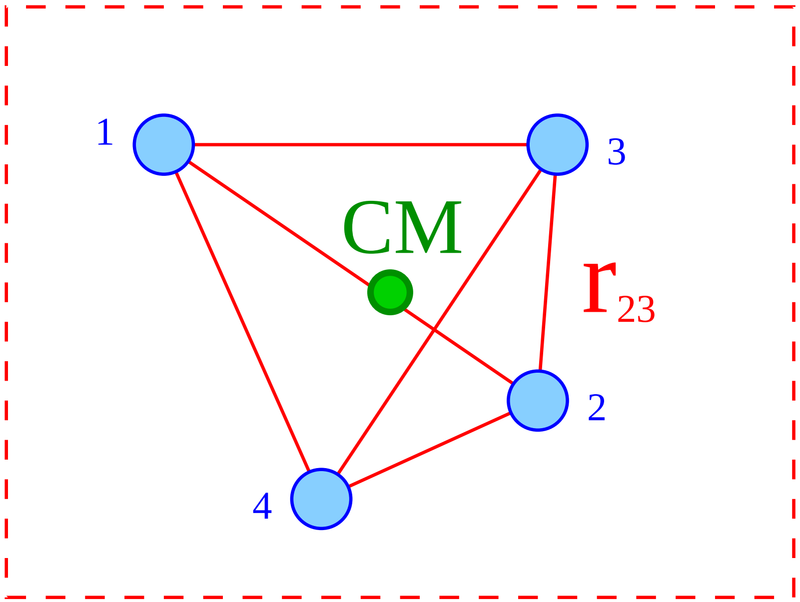
W oparciu o pojęcie środka masy możemy opisać ruch układu jako całości stosując równania ruchu punktu materialnego.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{zw}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{zw}$$

Natomiast ruch względny ciał układu może być (w ogólnym przypadku) bardzo skomplikowany...

Przypadek szczególny



$$r_{ij} = \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = \text{const}$$

Układ ciał w którym względne odległości są stałe $\Rightarrow$ **bryła sztywna** (uogólniona)

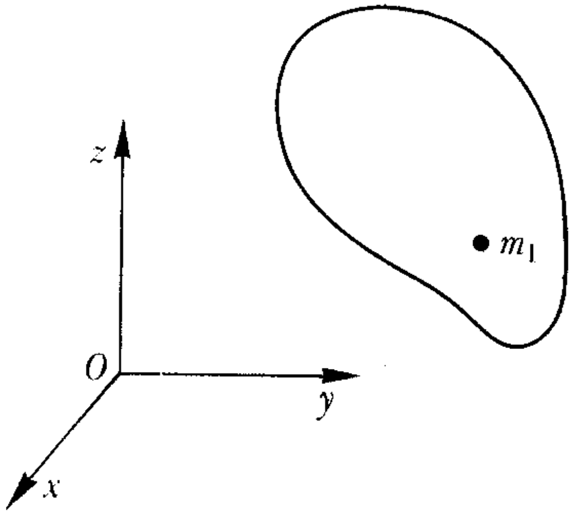
Bryła sztywna

Naogół ciałem sztywnym nazywamy ciało makroskopowe,
które nie podlega deformacjom - wszystkie punkty mają względem siebie stałe odległości.

Położenie

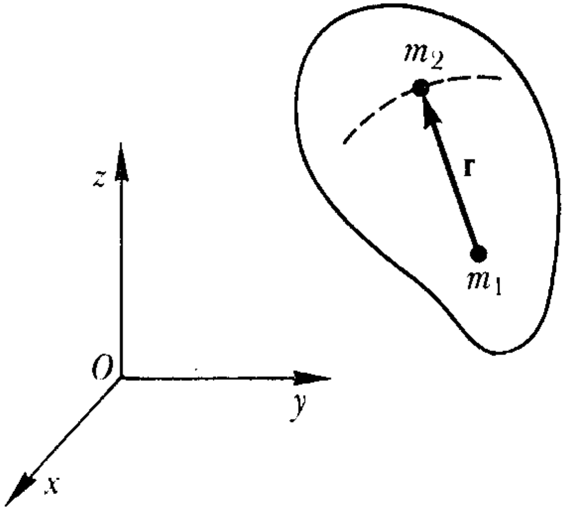
Aby jednoznacznie określić położenie bryły sztywnej w przestrzeni, trzeba określić:

położenie wybranego punktu
np. środka masy



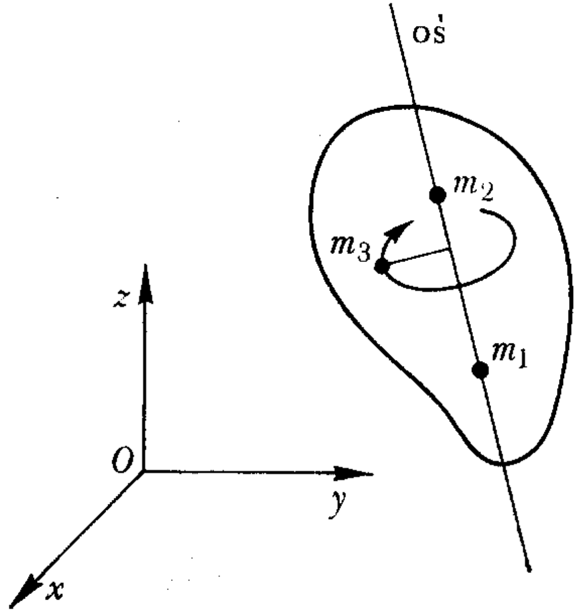
3 parametry
(stopnie swobody)

położenie drugiego punktu



2 parametry
(położenie na sferze)

położenie trzeciego punktu



1 parametr (położenie na okręgu)

$\Rightarrow$ łącznie mamy 6 stopni swobody

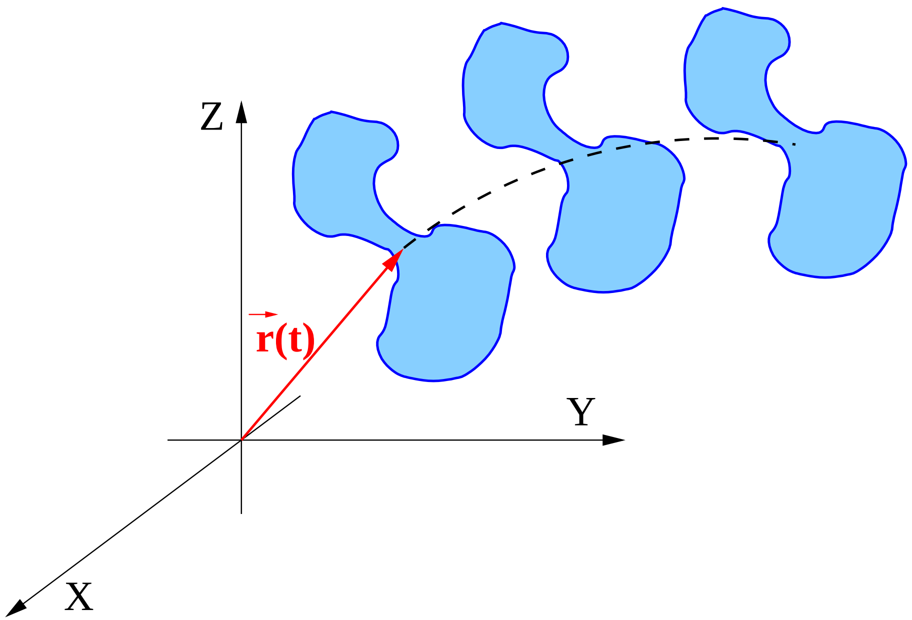
Opis ruchu

Położenie bryły sztywnej opisują 3 współrzędne i 3 kąty

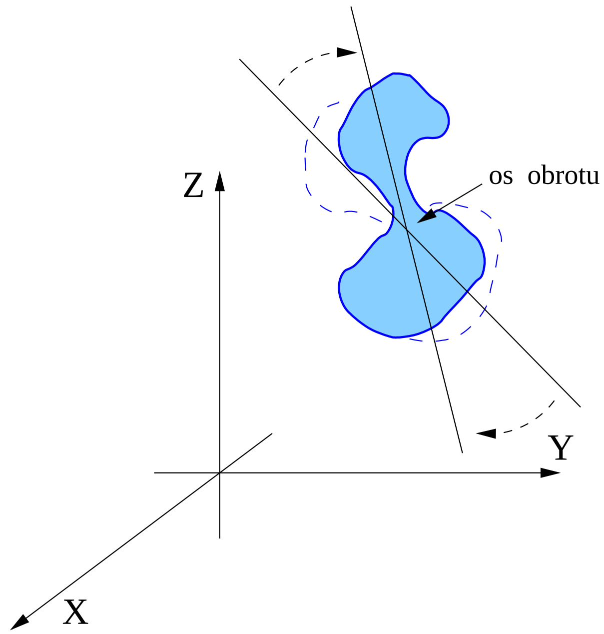
Złożenie ruchów

Ogólny ruch (zmianę położenia) można przedstawić jako złożenie

ruchu postępowego oraz ruchu obrotowego



wektory prędkości są takie same dla wszystkich punktów

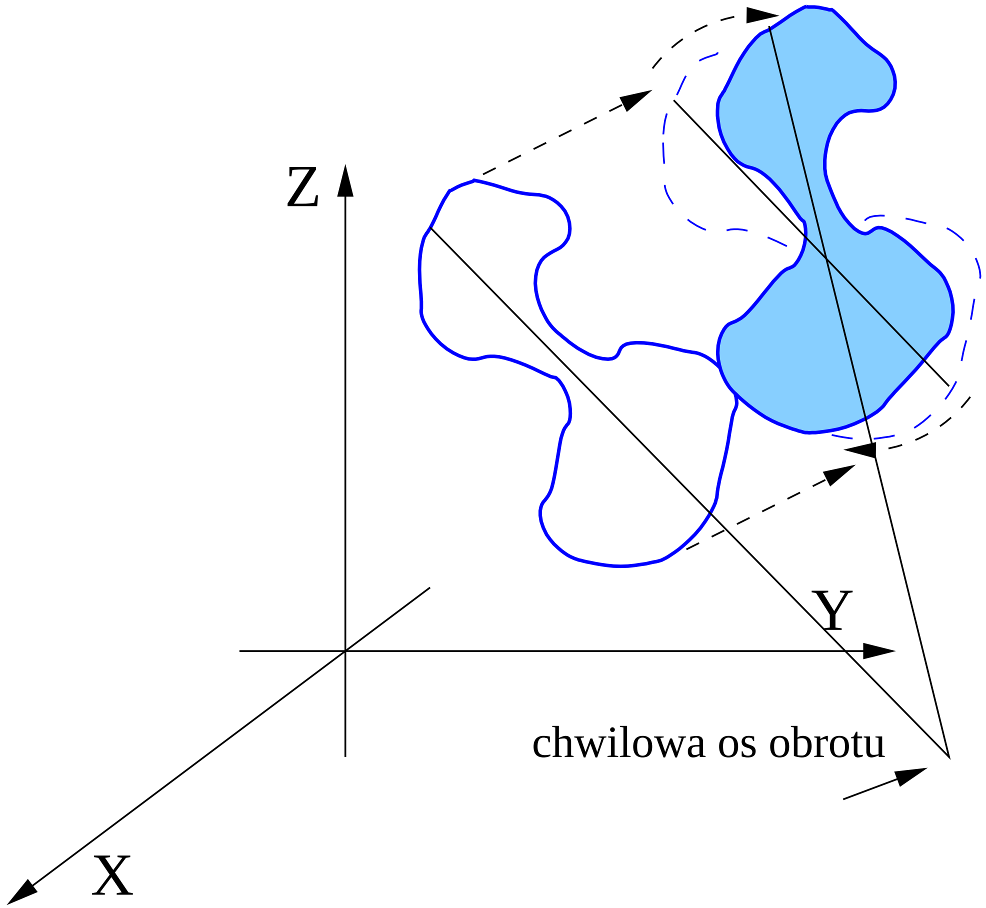


wszystkie punkty poruszają się po okręgach

Opis ruchu

Chwilowa oś obrotu

Czasami złożenie ruchu postepowego i obrotowego (wzgledem np. środka masy) można przedstawić jako ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu



$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_i - \vec{R}\right)$$

Jeśli $\vec{V}_{CM} \perp \vec{\omega}$ wtedy:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_i - \vec{R}'\right)$$

$\vec{R}'$ - położenie chwilowej osi obrotu (zmienne w czasie)

Opis ruchu

Więzy

Ruch bryły sztywnej w ogólnycm przypadku opisuje kolejnych 6 parametrów (np. prędkość środka masy i prędkość kątowa w układzie środka masy)

W wielu zagadnieniach ruch bryły sztywnej jest jednak ogranicznony przez więzy:

- koło obracające się na nieruchomej osi $\Rightarrow$ jeden stopień swobody (kąt obrotu)
- walec toczący się bez poślizgu $\Rightarrow$ jeden st. swobody (kąt obrotu **lub** przesunięcie)
- walec toczący się z poślizgiem $\Rightarrow$ dwa stopnie swobody (kąt obrotu **i** przesunięcie)
- kulka toczące się bez poślizgu $\Rightarrow$ trzy stopnie swobody (trzy składowe $\vec{\omega}$)

W rozwiązywaniu zagadnień kluczowe jest zrozumienie jakie są stopnie swobody

Obecność więzów oznacza też obecność sił reakcji więzów...

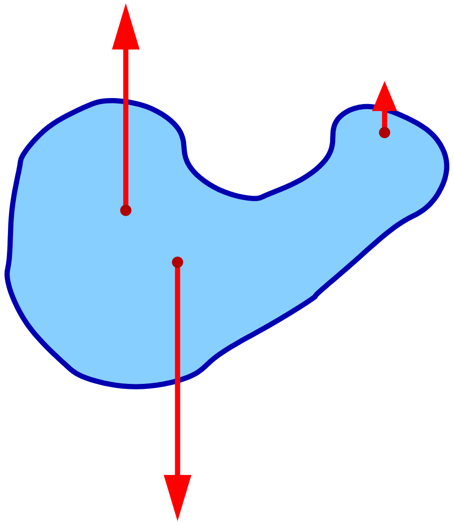
Statyka

Warunek równowagi

Bryła sztywna pozostaje nieruchoma, wtedy i tylko wtedy, gdy działające na nią siły i momenty sił równoważą się:

$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{M}^{zw} = \sum_i \vec{M}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$



Jeśli $\vec{F}^{zw} = 0$ to wypadkowy moment sił względem każdej osi jest taki sam ! (wystarczy sprawdzić raz)

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \vec{R}$$

$$\vec{M}' = \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{M}$$

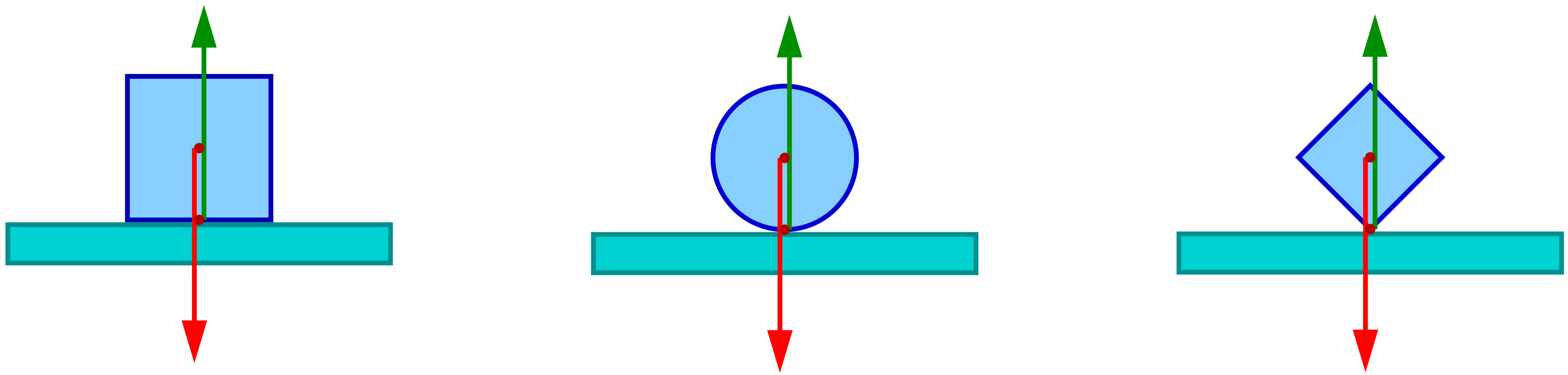
Siłami z którymi naogół bedziemy mieli do czynienia są siła ciężkości i siły reakcji więzów

Statyka

Równowaga

Nawet jeśli warunek $\vec{F}^{zw} = \vec{M}^{zw} = 0$ jest spełniony, równowaga może być:

trwała obojętna chwiejna



Nieznaczne (infintezymalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

pojawienie się siły wypadkowej (momentu siły) przywracającej równowagę

zmianę położenia równowagi

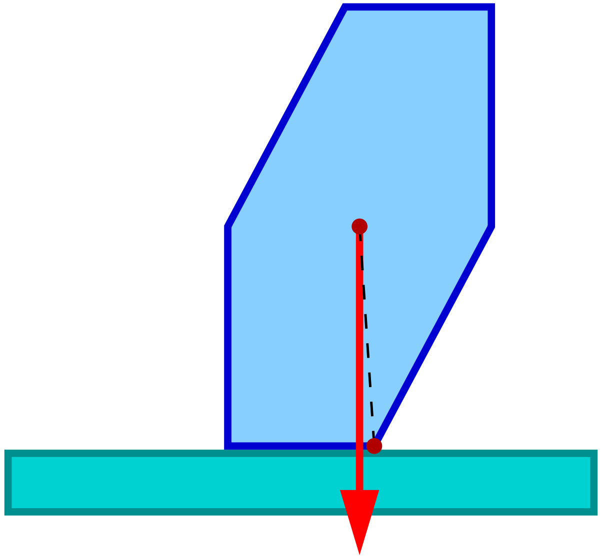
pojawienie się siły wypadkowej zwiększającej wychylenie

Statyka

Przykład I

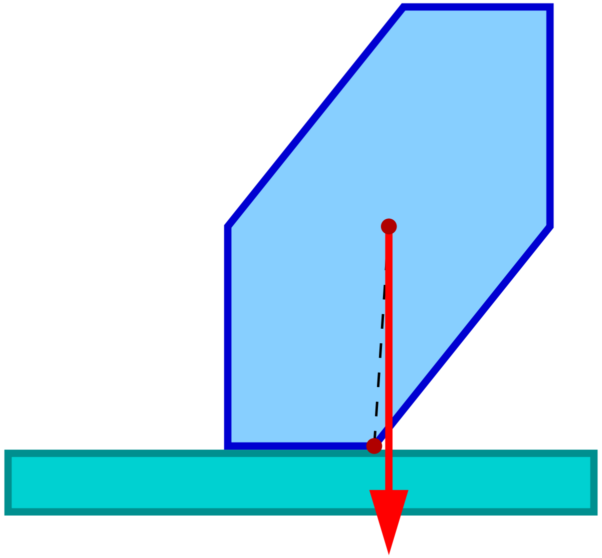
Warunkiem równowagi trwałej dla wielościanu (ustawionego na poziomej powierzchni, pod działaniem siły ciężkości) jest aby pion wypuszczony ze środka ciężkości przechodził przez podstawę.

Równowaga trwała



Moment siły ciężkości "dociska" bryłę do powierzchni

Brak równowagi



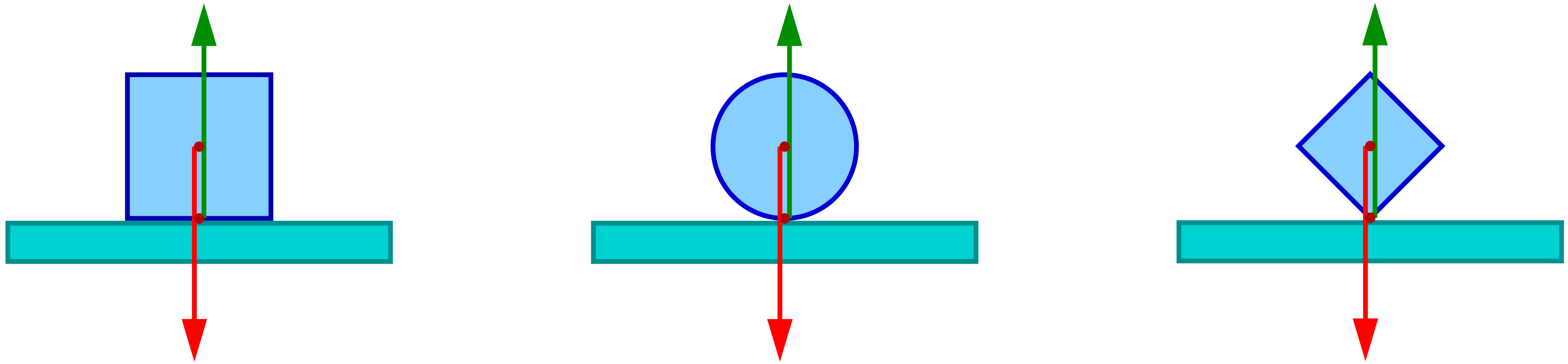
Moment siły ciężkości wywraca bryłę

Statyka

Równowaga

Równowaga bryły na którą działa siła ciężkości i siły reakcji można sklasyfikować patrząc na położenie środka masy (energię potencjalną): $(\vec{F} = -\mathrm{grad} E_p)$

równowaga trwała | obojętna | chwiejna



Nieznaczne (infintezymalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

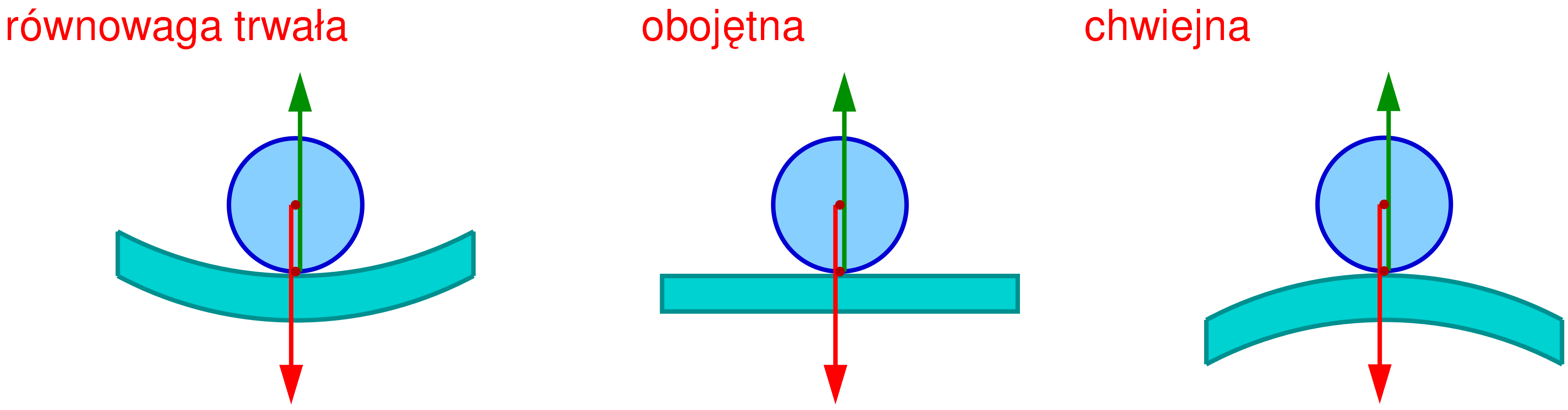
podniesienie środka masy wzrost energii potencjalnej	brak zmian położenia środka masy	obniżenie środka masy zmniejszenie energii potencjalnej

Statyka

Równowaga

Zmiana położenia środka masy, przy wychyleniu z położenia równowagi, zależy od kształtu bryły, ale także od charakteru więzów.

Np: równowaga kuli zależy od kształtu powierzchni na której leży



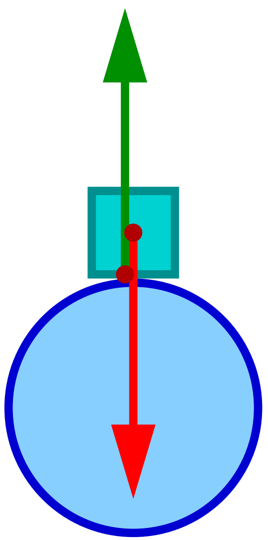
Typ równowagi zależy od zmiany położenia środka masy $(\vec{F} = -\mathrm{grad}\, E_p)$

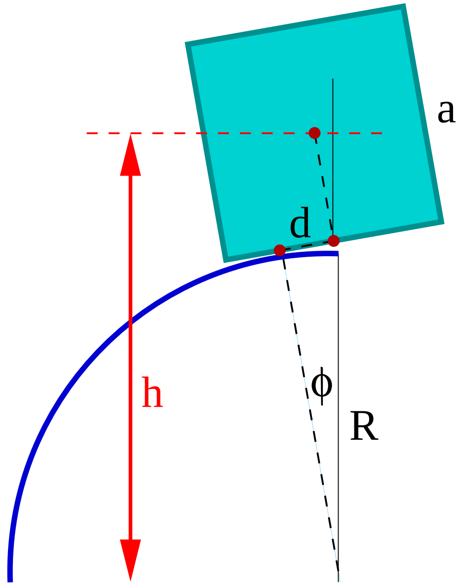
Statyka

Równowaga

Kryterium zmiany położenia środka masy $\Rightarrow$ energii potencjalnej ma zastosowanie także w bardziej ogólnych przypadkach

Np: sześcian ustawiony na kuli





Położenie środka masy sześcianu (nad środkiem kuli):

$$h \;=\; R\,\cos\phi \;+\; d\,\sin\phi \;+\; \frac{1}{2}a\,\cos\phi$$

$$d \;=\; R\,\phi$$

$$h \;=\; \left(R+\frac{a}{2}\right)\,\cos\phi \;+\; R\,\phi\,\sin\phi$$

w przybliżeniu małych kątów:

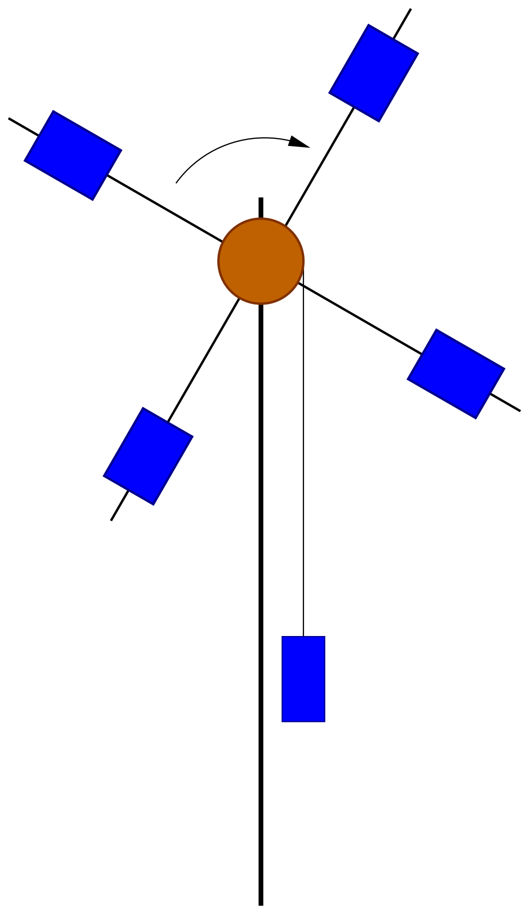
$\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1-\frac{1}{2}\phi^2$

$$h \;=\; \left(R+\frac{a}{2}\right) \;+\; \frac{1}{2}\left(R-\frac{a}{2}\right)\cdot\phi^2$$

Równowaga trwała jeśli $R > \frac{a}{2}$

Prawa ruchu

Obrót wokół ustalonej osi



Dla bryły sztywnej obracającej się wokół ostalonej osi mement pędu (skalarnie):

$$L = \omega \sum_i m_i \, r_{\perp\, i}^2 = \omega \, I \qquad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$r_{\perp\, i}$ - odległość masy i od osi obrotu,
I - moment bezwładności **względem wybranej osi**.

Pod wpływem stałego momentu siły M:

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \sum_i m_i \, r_{\perp\, i}^2 = \varepsilon \, I$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad - \quad \text{przyspieszenie kątowe}$$

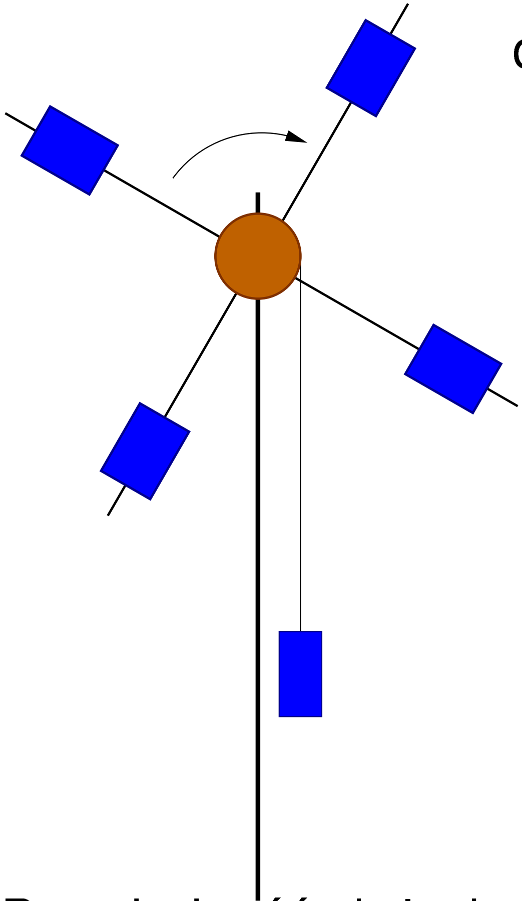
$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{M}{I} = \text{const}$$

ruch jednostajnie przyspieszony (dla I=const)

Moment siły zależy zarówno od wartości siły jak i jej ramienia: $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

Prawa ruchu

Uściślenie



Założyliśmy przed chwilą, że moment siły jest stały i nie zależy od l. Jednak ciężarek też porusza się ruchem przyspieszonym:

$$\begin{aligned} \text{ciężarek:} \quad ma &= Q - N \\ \text{rotor:} \quad I\varepsilon &= rN \end{aligned}$$

Q - ciężar ciężarka, N - siła naprężenia nici.

Eliminując $N = m(g-a)$:

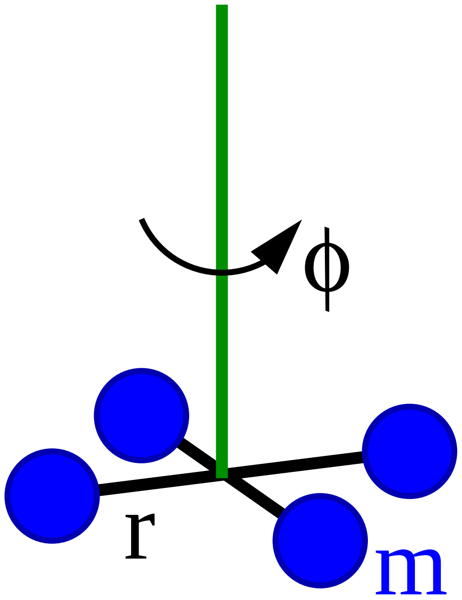
$$\begin{aligned} I\varepsilon &= r\,m(g - r\varepsilon) \\ (I + mr^2)\,\varepsilon &= mgr \\ \varepsilon &= \frac{mgr}{I + mr^2} = \frac{mgr}{I'} \end{aligned}$$

Bezwładność ciężarka efektywnie zwiększa moment bezwładności rotora: $I' = I + mr^2$

Nigdy nie uzyskamy przyspieszenia większego niż $\varepsilon_{max} = \frac{g}{r}$

Prawa ruchu

Ruch harmoniczny



Moment siły zależy od kąta skręcenia pręta ϕ:

$$M = -\xi\,\phi$$

ξ - współczynnik “sprężystości”
moment siły ma znak przeciwny do skręcenia

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\,I = \frac{d^2\phi}{dt^2}\,I$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{\xi}{I}\,\phi$$

równanie oscylatora harmonicznego.
Częstość drgań:

$$\nu = \sqrt{\frac{\xi}{I}} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sum_i m_i\, r_{\perp\, i}^2}} \approx \frac{\sqrt{\xi}}{2r\sqrt{m}}$$

Moment bezwładności

Przyspieszenie kątowe w ruchu bryły sztywnej zależy nie tylko od masy całkowitej, ale także od jej rozłożenia względem osi obrotu.

Rozkład masy względem wybranej osi obrotu
(najczęściej przechodzącej przez środek masy, ale nie koniecznie)
opisuje moment bezwładności

$$I = \sum_i m_i \, r_{\perp\, i}^2$$

w przypadku ciągłego rozkładu masy - całka po objętości:

$$I = \int dV \, \rho \, r_\perp^2$$

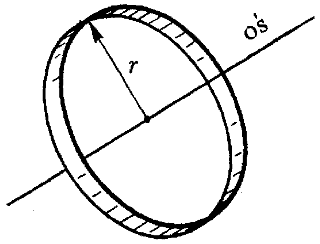
Dla ciała jednorodnego (ρ = const = $\frac{M}{V}$):

$$I = \frac{M}{V} \int dV \; r_\perp^2 = M \frac{\int dV \; r_\perp^2}{\int dV} = M \langle r_\perp^2 \rangle$$

gdzie $\langle r_\perp^2 \rangle$ - średni kwadrat odległości od osi obrotu

Moment bezwładności

Stosunek m. bezwładności do masy zależy od kształtu i rozmiarów ciała: $\frac{I}{M} = \langle r_\perp^2 \rangle$

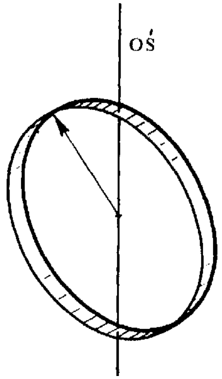


Obręcz

(pusta w środku) obrót **wokół osi symetrii**

Wszystkie punkty równoodległe od osi:

$$\langle r_\perp^2 \rangle = r^2 \Rightarrow I_\perp = M\, r^2$$

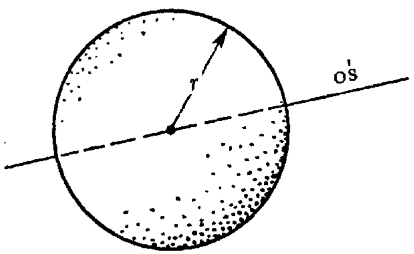


Obrót **wokół średnicy**

oś obrotu - oś X, średnica prostopadła do osi obrotu - oś Y

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \textbf{i} \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle r_\perp^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{1}{2} r^2 \quad \Rightarrow \quad I_\parallel = \frac{1}{2} M\, r^2$$



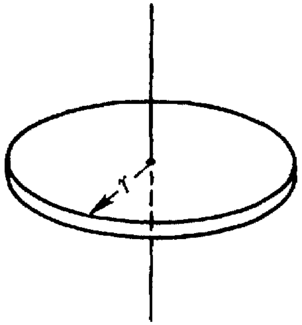
Sfera

(powierzchnia kuli) obrót **wokół osi symetrii**

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ \textbf{i} \ \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$$

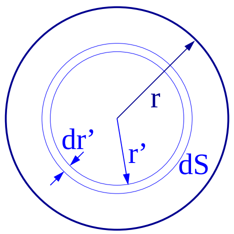
$$\Rightarrow \quad \langle r_\perp^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2}{3} r^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} M\, r^2$$

Moment bezwładności



Koło (krążek) obrót **wokół osi symetrii**

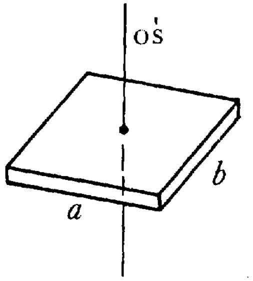
Koło = suma wielu obręczy $\Rightarrow$ śrenia po powierzchni:



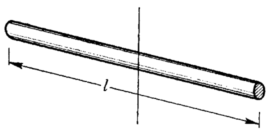
$$\langle r_\perp^2 \rangle = \frac{\int r'^2 \cdot dS}{S} = \frac{1}{\pi r^2} \int r'^2 \cdot 2\pi r' dr' = \frac{2\pi}{\pi r^2} \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2} r^2$$

$$\Rightarrow \quad I_\perp = \frac{1}{2} M r^2$$

Podobnie można wyznaczyć I dla innych brył:

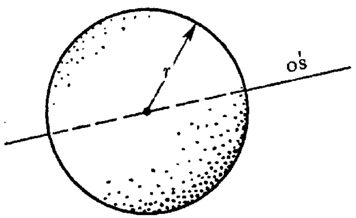


Prostokąt $\Rightarrow$ $I_\perp = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$



Pręt $\Rightarrow$ $I = \frac{1}{12} M l^2$

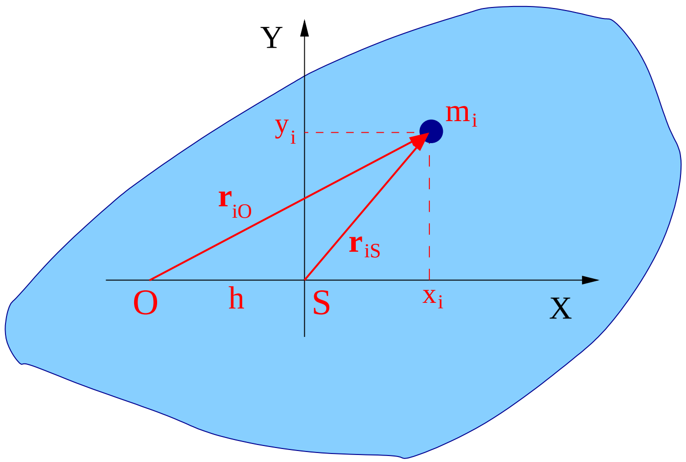
Obrót **wokół osi prostopadłej**, przechodzącej przez środek.



Kula (jednorodna) $\Rightarrow$ $I = \frac{2}{5} M r^2$

Moment bezwładności

Twierdzenie o osiach równoległych



Zazwyczaj liczymy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości S
(wszystkie podane przykłady)

Bryła może jednak wirować wokół dowolnej osi...

Moment bezwładności względem osi równoległej 0, odległej o h od osi S: (XY: układ środka masy)

$$r_{iO}^2 = (x_i + h)^2 + y_i^2 \quad = \quad h^2 + 2hx_i + r_{iS}^2$$

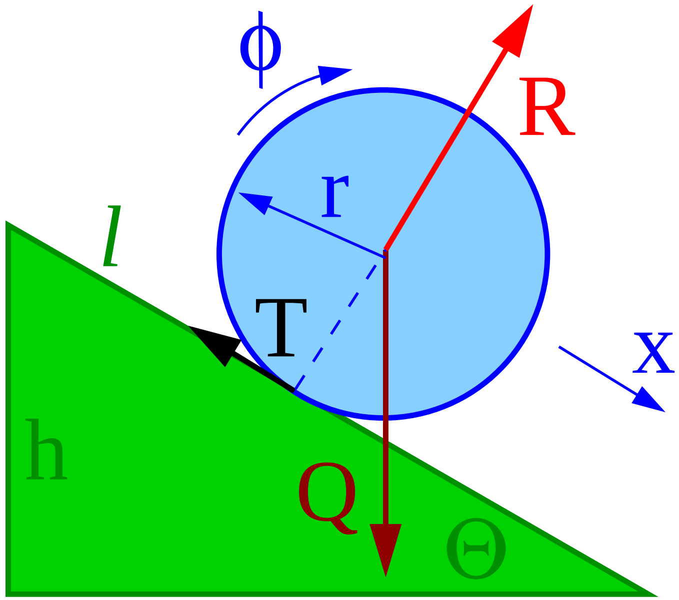
$$I_O = \sum_i m_i r_{iO}^2 = h^2 \sum_i m_i \quad + \quad 2h \sum_i m_i x_i + \sum_i m_i r_{iS}^2$$

$$\Rightarrow \quad I_O \quad = \quad I_S \; + \; M\, h^2$$

Twierdzenie Steinera

Prawa ruchu

Równia pochyła



Staczanie po równi pochyłej symetrycznej bryły (obręcz, walec, kula...) bez poślizgu:

$$x = r\,\phi \quad \Rightarrow \quad a = r\,\varepsilon$$

Ruch postępowy (wzdłuż równi):

$$m a \;=\; Q \sin\theta \;-\; T$$

Ruch obrotowy (względem środka masy):

$$I\,\varepsilon \;=\; T\,r$$

Eliminując siłę tarcia:

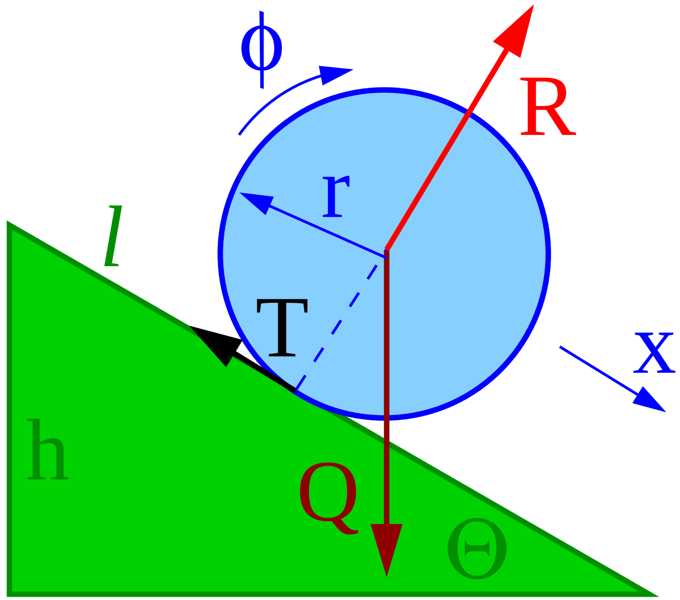
$$m a + \frac{I\varepsilon}{r} \;=\; m g \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad a \;=\; \frac{g\,\sin\theta}{1 + \frac{I}{m r^2}}$$

Im większy moment bezwładności, tym wolniej stacza się ciało...

Prawa ruchu

Równia pochyła



Zagadnienie można rozwiązać w sposób równoważny korzystając z chwilowej osi obrotu i twierdzenia Steinera

Równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu (linia styku bryły z równią):

$$I_o \, \varepsilon \;=\; Q \, \sin\theta \cdot r$$

Z twierdzenia Steinera:

$$I_o \;=\; I + m\, r^2$$

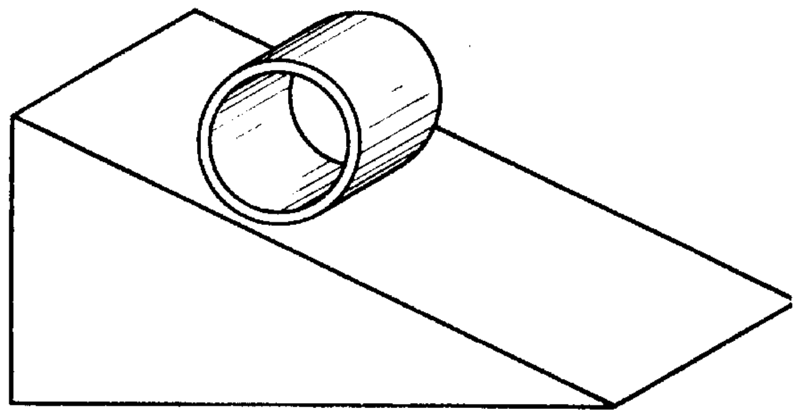
Otrzymujemy:

$$a = r\,\varepsilon \;=\; \frac{mg\,\sin\theta\, r^2}{I_o} \;=\; \frac{mr^2\, g\,\sin\theta}{mr^2 + I}$$

Prawa ruchu

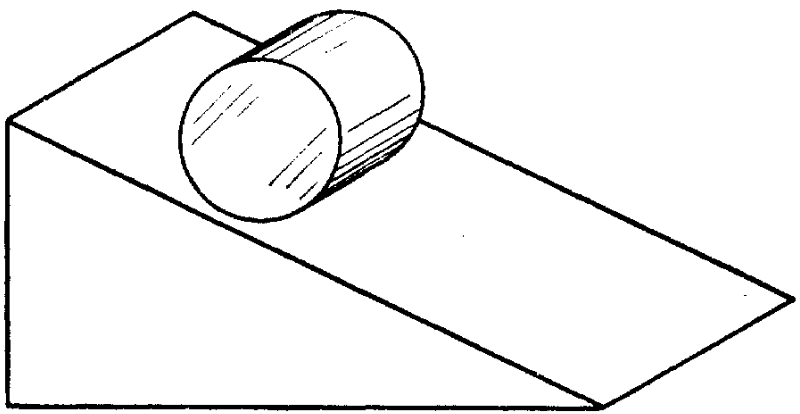
Równia pochyła

Rura



$$a = \frac{1}{2} g \sin\theta$$

Walec

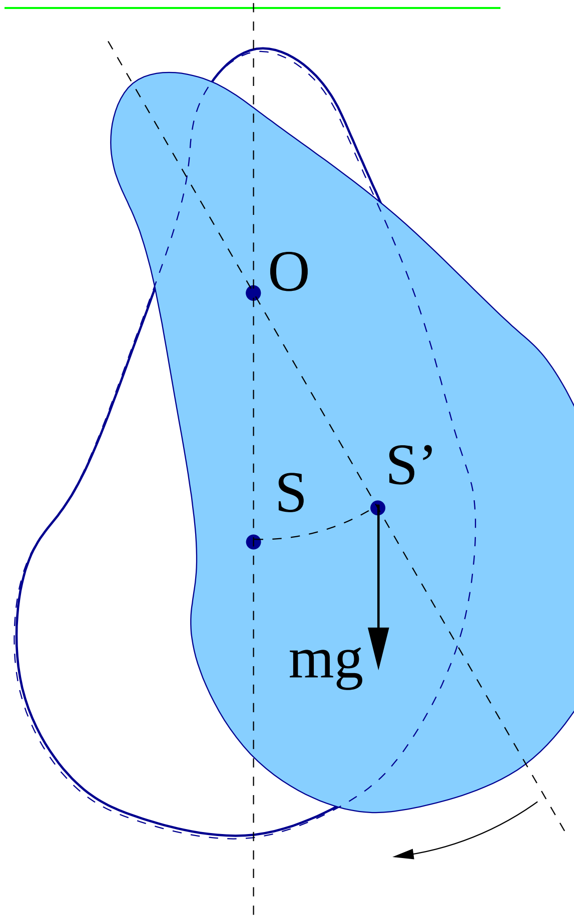


$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

$\frac{1}{3}$ szybciej

Prawa ruchu

Wahadło fizyczne



Równanie małych drgań bryły sztywnej, wokół osi obrotu O przechodzącej w odległości l od środka ciężkości S:

$$I_o\,\varepsilon = -mg\sin\phi\cdot l$$

$$\left(I+ml^2\right)\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -mgl\,\phi$$

Częstość drgań (równanie oscylatora harmonicznego):

$$\nu = \sqrt{\frac{mgl}{I+ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l(1+\frac{I}{ml^2})}}$$

długość zredukowana wahadła: $l_z = l(1+\frac{I}{ml^2}) > l$

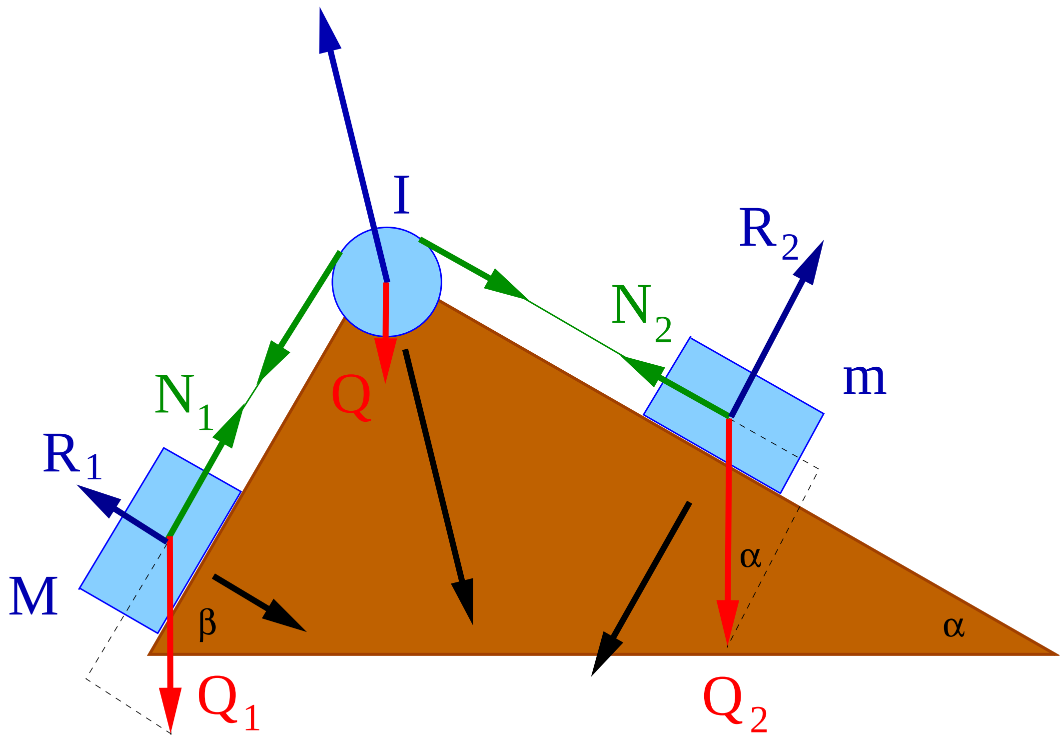
długość wahadła matematycznego o tej samej częstości

Dla danego l częstość drgań jest niższa niż dla wahadła matematycznego
- dodatkowy wkład od bezwładności związanej z ruchem obrotowym (I).

Prawa ruchu

Przykład

Dwa klocki na równi poruszające się bez tarcia, połączone nieważką nicią przerzuconą przez **ważki** bloczek o momencie bezwładności I.



Powierzchnia równi jest więzem, który ogranicza ruch klocków do kierunku równoległego do powierzchni równi.

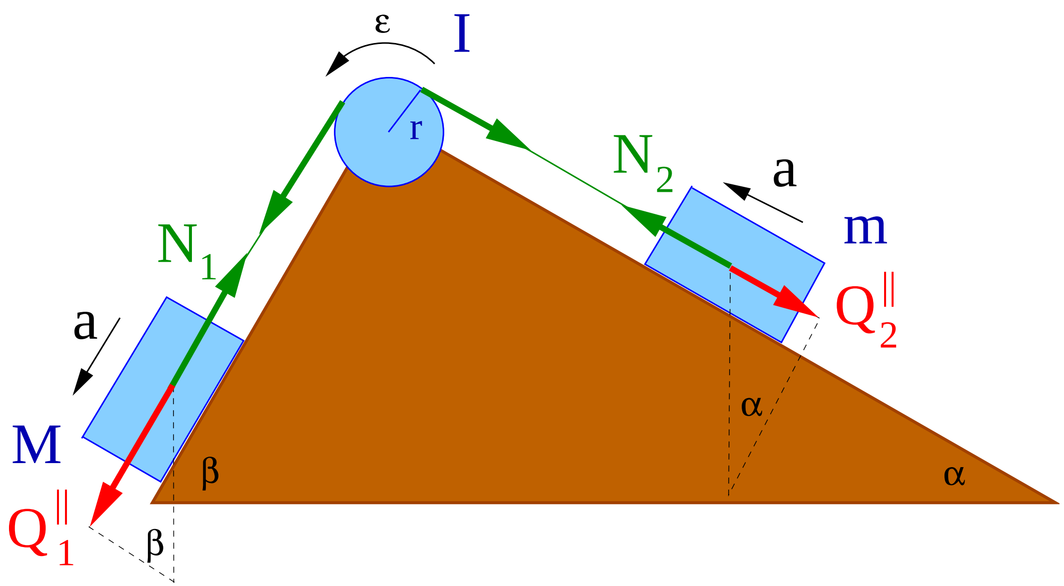
Możemy zredukować problem do ruchu jednowymiarowego.

W przypadku ważkiego bloczka, jeśli układ nie jest w równowadze, siły naprężenia mogą być różne!

$$N_1 \neq N_2$$

Prawa ruchu

Przykład



Wybieramy dodatni kierunek przyspieszenia jak na rysunku. Przyspieszenia ciał:

$$a_1 = a_2 = a \qquad \varepsilon\, r = a$$

nierozciągliwa nić nie ślizga się po bloczku

Równania ruchu:

$$\begin{aligned} Ma &= Q_1^{\parallel} - N_1 = Mg\sin\beta - N_1 \\ ma &= N_2 - Q_2^{\parallel} = N_2 - mg\sin\alpha \\ I\varepsilon &= I\,\frac{a}{r} = N_1 r - N_2 r \end{aligned}$$

Układ trzech równań z trzema niewiadomymi (a, N_1 i N_2).

Dodajemy stronami dwa pierwsze i podstawiamy $N_1 - N_2$ z trzeciego.

Otrzymujemy:

$$a = g\,\frac{M\sin\beta - m\sin\alpha}{M + m + \frac{I}{r^2}}$$

Energia

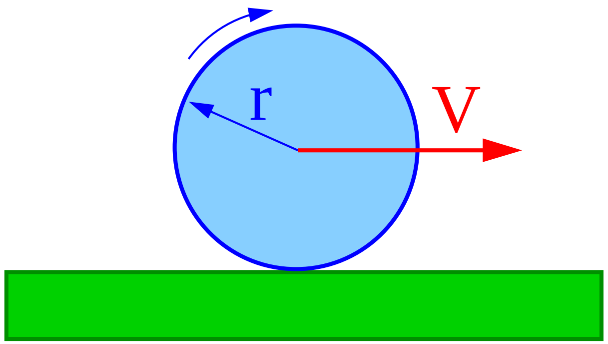
Energia ruchu obrotowego

Energia kinetyczna układu ciał:

$$E_k = E_k^{\star} + \frac{M\,V_{CM}^2}{2}$$

Bryła sztywna: energia "wewnętrzna"$\Rightarrow$ energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_k^{\star} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (r_i\,\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\,I \qquad = \frac{1}{2}\omega\,L$$



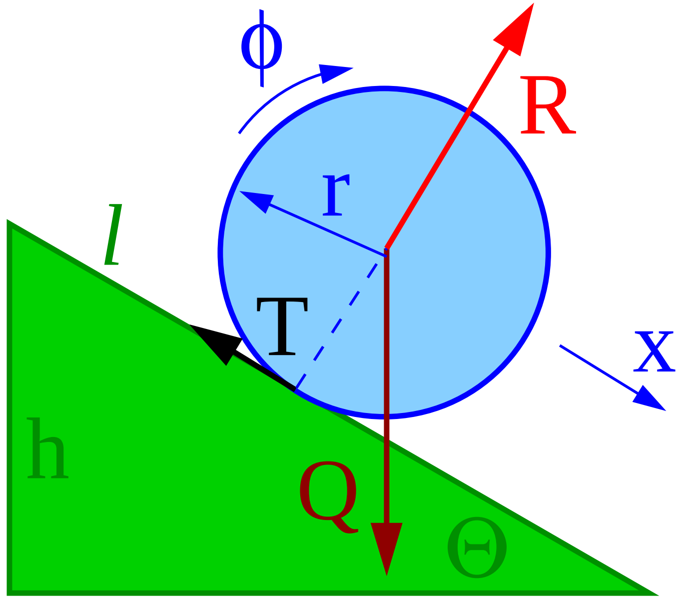
Ciało toczące się bez poślizgu: $v = \omega\,r$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

$m\,\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$ - efektywna masa bezwładna
przy niezmienionej masie grawitacyjnej

Energia

Równia pochyła



Prędkość jaką uzyska ciało staczające się bez poślizgu z równi o wysokości h. Z zasady zachowania energii:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mr^2}}}$$

Przyspieszenie

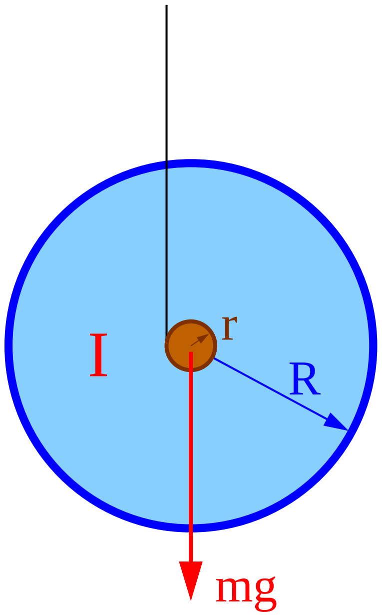
prędkość średnia $\langle v\rangle = \frac{1}{2}v$

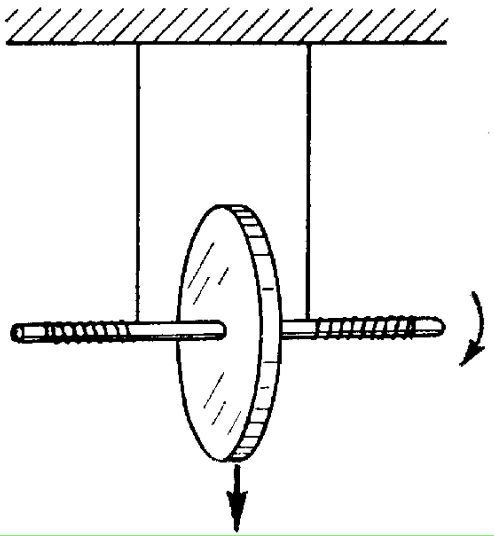
czas ruchu $t = \frac{l}{\langle v\rangle} = \frac{2l}{v}$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2l} = \frac{2gh}{2l\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}}$$

Energia

Koło Maxwella





Koło o promieniu R “toczy się” po osi o promieniu r.

Jak w przypadku równi pochyłej $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

obręcz: $I = mR^2$

$$\Rightarrow \quad a = g\,\frac{r^2}{R^2 + r^2} \ll g$$

Przyspieszenie liniowe wielokrotnie mniejsze od przyspieszenia w spadku swobodnym...

Energia potencjalna zamienia się głównie na energię ruchu obrotowego.

Porównanie

Punkt materialny		Bryła sztywna	
ruch postępowy		ruch obrotowy (względem osi symetrii !)	
• przesunięcie	$\vec{x}$	$\Rightarrow$ kąt obrotu	$\vec{\phi}$
• prędkość	$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$	$\Rightarrow$ prędkość kątowa	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
• przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\Rightarrow$ przyspieszenie kątowe	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
• masa	m	$\Rightarrow$ moment bezwładności	I
• pęd	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\Rightarrow$ moment pędu	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
• układ izolowany	$\vec{p} = const$	$\Rightarrow$ układ izolowany	$\vec{L} = const$

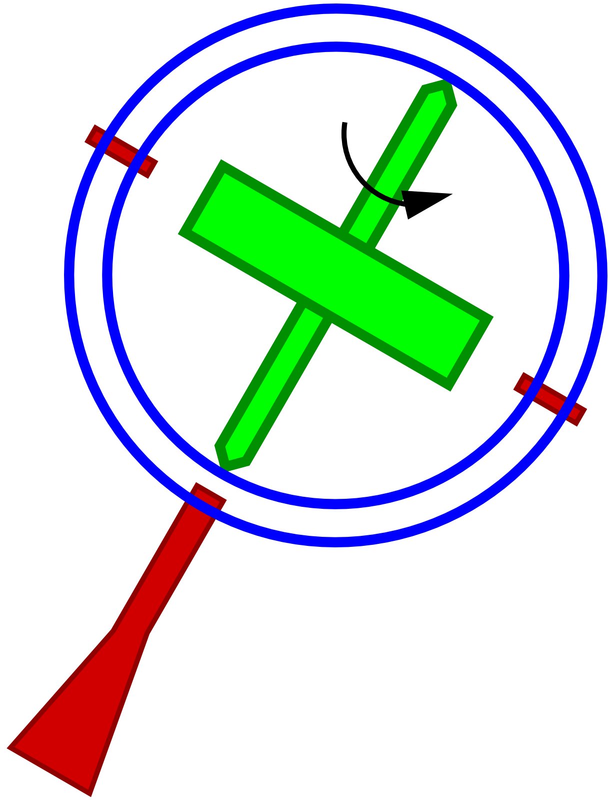
Porównanie

Punkt materialny			Bryła sztywna	
ruch postępowy			ruch obrotowy (względem osi symetrii !)	
• siła	$\vec{F}$	$\Rightarrow$	moment siły	$\vec{M}$
• równania ruchu	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\Rightarrow$	równania ruchu	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\Rightarrow$		$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
• praca	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$	$\Rightarrow$	praca	$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$
• energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$\Rightarrow$	energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

Dla ruchu obrotowego względem ustalonej osi, pokrywającej się z osią symetrii bryły !!!

Żyroskop

Efekt żyroskopowy



Zasada zachowania momentu pędu

Jeśli poprzez specjalne zamocowanie zapewnimy znikanie momentów sił to kierunek momentu pędu pozostanie stały niezależnie od działających sił zewnętrznych i ruchu postępowego

$\Rightarrow$ efekt żyroskopowy

Momenty działających sił są równe zero

$\Rightarrow$ moment pędu jest stały

$\Rightarrow$ orientacja osi obrotu jest stała

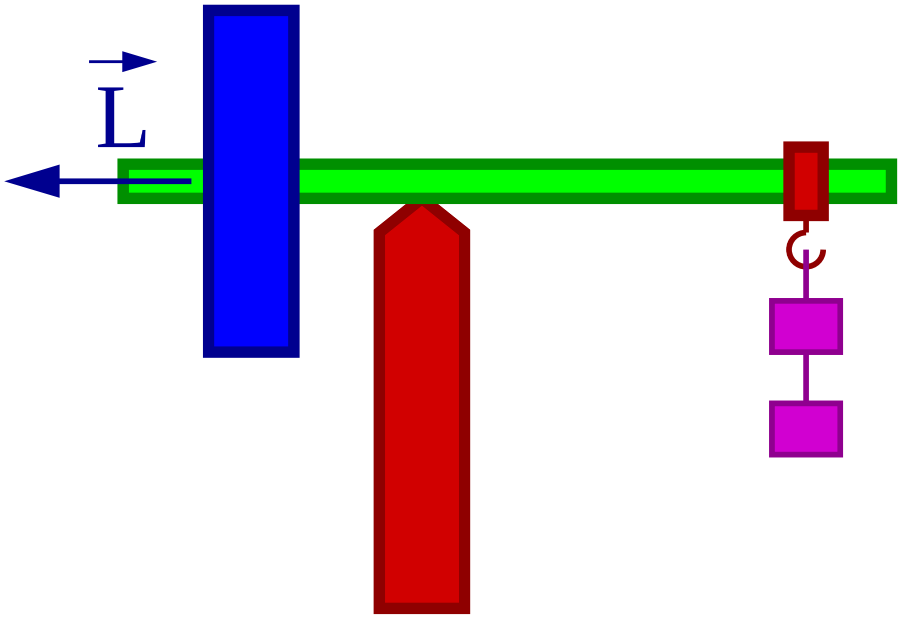
$$\vec{L} = \vec{\omega}\, I = \text{const}$$

Rozkręcony żyroskop utrzymuje orientację swojej osi obrotu w przestrzeni.

Żyroskop

Równowaga

Rozkręcony żyroskop utrzymuje orientację swojej osi obrotu w przestrzeni, pod warunkiem, że momenty sił się równoważą!



Ciężar żyroskopu jest zrównoważona przez odpowiednio dobrane ciężarki

Jeśli żyroskop jest w równowadze przy $\vec{L} = 0$ to będzie także w równowadze dla $\vec{L} \neq 0$

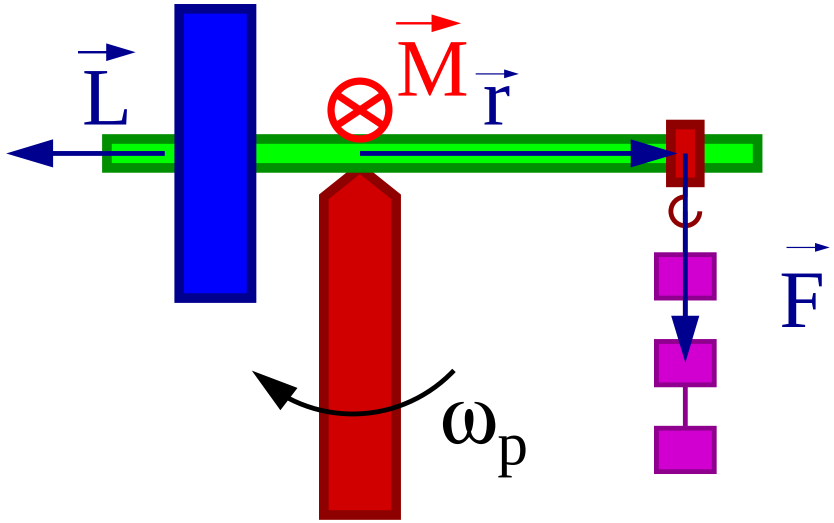
Orientacja żyroskopu pozostaje stała

Jak zachowa się żyroskop gdy zwiększymy lub zmniejszymy "przeciwwagę" ?

Żyroskop

Precesja

zwiększone obciążenie



Niezrównoważony moment siły ciężkości względem punktu podparcia O:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$M = \Delta m g r$$

Pojawia się moment siły $\vec{M}$ skierowany prostopadle pionu ($\vec{g}$) i do osi żyroskopu ($\vec{r}$)

Wektor momentu pędu $\vec{L} \perp \vec{M}$

$\Rightarrow$ wartość momentu pędu nie ulega zmianie

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

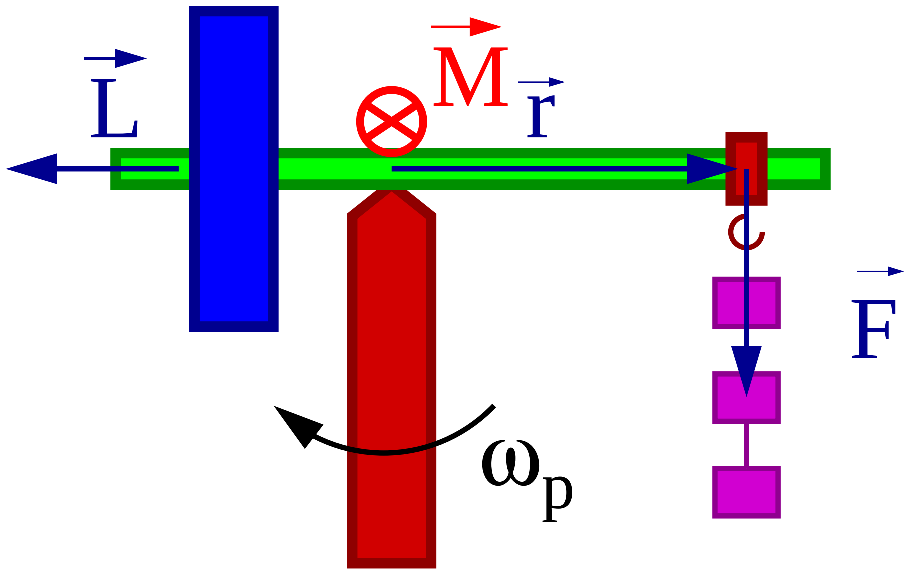
$\Rightarrow$ kierunek momentu pędu zmienia się $\Rightarrow$ **precesja**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega_p} \times \vec{L} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \omega_p \, L = \Delta m \, r \, g$$

Żyroskop

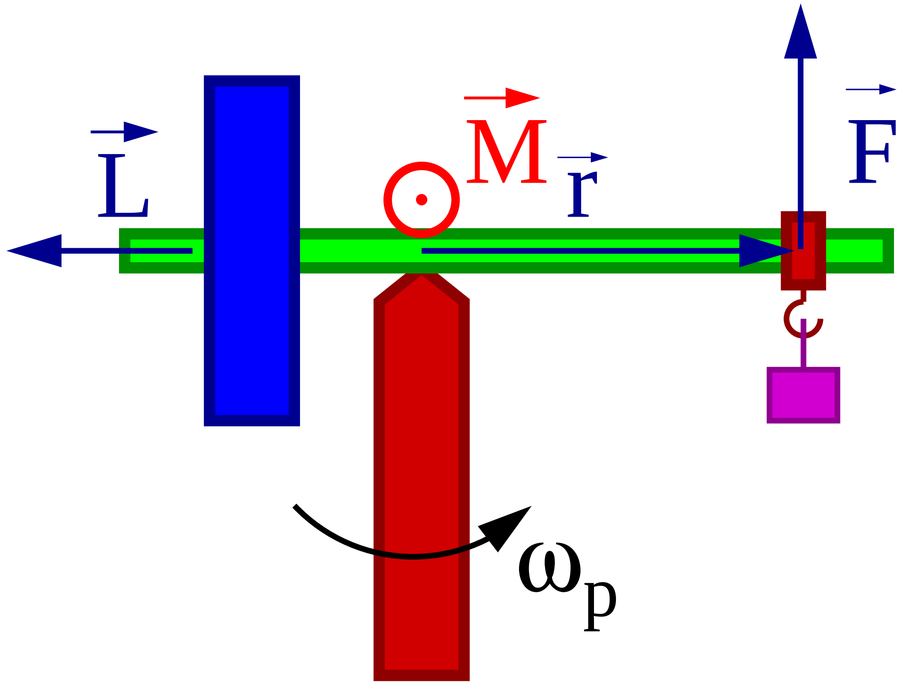
Precesja

zwiększone obciążenie



zgodnie z ruchem wskazówek zegara
(patrząc os góry)

zmniejszone obciążenie

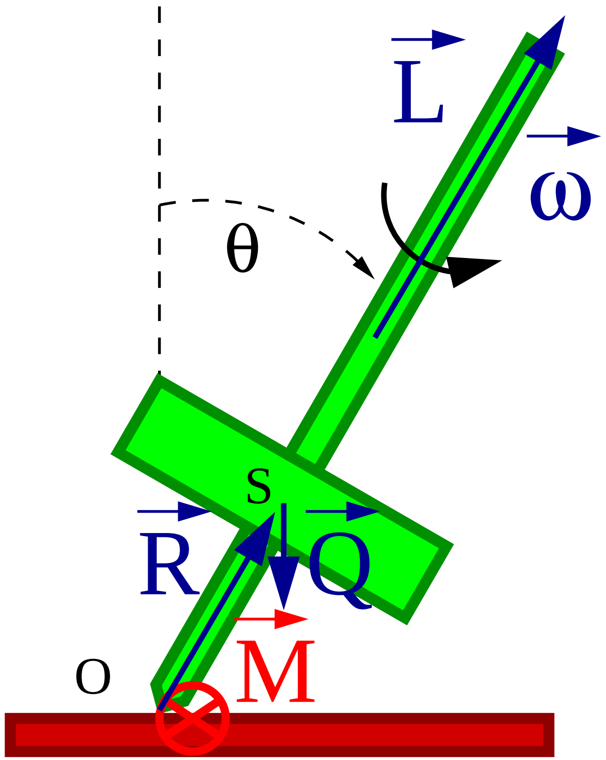


przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Częstość precesji $\omega_p = \frac{\Delta m\, r\, g}{L}$ $\Rightarrow$ proporcjonalna do dodanej/brakującej masy

Bąk

Precesja



Gdyby bąk nie wirował ($L = 0$) to ustawienie pionowe byłoby stanem równowagi nietrwałej. Wywróciłby się.

Moment siły ciężkości względem punktu podparcia O:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{Q}$$
$$M = mgR \sin\theta$$

R - odległość środka ciężkości od punktu podparcia

θ - kąt odchylenia osi od pionu

Moment siły $\vec{M}$ skierowany jest prostopadle do osi bąka!

powoduje zmianę całkowitego momentu pędu: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Wektor momentu pędu $\vec{L} \parallel \vec{\omega} \perp \vec{M} \Rightarrow$ wartość nie ulega zmianie: $\frac{dL}{dt} = 0$

Zmienia się jedynie kierunek momentu pędu $\Rightarrow$ **precesja** $\quad \omega_p = \frac{mRg}{L}$

Częstość precesji maleje ze wzrostem momentu pędu (częstości ruchu wirowego bąka), nie zależy od kąta wychylenia!

Żyroskop

Paradoks ?

Nie wirujący bąk wychylony z położenia równowagi $\vec{L} = 0$
lub nie zrównoważony żyroskop $\vec{L} = 0 \Rightarrow$ wywracają się

Natomiast jeśli $\vec{L} \neq 0$ to bąk i żyroskop podlegają precesji
$\Rightarrow$ nigdy się nie wywrócą (zaniedbując siły tacia).

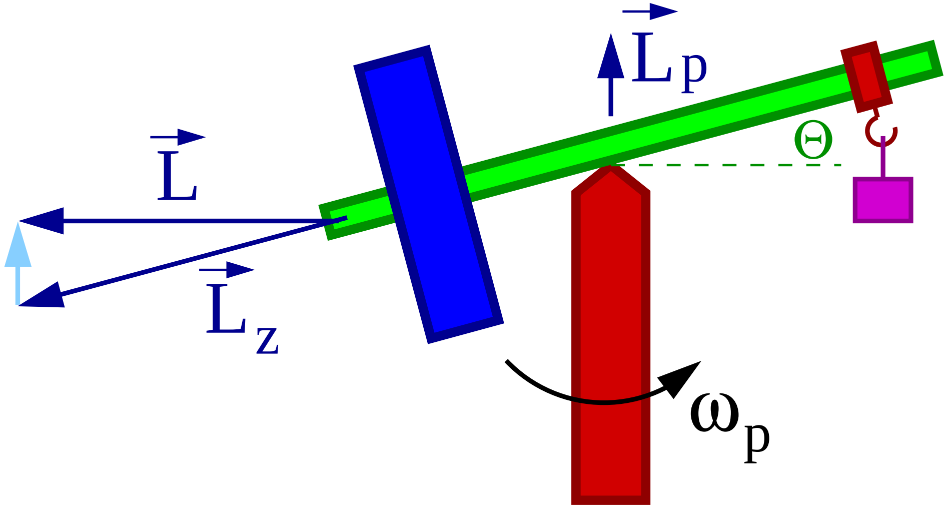
Czy jest to słuszne dla dowolnie małych wartości $\vec{L}$?

Z doświadczenia wiemy, że nie !
Wirujący bąk wywraca się zanim prędkość kątowa jego ruchu wirowego spadnie do zera.

Nasze rozważania precesji nie były ścisłe
$\Rightarrow$ dla małych momentów pędu musimy uwzględnić dodatkowe efekty...

Żyroskop

Precesja



Niech moment pędu zrównoważonego żyroskopu wynosi $\vec{L}$.

Co się dzieje gdy zdejmiemy jeden ciężarek ?

Wartość całkowitego moment pędu nie ulega zmianie, gdyż moment siły ciężkości jest prostopadły do $\vec{L}$.

Obrót żyroskopu z częstością ω_p względem pionowej osi $\Rightarrow$ moment pędu $\vec{L}_p = \omega_p \, I_p$.

Aby całkowity moment pędu nie uległ zmianie, oś żyroskopu musi się nachylić o kąt:

$$\theta \sim \frac{L_p}{L} = \frac{mrgI_p}{L^2}$$

Duże $L \Rightarrow \theta \to 0$ (L_p można pominąć)

Małe $L \Rightarrow$ żyroskop/bąk wywraca się...

Moment pędu

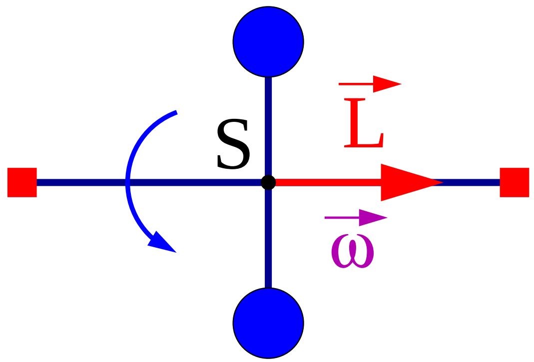
Do tej pory rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy względem ustalonej osi.

Na ogół była to oś symetrii bryły, lub oś do niej równoległa.

W ogólnym przypadku problem jest dużo bardziej skomplikowany

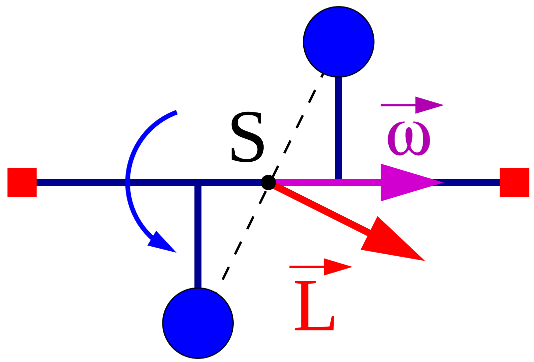
Przykład - dwa wirujące ciężarki

Ciężarki w jednej płaszczyźnie $\perp$ osi



Oś obrotu jest osią symetrii $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Ciężarki rozsunięte wzdłuż osi obrotu



Oś obrotu nie jest osią symetrii $\Rightarrow \vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

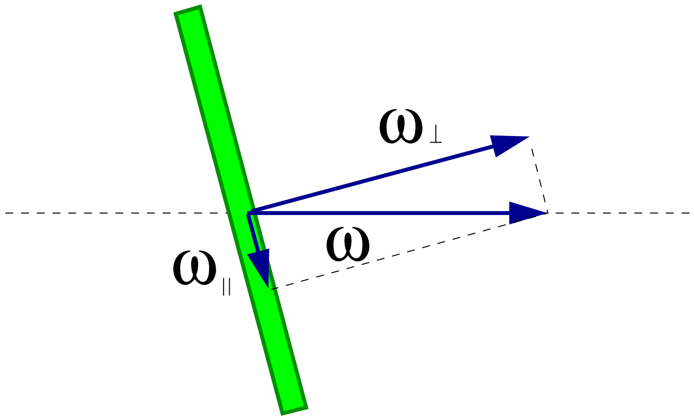
$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \ \perp \ \vec{r}_i$$

Moment pędu

Przykład II

Dysk wirujący wokół osi nachylonej do osi symetrii

Prędkość kątową możemy rozłożyć na składową równoległą i prostopadła do osi symetrii



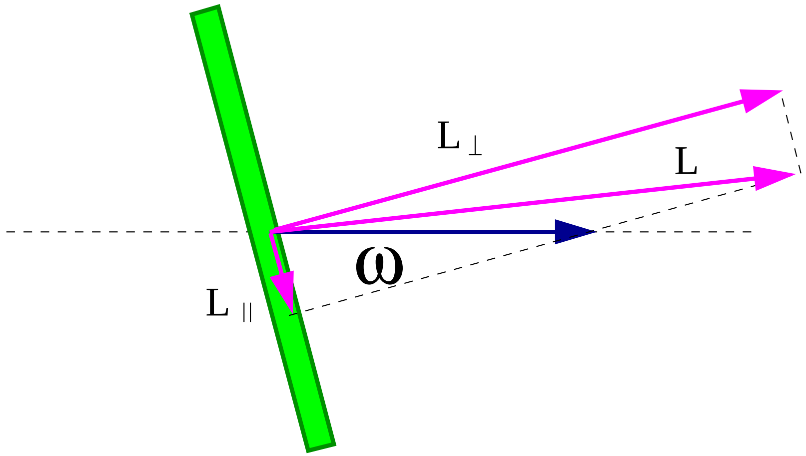
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel$$

Moment bezwładności dysku:

$$I_\perp = \frac{1}{2} m r^2 \qquad I_\parallel = \frac{1}{4} m r^2 = \frac{1}{2} I_\perp$$

Moment pędu dysku

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel \\ &= I_\perp \vec{\omega}_\perp + I_\parallel \vec{\omega}_\parallel \\ &= I_\perp \left(\vec{\omega}_\perp + \frac{1}{2} \vec{\omega}_\parallel \right) \end{aligned}$$



$$\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$$

Moment pędu

W ogólnym przypadku bryła sztywna może nie mieć żadnej osi symetrii.

Jak wtedy wyznaczyć moment pędu, znając prędkość kątową $\vec{\omega}$?

Z definicji momentu pędu:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Z definicji bryły sztywnej:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Otrzymujemy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \left[\vec{\omega}\, r_i^2 - \vec{r}_i\, (\vec{r}_i\, \vec{\omega})\right]$$

korzystamy z tożsamości wektorowej: $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$

Kierunek $\vec{L}$ zależy od kierunku $\vec{\omega}$ jak i położeń poszczególnych elementów bryły $\vec{r}_i$.

Moment pędu

Rozpisując na składowe:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \qquad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_i\,\vec{\omega} = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z$$

Otrzymujemy (na przykładzie L_x):

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[\omega_x\, r_i^2 - x_i\,(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\right] \\ &= \omega_x \cdot \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2) \;-\; \omega_y \cdot \sum_i m_i\, x_i y_i \;-\; \omega_z \cdot \sum_i m_i\, x_i z_i \end{aligned}$$

L_x zależy w ogólności od wszystkich skladowych prędkości kątowej !

Podobnie:

$$\begin{aligned} L_y &= -\,\omega_x \cdot \sum_i m_i\, x_i y_i \;+\; \omega_y \cdot \sum_i m_i(r_i^2 - y_i^2) \;-\; \omega_z \cdot \sum_i m_i\, y_i z_i \\ L_z &= -\,\omega_x \cdot \sum_i m_i\, x_i z_i \;-\; \omega_y \cdot \sum_i m_i\, y_i z_i \;+\; \omega_z \cdot \sum_i m_i(r_i^2 - z_i^2) \end{aligned}$$

Tensor momentu bezwładności

Wyrażenie na składowe $\vec{L}$ możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i(r_i^2 - x_i^2) & -\sum m_i\, x_i y_i & -\sum m_i\, x_i z_i \\ -\sum m_i\, x_i y_i & \sum m_i(r_i^2 - y_i^2) & -\sum m_i\, y_i z_i \\ -\sum m_i\, x_i z_i & -\sum m_i\, y_i z_i & \sum m_i(r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

tensor momentu bezwładności

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

ogólna postać $(u, v = x, y, z)$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{uv} = \sum m_i(\delta_{uv}\, r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

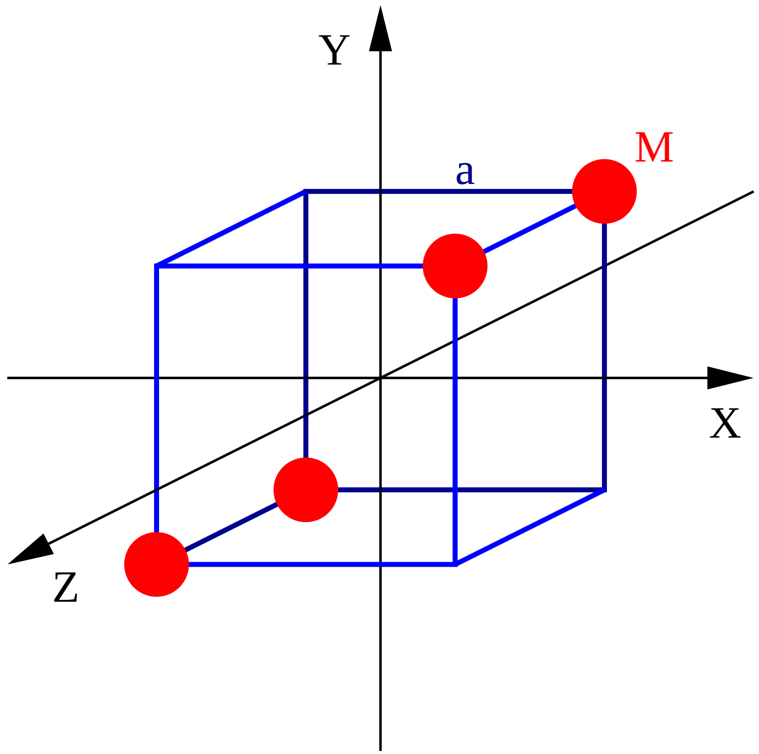
$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r})(\delta_{uv}\, r^2 - u\, v)$$

delta Kroneckera: $\delta_{uv} = 1$ dla $u = v$ i 0 dla $u \neq v$

Tensor momentu bezwładności

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M\, a^2$$

Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera (tensor symetryczny $\Rightarrow$ 6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak obrócić osie układu odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne znikały: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

$\Rightarrow$ pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (wartości własne)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) \;=\; (I_{xx}\,\omega_x,\; I_{yy}\,\omega_y,\; I_{zz}\,\omega_z)$$

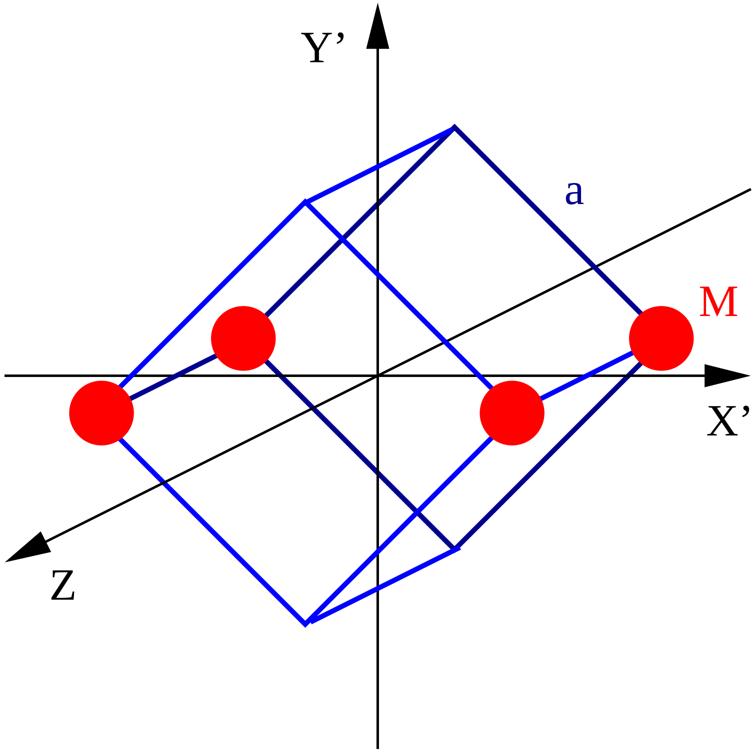
Dla obrotu wokół osi głównej $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

np. $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$

Osie główne

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

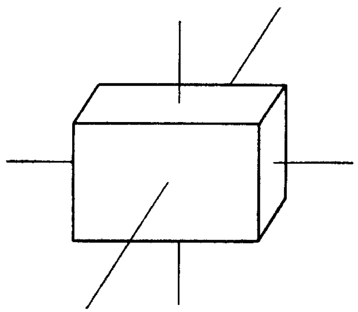
$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M\, a^2$$

Osie X', Y' i Z są osiami głównymi $\hat{I}$:

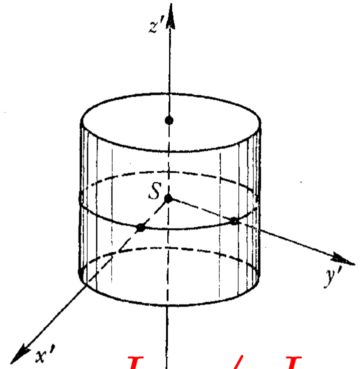
- oś X' - najmniejszy moment bezwładności
- oś Y' - największy moment bezwładności
- oś Z - pośredni moment bezwładności

Osie główne

Prostopadłościan

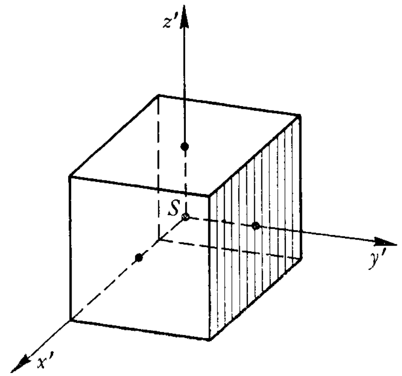


Walec



$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$$

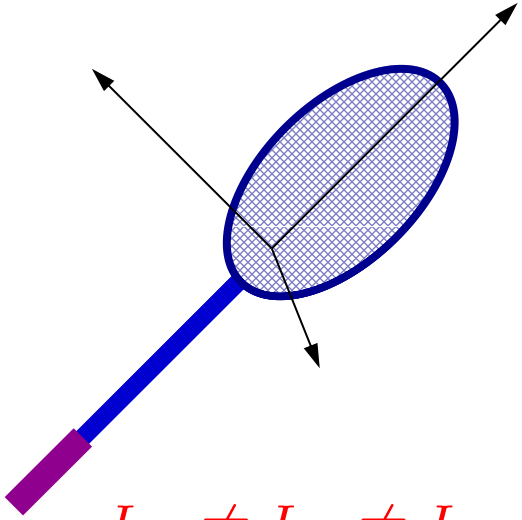
Sześcian



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

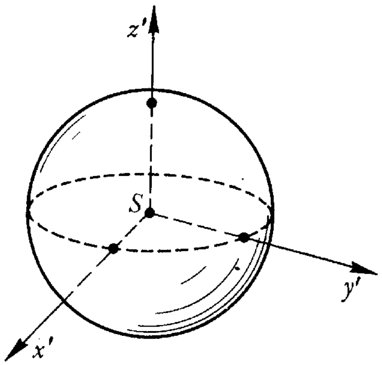
Tak jak dla kuli !

Rakieta tenisowa



$$I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz}$$

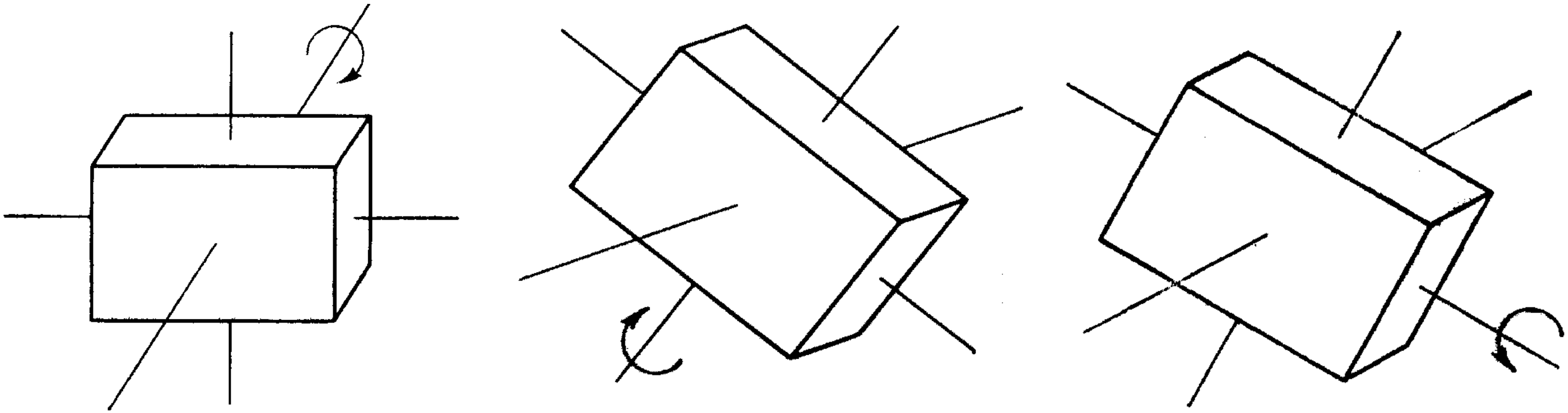
Kula



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Osie główne

W przypadku bryły wirującej swobodnie (stała wartość $\vec{L}$)
stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora $\vec{\omega}$) możliwy jest
tylko wokół osi głównych o największym i najmniejszym momencie bezwładności



Oś o największym I	Oś o pośrednim I	Oś o najmniejszym I
obrót stabilny	**obrót niestabilny**	obrót stabilny

Osie główne

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

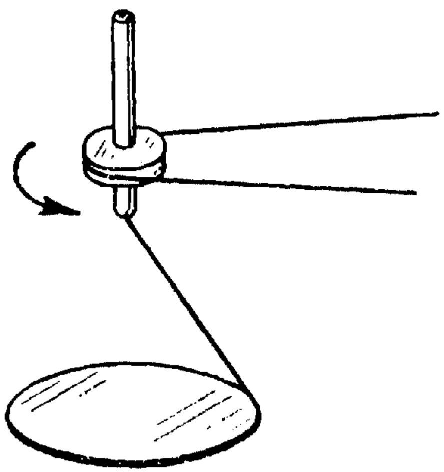
$$E_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\vec{L} = \frac{1}{2}(I_{xx}\,\omega_x^2 + I_{yy}\,\omega_y^2 + I_{zz}\,\omega_z^2)$$

Jeśli nałożymy więzy narzucające obrót ciała ze stała prędkością kątową $\vec{\omega}$ to przyjmie ono ułożenie odpowiadające maksymalnej energii kinetycznej

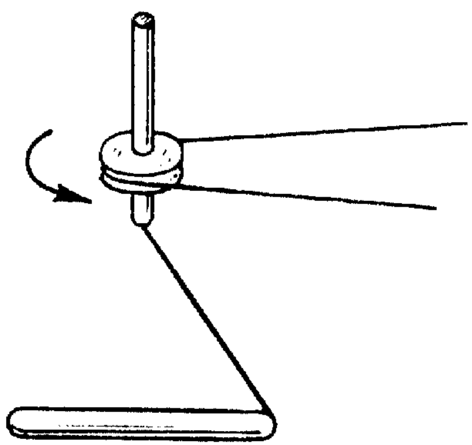
$\Rightarrow$ obrót wokół osi o największym momencie bezwładności

$\Rightarrow$ maksymalna wartość momentu pędu

Wirujący dysk

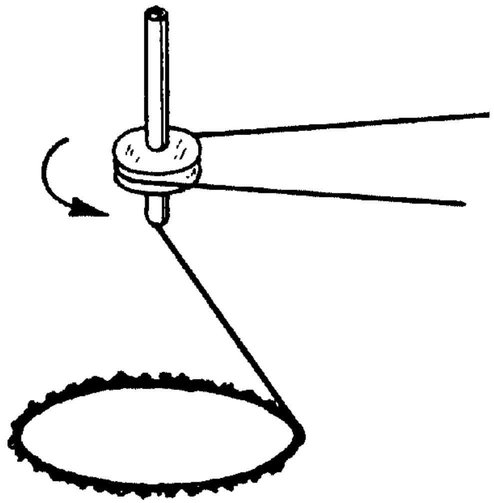


Wirujący pręt



Osie główne

Wirujący łańcuszek



Przybiera kształt obręczy
odpowiadający maksymalnemu momentowi bezwładności
$\Rightarrow$ maksymalnej wartości momentu pędu
$\Rightarrow$ maksymalnej energii kinetycznej

W układzie obracającym się

Siła odśrodkowa dąży do rozmieszczenia masy jak najdalej od osi obrotu.

Stabilny jest stan odpowiadający minimum energii potencjalnej (siły odśrodkowej)

$$\vec{F}_i = m_i\,\omega^2 \vec{r}_{i\perp} \quad \Rightarrow \quad E_{p,i} = -\frac{1}{2}\, m_i\, \omega^2\, r_\perp^2$$

$$E_p = \sum_i E_{p,i} = -\frac{1}{2}\,\omega^2 \sum_i m_i\, r_\perp^2 = -\frac{1}{2}\,\omega^2\, I = -E_k$$

Minimum energii potencjalnej odpowiada maksimum energii kinetycznej.

W układzie laboratoryjnym $\Rightarrow$ masa "oddala się" od osi zgodnie z zasadą bezwładności

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Ile stopni swobody ma kula tocząca się **bez poślizgu** po płaskiej powierzchni

   A 2 B 4 C 5 D 3

2. Przy nieznacznym wychyleniu z położenia równowagi chwiejnej energia potencjalna bryły sztywnej

   A maleje B nie można powiedzieć C nie zmienia się D wzrasta

3. Stosunek promieni dwóch kul stalowych $R_1/R_2 = 2$. Stosunek momentów bezwładności I_1/I_2 to

   A 16 B 4 C 32 D 8

4. Która z wymienionych brył najszybciej stoczy się (bez poślizgu) z równi pochyłej

   A obręcz B walec C kula D sfera

5. Energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły wokół ustalonej osi wyraża się wzorem

   A $\frac{1}{2}MI^2$ B $\frac{1}{2}Mv^2$ C $\frac{1}{2}I\omega^2$ D $\frac{1}{2}I^2\omega$

6. Swobodnie wirująca bryła sztywna ma stabilnych osi obrotu przynajmniej

   A dwie B sześć C trzy D jedną

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego