Podstawy fizyki kwantowej i budowy materii 2016/2017

Zadania na ćwiczenia V

Zadanie 1
Wyznacz długość fali de Broglie'a

a) piłki tenisowej serwowanej na korcie tenisowym ($m = 0,01$ kg, $v = 180$ km/h),

b) elektronu w lampie kineskopowej telewizora ($U = 10$ kV),

c) termicznego neutronu ($E_k = \frac{3}{2}k_BT$) dla $T = 300$ K
(stała Boltzmana $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K).

Zadanie 2
Wyznacz związek dyspersyjny (zależność $\omega(k)$) i prędkość grupową v_g fal, jeżli zależność prędkości fazowej v_f od długości λ fali ma postać:

a) $v_f = a$ (stała prędkość)

b) $v_f = a\sqrt{\lambda}$ (np. fale na powierzchni wody wywołane sią grawitacji),

c) $v_f = a/\lambda$ (np. fale poprzeczne w pręcie).

Zadanie 3
Rozważmy elektron, którego długość fali de Broglie'a jest równa jego comptonowskiej długości fali $\lambda = h/(m_ec)$. Wyznacz

a) prędkość elektronu,

b) jego prędkość fazową v_f i grupową v_g.

Przyjmij relatywistyczną relację między pędem, energia i masą elektronu.

Zadanie 4
Cząstka o masie m porusza się swobodnie w jednym wymiarze między dwiema doskonale odbijającymi ścianami odległymi o L. Wyznacz dopuszczalne wartości długości λ fali de Broglie'a oraz energii tej cząstki, jeśli w opisie kwantowym dozwolone są tylko takie jej ruchy, które prowadzą do pojawienia się fali stojącej między ścianami, a na ścianach są węzły fali. Przyjmij nierelatywistyczny związek między energią i pędem.

Zadanie 5
Przyjmij związek dyspersyjny w postaci $\omega(k) = vk$ i utwórz, superponując fale płaskie $e^{i(kx-\omega t)}$, paczkę falową

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

o profilu

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & k \leq k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k, \\ 0 & k \geq k_0 + \Delta k, \end{cases}$$

gdzie ψ_0 jest zadaną (być może zespoloną) stałą. Przedyskutuj ruch tej paczki.
Wskazówka
Zapisz związek dyspersyjny w formie

$$\omega(k) = vk = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} (k - k_0) = \omega_0 + v(k - k_0),$$

Zadanie 6
Dla nierelatywistycznej cząstki swobodnej związek dyspersyjny jest postaci $\omega(k) = \alpha\ k^2$, gdzie $\alpha > 0$ to zadana stała. Superponując fale płaskie $e^{i(kx-\omega t)}$ utwórz paczkę falową

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

o gausowskim profilu danym przez

$$\Phi(k) = \frac{\psi_0}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k}} \exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma_k^2}\right), \quad -\infty < k < \infty,$$

gdzie k_0 jest zadaną stałą rzeczywistą, zaś ψ_0 jest zadaną (być może zespoloną) liczbą.

a) Wyznacz postać paczki falowej dla $t = 0$.

b) Przedyskutuj ruch tej paczki i zmianę rozkładu przestrzennego w czasie.

Porównaj (posiłkując się wynikiem poprzedniego zadania) z przypadkiem, gdy związek dyspersyjny ma postać $\omega = v\ k$. Wyznacz iloczyn nieoznaczoności położenia i liczby falowej.
Wskazówka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ika-bk^2}\, dk = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{a^2}{4b}\right), \quad \text{jeśli} \quad \Re(b) > 0.$$

Przyjmij, że

$$\omega = \alpha k^2 \equiv \omega_0 + v(k-k_0) + \frac{\Omega}{4\sigma^2}(k-k_0)^2, \quad v = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} = 2\alpha k_0, \quad \frac{\Omega}{4\sigma^2} = \alpha.$$

Zadanie 7
Przyjmując, że nieoznaczoność położenia elektronu w atomie wodoru odpowiada promieniowi pierwszej orbity Bohra, $a_0 = 0.529$ Å, oszacuj w oparciu o zasadę nieoznaczoności energię tego elektronu.
Wskazówka: zastosuj nierelatywistyczny wzór na energię kinetyczną