

## Zadania na ćwiczenia VI

### Zadanie 1

Określ, które z następujących funkcji falowych są funkcjami własnymi składowej  $\hat{p}_x$  operatora pędu i znajdź ich wartości własne:

- a)  $A \sin kx$ ,
- b)  $A \cos kx$ ,
- c)  $A \cos kx + A \sin kx$ ,
- d)  $A \cos kx + iA \sin kx$ ,
- e)  $A \exp(ik(x - a))$ ,
- f)  $A \exp(ikx) + A \exp(-ikx)$ ,
- g)  $A \exp(ikx) + iA \exp(-ikx)$ ,

### Zadanie 2

Stan stacjonarny cząstki poddanej działaniu pewnego pola sił opisany jest unormowaną funkcją falową

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} \sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2} + ikx\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0, \quad k > 0,$$

przy czym wartości parametrów  $\sigma$  oraz  $k$  są znane. Wyznacz wartości oczekiwane operatora pędu oraz energii kinetycznej w tym stanie. Podaj interpretację parametru  $k$ .

**Wskazówka**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2.$$

### Zadanie 3

Funkcja falowa cząstki o masie  $m$  poruszającej się w pewnym jednowymiarowym polu siły ma postać

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax \exp(-\alpha x + i\beta t), & x \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \frac{\hbar \alpha^2}{2m}, \quad \alpha > 0,$$

gdzie  $A$  jest stałą, niezależną od argumentu  $x$ , zaś  $\alpha$  to pewna zadana rzeczywista stała.

- a) Jaki jest wymiar funkcji falowej?
- b) Wyznacz wartość stałej  $A$ .
- c) Naskicuj kształt gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie  $x$ .
- d) Jakie wartości energii cząstki można otrzymać w wyniku pomiaru?

- e) Wyznacz postać energii potencjalnej pola sił.
- f) Czy cząstka ta jest związana czy też niezwiązana? Odpowiedź uzasadnij.
- g) Ile wynosi prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze niedostępnym na gruncie fizyki klasycznej?

**Wskazówka**

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-\gamma x) dx = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}, \quad \int_0^{\infty} x \exp(-(ik + \gamma)x) dx = \frac{1}{(\gamma + ik)^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int x^2 e^{-\gamma x} dx = -\frac{1}{\gamma^3}(\gamma^2 x^2 + 2\gamma x + 2) \exp(-\gamma x).$$