

Zadania na ćwiczenia VII

Zadanie 1

Cząstka o masie m uwięziona jest w polu sił o energii potencjalnej postaci

$$V(x) = \begin{cases} U & \text{dla } x < -L/2, \\ 0 & -L/2 \leq x \leq L/2, \\ U & x > L/2. \end{cases}$$

Wyznacz funkcje falowe stanów stacjonarnych cząstki w tej studni. Jaki warunek musi być spełniony, żeby istniał więcej niż jeden stan związany.

Wskazówka: Przyjmij, że ogólna postać funkcji falowej w obszarze studni ($-L/2 \leq x \leq L/2$) dana jest przez

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Jaki warunek musi być spełniony, żeby rozkład gęstości prawdopodobieństwa był symetryczny (jak oczekujemy)?

Zadanie 2

Cząstka o energii $E > 0$ poruszająca się swobodnie od $x = -\infty$ natrafia na “dziurę” (studnię) potencjału o głębokości $\Delta E < 0$ i szerokości L :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \Delta E & 0 \leq x \leq L, \\ 0 & x > L. \end{cases}$$

Zapisz ogólną postać rozwiązania i warunki zszycia w $x = 0$ i $x = L$. Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia cząstki przez studnię. Jaki warunek musi być spełniony, żeby nie zachodziło dobiecie cząstki od studni?

Zadanie 3

Przedyskutuj rozwiązanie zadania 2 w przypadku cząstki trafiającej na schodek potencjału $0 < \Delta E < E$.

Zadanie 4

Cząstka o energii $E > 0$ poruszająca się swobodnie od $x = -\infty$ natrafia na barierę potencjału o wysokości $\Delta E > E$ i szerokości L :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \Delta E & 0 \leq x \leq L, \\ 0 & x > L. \end{cases}$$

Zapisz ogólną postać rozwiązania i warunki zszycia w $x = 0$ i $x = L$. Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia cząstki przez barierę. Przedyskutuj wynik.

Zadanie 5

Cząstka o masie m znajduje się w jednowymiarowym potencjale oscylatora harmonicznego o częstości ω określonym wzorem:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Pokaż, że funkcja falowa stanu podstawowego tego oscylatora:

$$\psi(x) = A \exp(-\alpha^2x^2), \quad \alpha > 0,$$

gdzie A oraz α to stałe niezależne od od zmiennej x , jest rozwiązaniem niezależnego od czasu równania Schrödingera. Wyraź parametr α przez masę i częstość oraz wyznacz energię E oscylatora w tym stanie.