

Zadania na ćwiczenia VIII

Zadanie 1

Korzystając z wyrażenia na energię elektronu w modelu Bohra

$$E_n = -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

wyznacz długości fali pierwszych czterech linii widmowych atomu wodoru w seriach Lymana, Balmera i Paschena. Wskazówka: $hc = 1.240 \mu\text{m} \cdot \text{eV} = 1240 \text{ nm} \cdot \text{eV}$

Zadanie 2

Pokaż, korzystając z postaci operatora momentu pędu we współrzędnych kartezjańskich, że spełniona jest relacja komutacyjna:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$$

Zadanie 3

Funkcja falowa stanu podstawowego atomu wodoru ma postać:

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

gdzie parametr a_0 jest promieniem Bohra:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m e^2} = 0.529 \text{ \AA}$$

Wyznacz dla tego stanu:

- najbardziej prawdopodobną odległość r od jądra
- wartość oczekiwaną (średnią) r
- oczekiwaną wartość energii potencjalnej elektronu
- oczekiwaną wartość energii kinetycznej elektronu

Wskazówka:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\gamma x} dx = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}$$

Postać operatora energii kinetycznej we współrzędnych sferycznych:

$$\hat{E}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2m r^2} \psi(\vec{r})$$

Zadanie 4

Jeden ze stanów wzbudzonych atomu wodoru opisany jest funkcja falowa

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A r \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \cos \theta, \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

Wyznacz wartości liczb kwantowych n , l oraz m tego stanu.

Wskazówka: operator orbitalnego momentu pędu

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Równanie Schrödingera dla części radialnej $R(r)$ funkcji falowej

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) + V(r) R(r) = E R(r)$$

Energię stanu można wyrazić jako

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \frac{1}{n^2}$$

Zadanie 5

Atom wodoru znajduje się w stanie opisanym liczbami kwantowymi $n = 2$, $l = 1$ i $m = 0$. Jaka jest oczekiwana wartość orbitalnego momentu pędu i rzutu momentu pędu elektronu na oś Z? Jakie są w tym stanie możliwe wartości rzutu momentu pędu na oś X?

Wskazówka: zapisz rozkład kątowy funkcji falowej we współrzędnych kartezjańskich, a następnie dokonaj odpowiedniej zamiany zmiennych.

Rozkłady kątowe funkcji falowej ψ_{nlm} w stanach $n = 2$, $l = 1$ są postaci:

$$\begin{aligned} \psi_{210}(r, \theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \cdot R_{21}(r) \\ \psi_{21-1}(r, \theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{+i\phi} \cdot R_{21}(r) \\ \psi_{21+1}(r, \theta, \phi) &= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \cdot R_{21}(r) \end{aligned}$$

Zadanie 6

Pozytronium, to analog atomu wodoru, w którym związana jest para elektron-pozytron. Wyznacz promień takiego układu i jego energię wiązania. Wyznacz też promień i energię wiązania układu proton-mion, jeżeli $m_\mu = 0,113m_p$.

Wskazówka: wykorzystaj pojęcie masy zredukowanej układu.