

# Podstawy fizyki kwantowej i budowy materii

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki

Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych  
Instytut Fizyki Doświadczalnej



Wykład 6  
14 listopada 2016

- 1 Ewolucja paczki falowej
- 2 Interpretacja probabilistyczna
- 3 Zasada nieoznaczoności
- 4 Stany stacjonarne
- 5 Twierdzenie Noether

- 1 Ewolucja paczki falowej
- 2 Interpretacja probabilistyczna
- 3 Zasada nieoznaczoności
- 4 Stany stacjonarne
- 5 Twierdzenie Noether

## Paczka falowa

Funkcje falową cząstki swobodnej możemy zawsze przedstawić jako superpozycję stanów o ciągłym rozkładzie wektora falowego ( $k = \frac{p}{\hbar}$ ):

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

## Paczka falowa

Funkcje falową cząstki swobodnej możemy zawsze przedstawić jako superpozycję stanów o ciągłym rozkładzie wektora falowego ( $k = \frac{p}{\hbar}$ ):

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Rozkład w “przestrzeni pędów” (wektora falowego)  $\varphi(k)$  jest związany z rozkładem przestrzennym  $\psi(x, t)$  poprzez transformatę Fouriera:

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t=0) e^{-ikx} dx$$

## Prędkość fazowa

Opisuje rozchodzenia się harmonicznycy oscylacji fazy funkcji falowej, ale **nie można jej utożsamiać z prędkością cząstki !!!**

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

w szczególności prędkość fazowa może być większa od  $c$

## Prędkość fazowa

Opisuje rozchodzenia się harmonicznycy oscylacji fazy funkcji falowej, ale **nie można jej utożsamiać z prędkością cząstki !!!**

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

w szczególności prędkość fazowa może być większa od  $c$

## Prędkość grupowa

opisuje prędkość cząstki (propagacji jej paczki falowej)

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

Dla fal de Broigla prędkość grupowa jest różna od prędkości fazowej. Oznacza to, że profil paczki falowej zmienia się w czasie!

⇒ Ewolucja paczki falowej!

## Widmo prostokątne

Rozważmy superpozycję fal płaskich z ustalonego przedziału pędów:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$



# Ewolucja paczki falowej

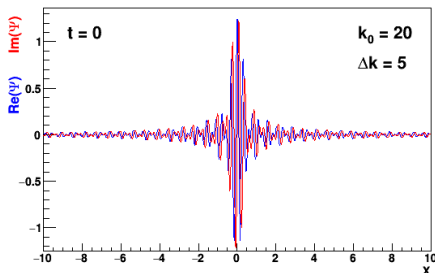
## Widmo prostokątne

Rozważmy superpozycję fal płaskich z ustalonego przedziału pędów:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Uzyskujemy przestrzenną funkcję falową

dla przykładowego doboru parametrów,  $\hbar = c = 1$



# Ewolucja paczki falowej

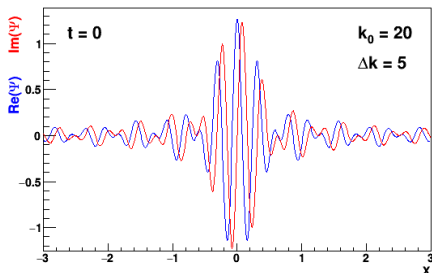
## Widmo prostokątne

Rozważmy superpozycję fal płaskich z ustalonego przedziału pędów:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Uzyskujemy przestrzenną funkcję falową

dla przykładowego doboru parametrów,  $h = c = 1$ , zbliżenie

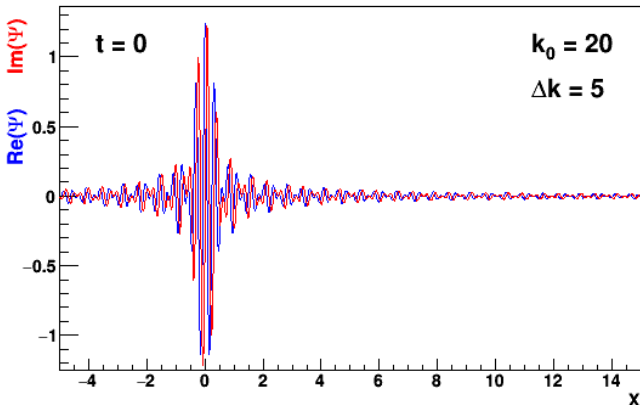


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

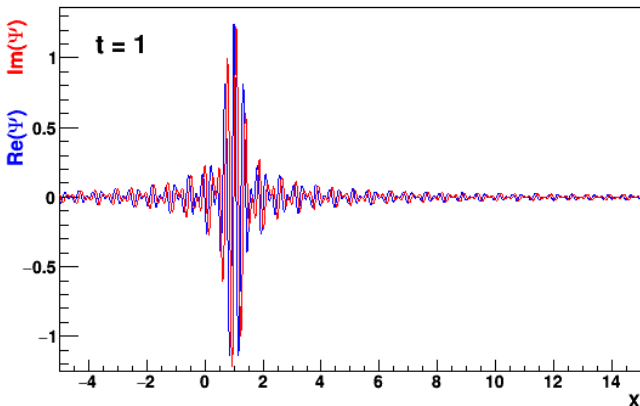


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

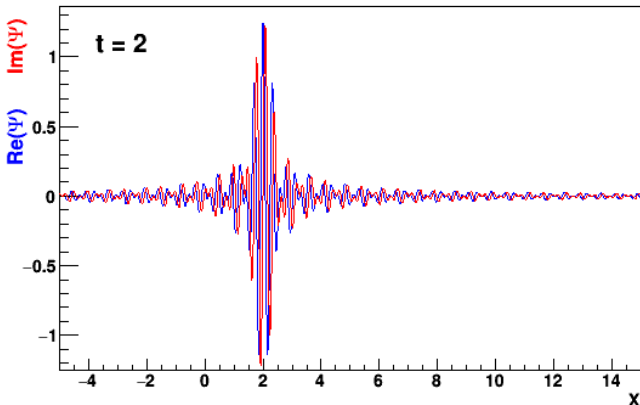
$$\omega = c \cdot k$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

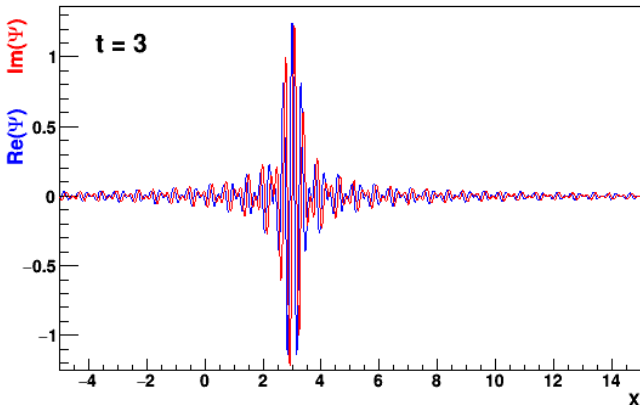


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

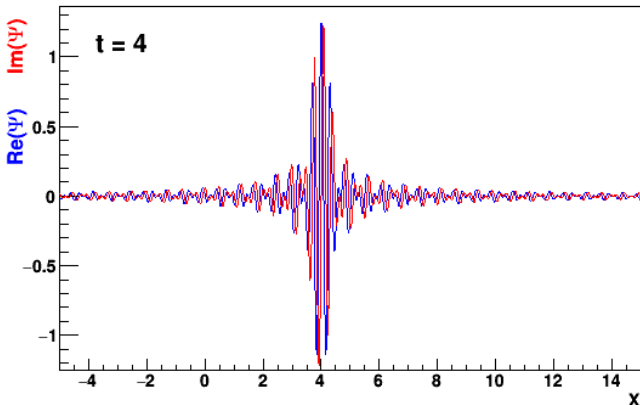
$$\omega = c \cdot k$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

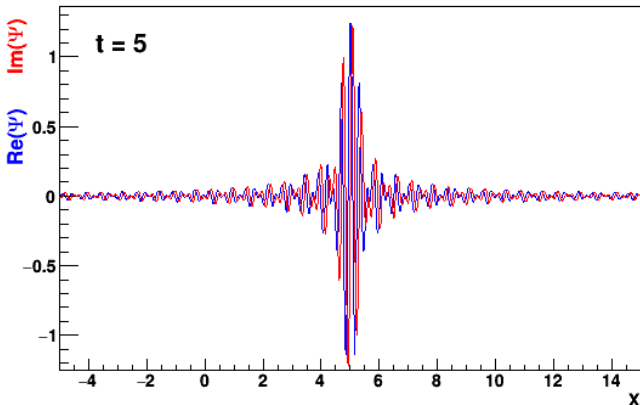
$$\omega = c \cdot k$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$



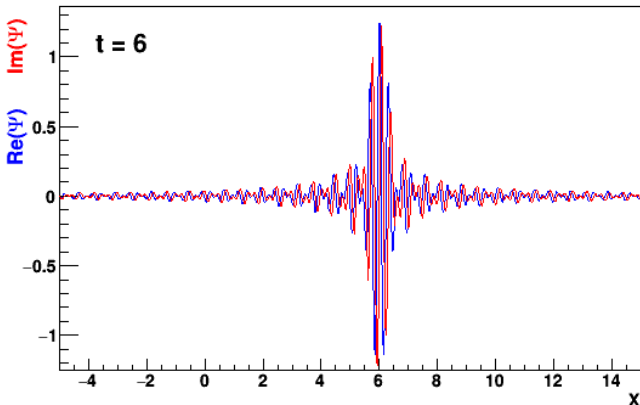


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

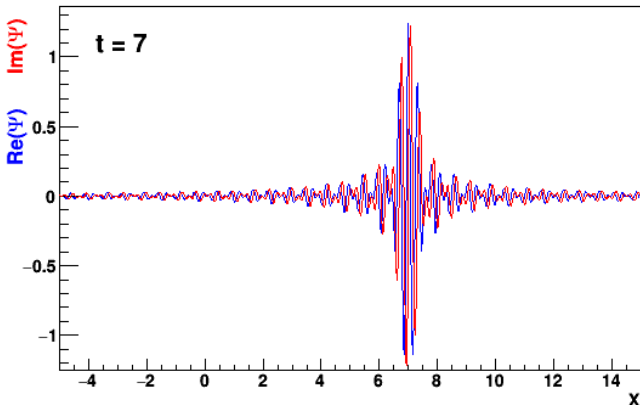


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

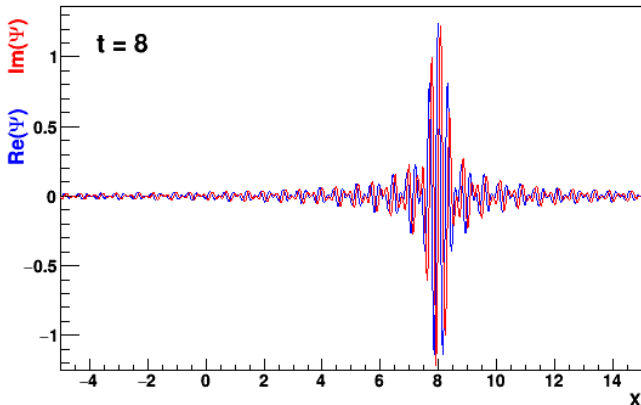
$$\omega = c \cdot k$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

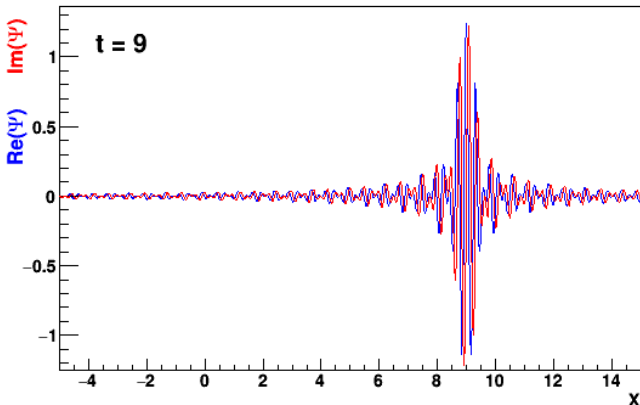


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

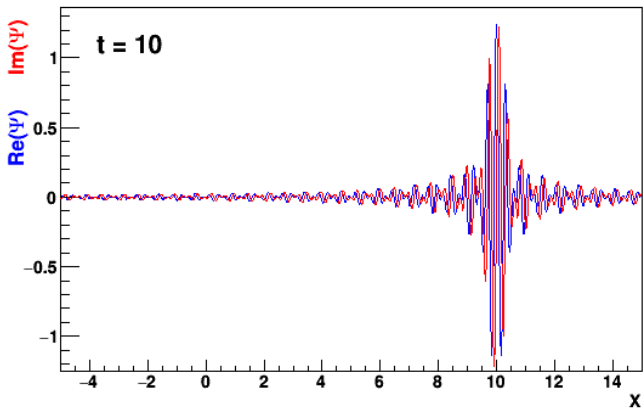


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

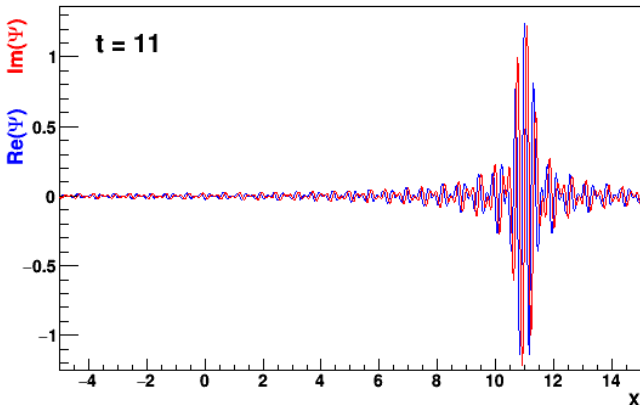
$$\omega = c \cdot k$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

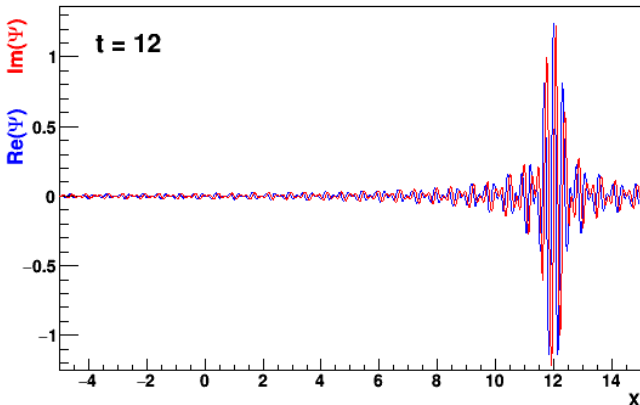


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

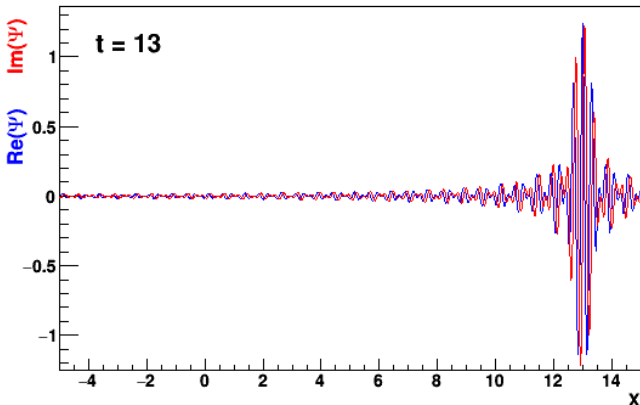


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

$$\omega = c \cdot k$$

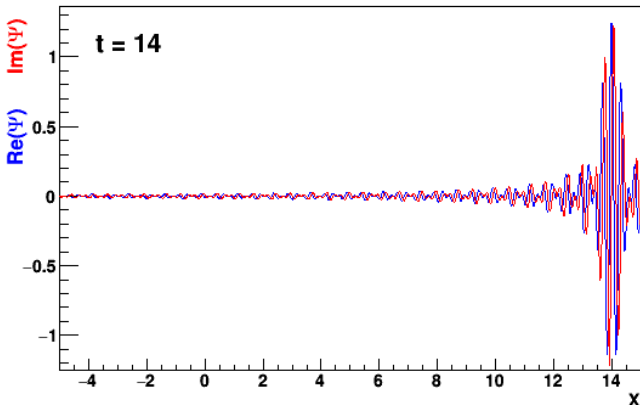




## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku liniowego związku dyspersyjnego

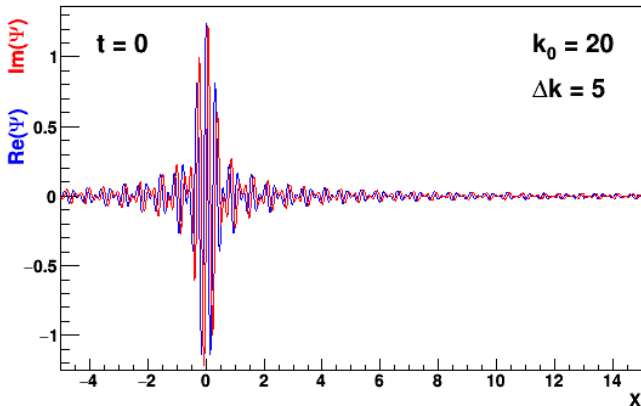
$$\omega = c \cdot k$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$

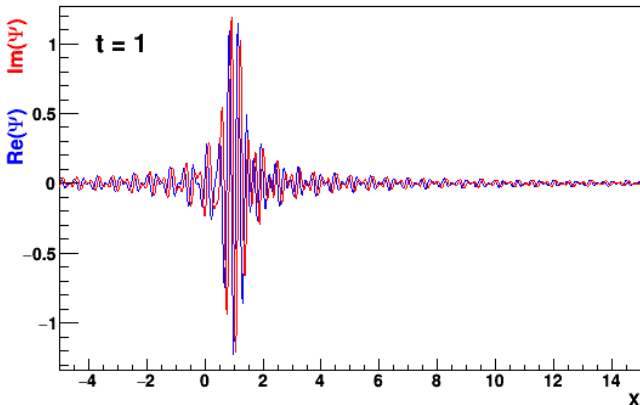


niezmieniony kształt dla  $t = 0$

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

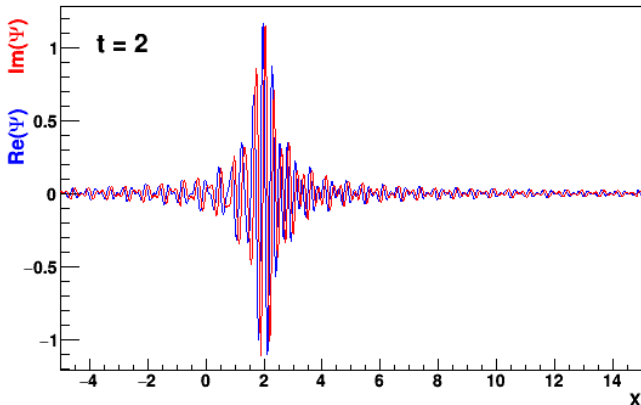
$$\omega = a \cdot k^2$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

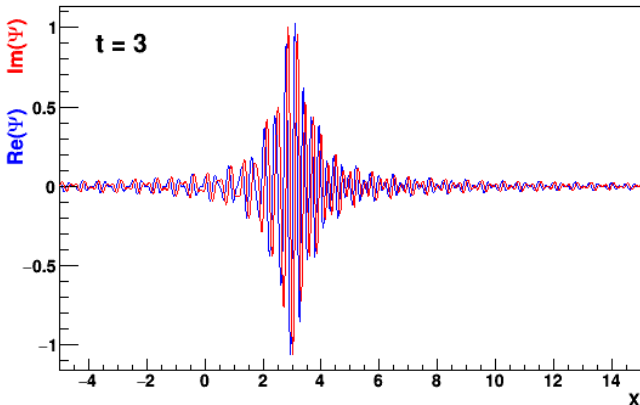
$$\omega = a \cdot k^2$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

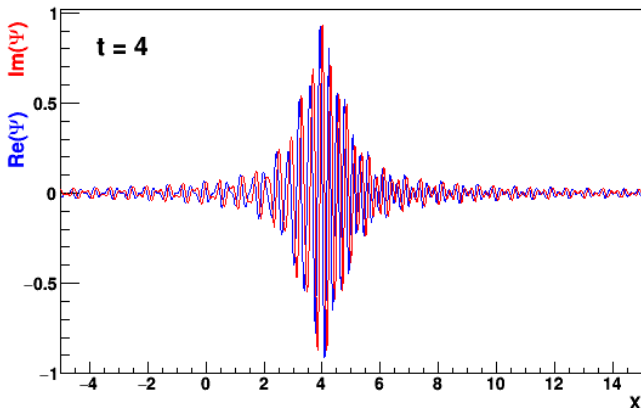
$$\omega = a \cdot k^2$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

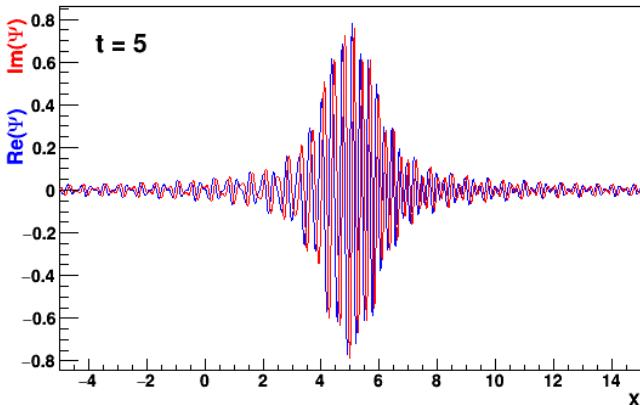
$$\omega = a \cdot k^2$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

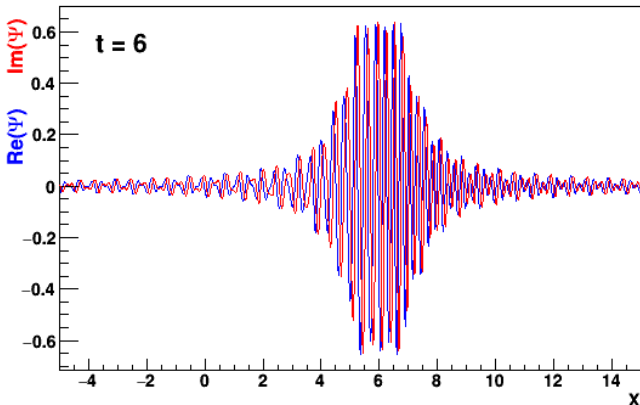
$$\omega = a \cdot k^2$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$

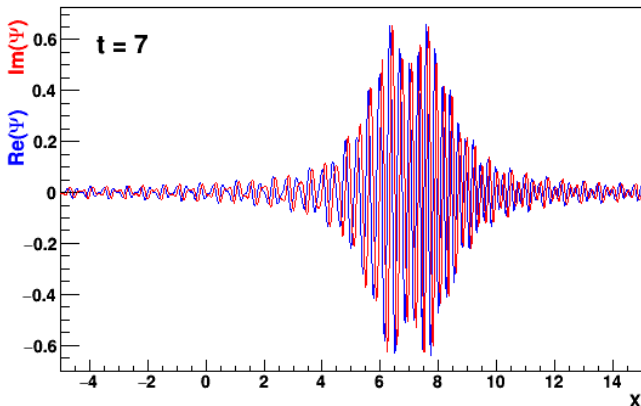




## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

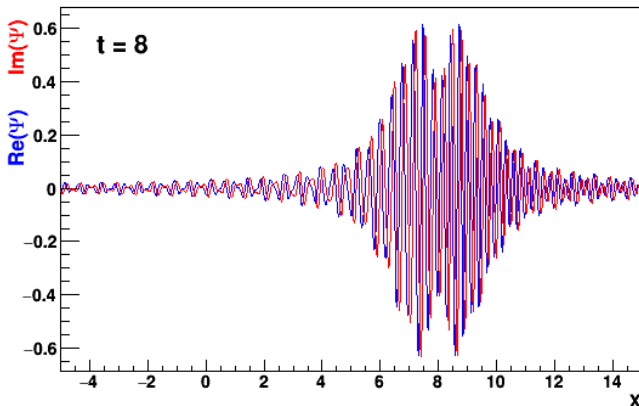
$$\omega = a \cdot k^2$$



## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$

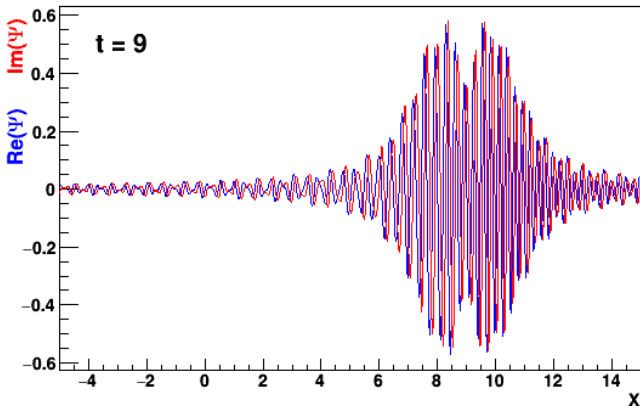


# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$



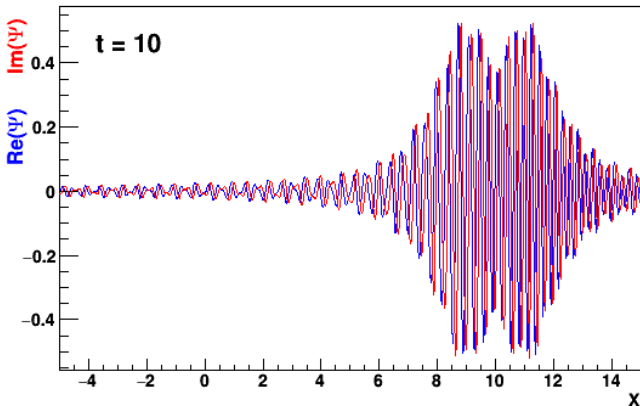
rozmycie przestrzenne rośnie z czasem  $t$

# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$



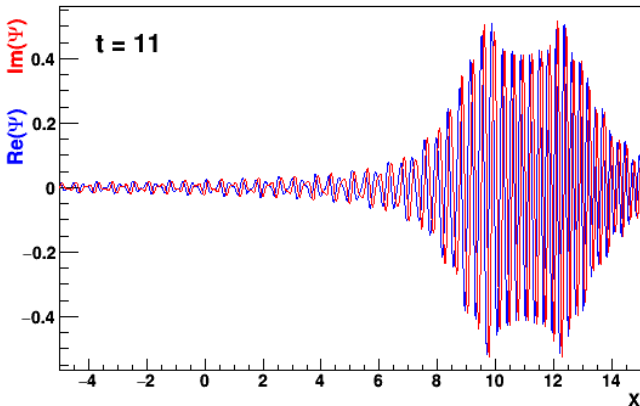
rozmycie przestrzenne rośnie z czasem  $t$

# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$



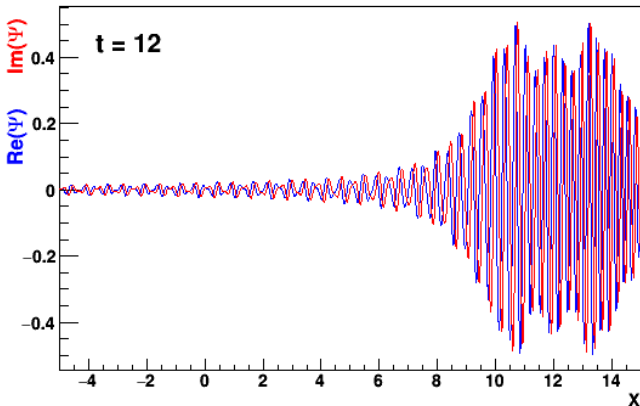
rozmycie przestrzenne rośnie z czasem  $t$

# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$



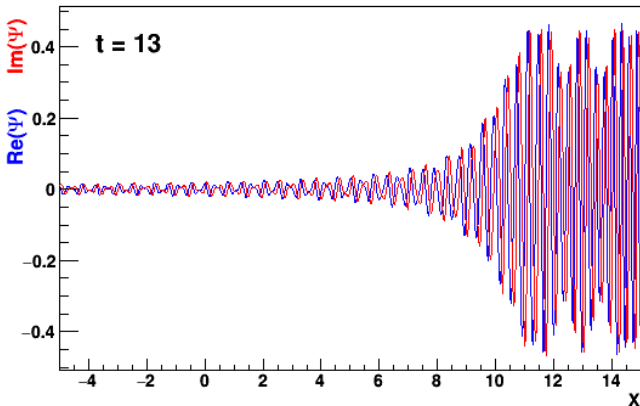
rozmycie przestrzenne rośnie z czasem  $t$

# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$



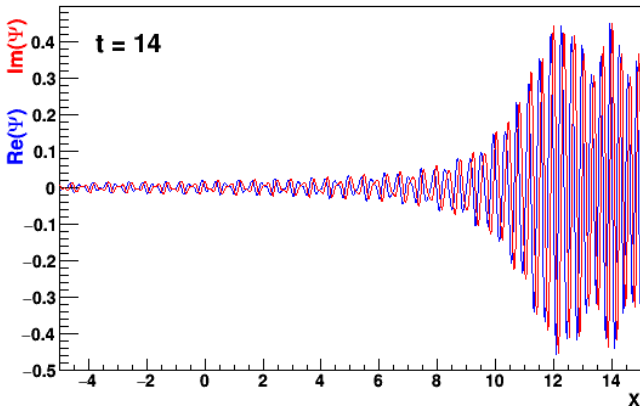
rozmycie przestrzenne rośnie z czasem  $t$

# Ewolucja paczki falowej

## Widmo prostokątne

Rozchodzenie się paczki w przypadku **nierelatywistycznych** fal de Broigle'a

$$\omega = a \cdot k^2$$



rozmycie przestrzenne rośnie z czasem  $t$



- 1 Ewolucja paczki falowej
- 2 Interpretacja probabilistyczna**
- 3 Zasada nieoznaczoności
- 4 Stany stacjonarne
- 5 Twierdzenie Noether

## Fotony

Prawdopodobieństwo detekcji fotonu (obserwowane natężenie światła) jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali elektromagnetycznej w danym miejscu i chwili czasu

$$p(\vec{r}, t) \sim I(\vec{r}, t) \sim E^2(\vec{r}, t)$$

Tylko takie założenie daje zgodność z wynikami klasycznymi!

Fazy fali elektromagnetycznej nie jesteśmy w stanie na ogół rejestrować

## Fotony

Prawdopodobieństwo detekcji fotonu (obserwowane natężenie światła) jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali elektromagnetycznej w danym miejscu i chwili czasu

$$p(\vec{r}, t) \sim I(\vec{r}, t) \sim E^2(\vec{r}, t)$$

Tylko takie założenie daje zgodność z wynikami klasycznymi!

Fazy fali elektromagnetycznej nie jesteśmy w stanie na ogół rejestrować

## Cząstki materii fale de Broigle'a

Doświadczenie pokazuje, że fale materii dają takie same obrazy dyfrakcyjne jak fale elektromagnetyczne (np. promienie Rentgena)

⇒ aby opisać te wyniki musimy przyjąć, że prawdopodobieństwo detekcji cząstki (zmierzenia jej w danym punkcie i chwili czasu)

$$p \sim |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

## Normalizacja

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu (i w danej chwili czasu) dana jest przez **kwadrat amplitudy** funkcji falowej:

$$p(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$$

## Normalizacja

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu (i w danej chwili czasu) dana jest przez **kwadrat amplitudy** funkcji falowej:

$$p(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$$

Taka definicja jest równoważna z narzuceniem warunku normalizacji:

całka po całej przestrzeni

$$\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\Psi(x, y, z, t)|^2 = 1$$

## Normalizacja

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu (i w danej chwili czasu) dana jest przez **kwadrat amplitudy** funkcji falowej:

$$p(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$$

Taka definicja jest równoważna z narzuceniem warunku normalizacji:

całka po całej przestrzeni

$$\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\Psi(x, y, z, t)|^2 = 1$$

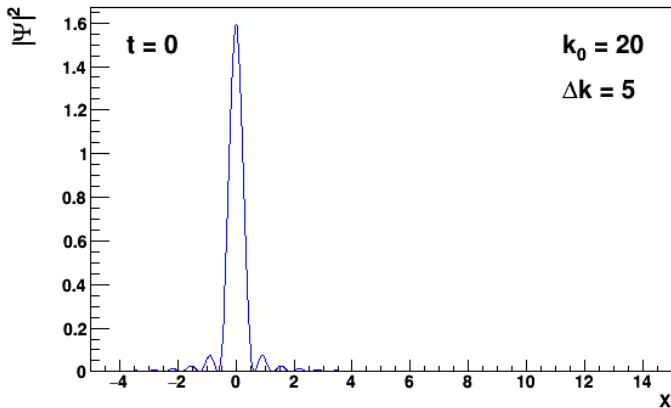
Dla jednowymiarowej funkcji falowej:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa

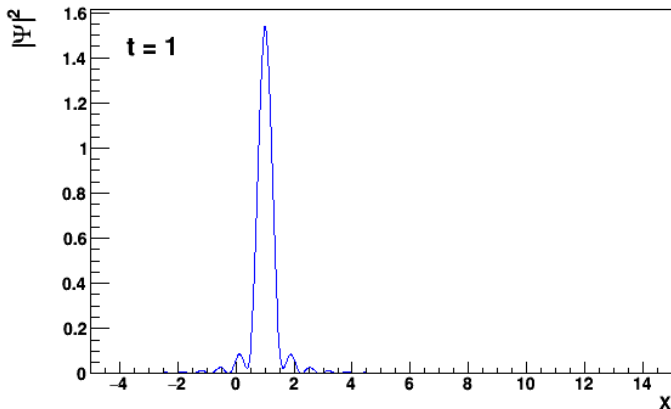


W chwili  $t=0$  cząstka znajduje się “w okolicy”  $x=0$

## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa

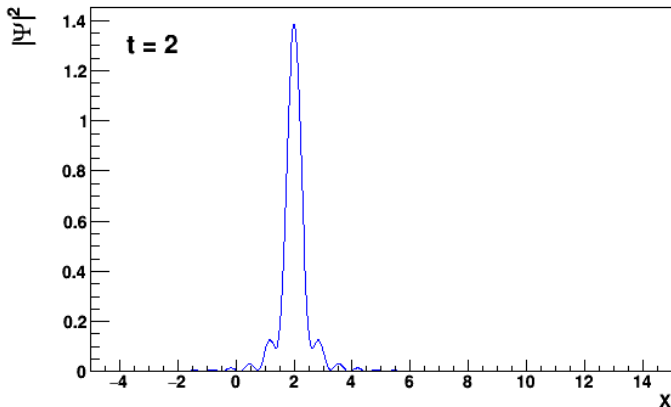




## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

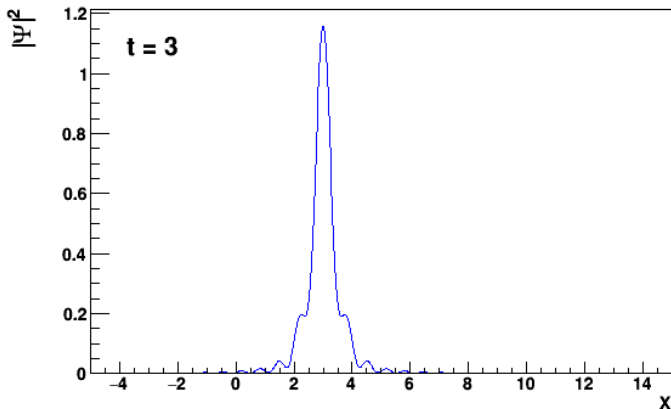
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

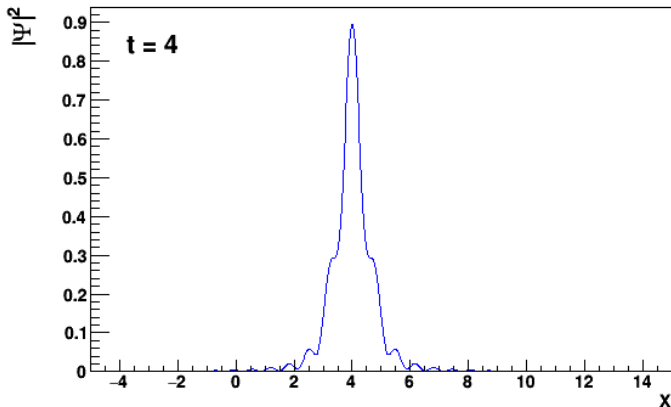
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

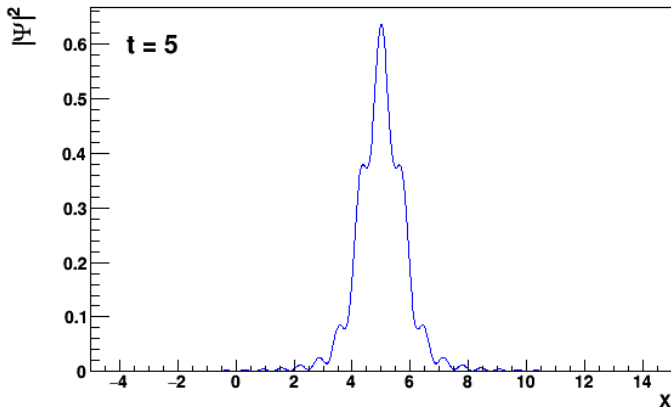
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

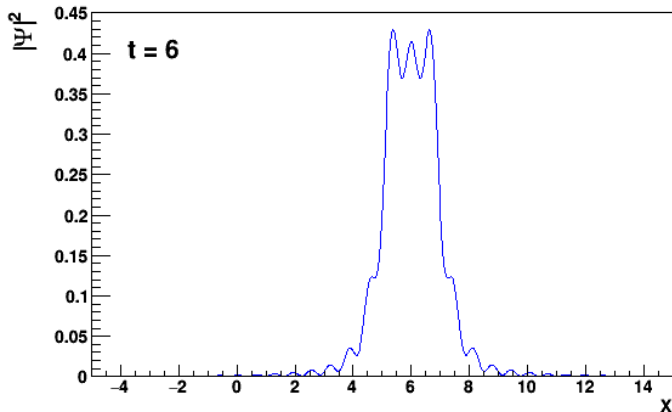
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

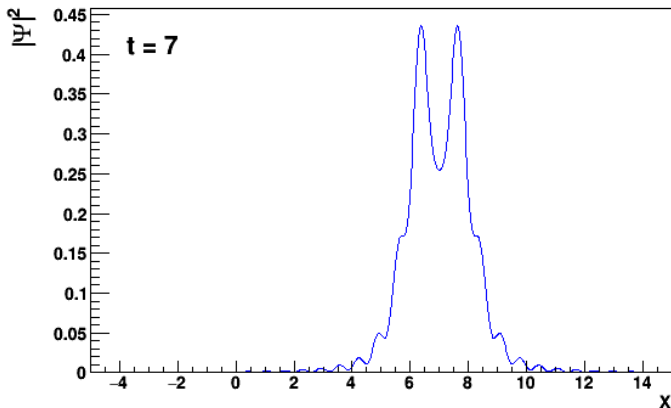
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

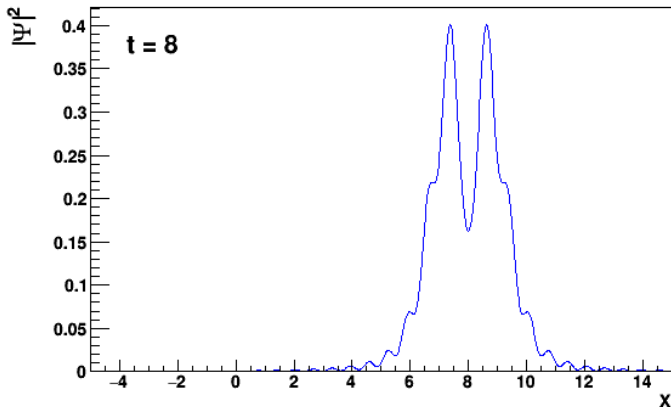
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

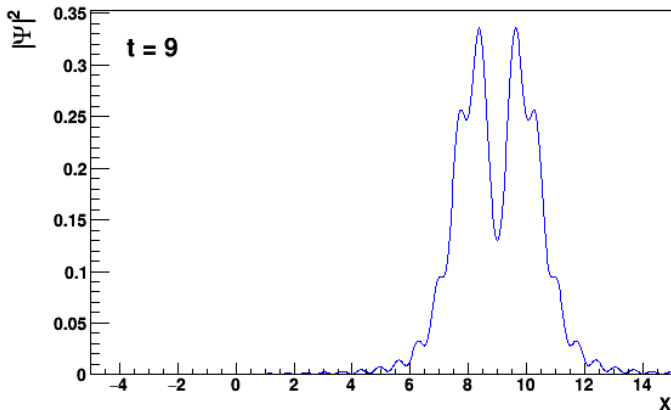
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa

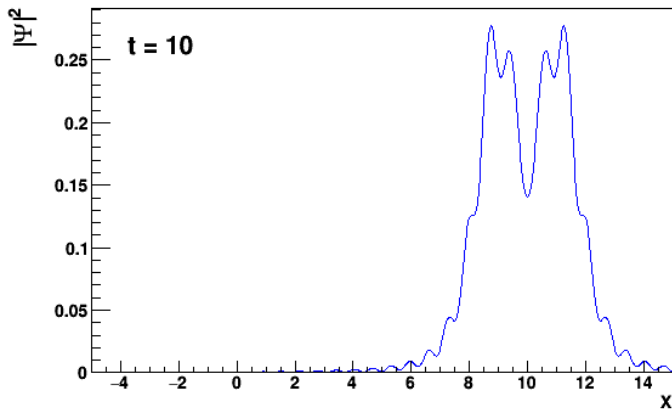




## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa

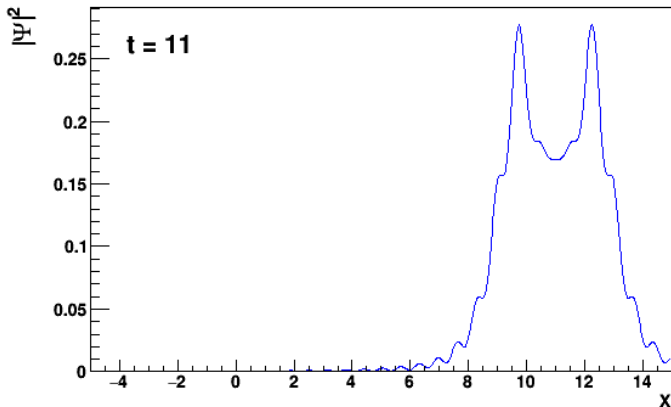


W chwili  $t=10$  cząstka znajduje się "w okolicy"  $x=10$

## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

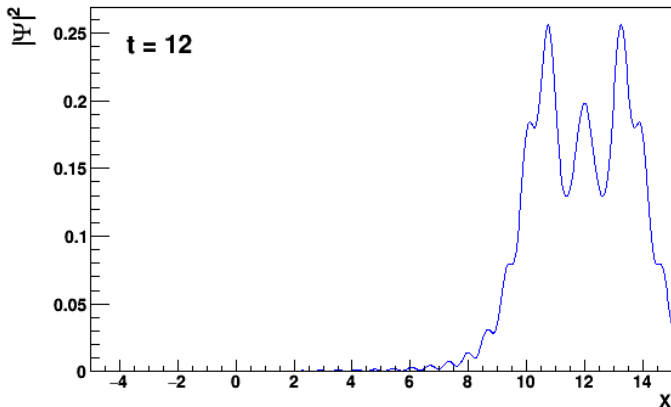
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

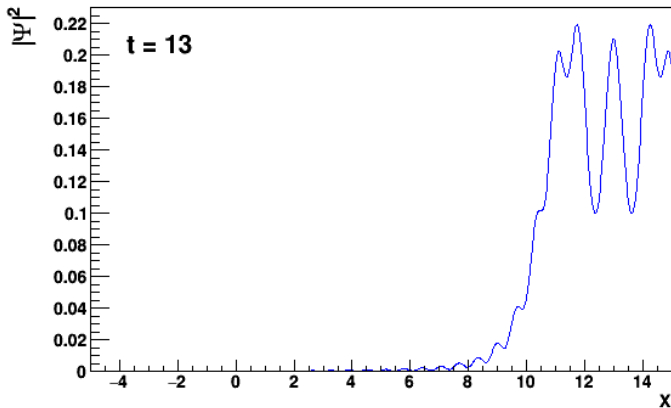
Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa

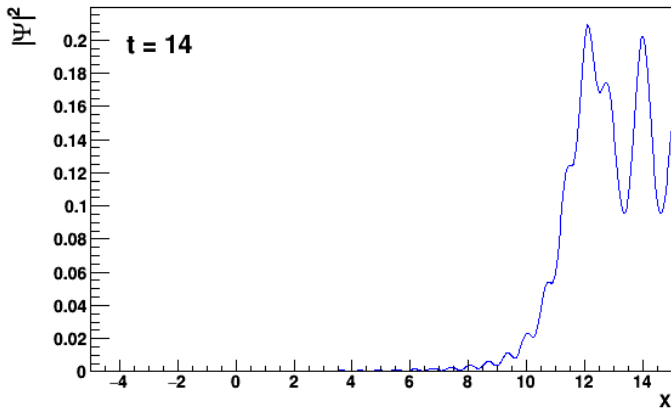


Faza funkcji falowej nie jest mierzalna !

## Ewolucja paczki falowej

Rozchodzenie się paczki w przypadku nierelatywistycznych fal de Broigle'a

Sens fizyczny ma wyłącznie kwadrat amplitudy fali prawdopodobieństwa



Faza funkcji falowej nie jest mierzalna !

# Interpretacja probabilistyczna

## Normalizacja

Rozkład wektora falowego  $\varphi(k)$ :

(przykładowo w jednym wymiarze)

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t=0) e^{-ikx} dx$$

Też jest znormalizowany:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(k)|^2 dk = 1$$

## Normalizacja

Rozkład wektora falowego  $\varphi(k)$ :

(przykładowo w jednym wymiarze)

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t=0) e^{-ikx} dx$$

Też jest znormalizowany:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(k)|^2 dk = 1$$

Kwadrat rozkładu ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w stanie o określonym  $k$  (pędzie  $p = \hbar k$ ):

$$p(k) = |\varphi(k)|^2$$

## Normalizacja

Rozkład wektora falowego  $\varphi(k)$ : (przykładowo w jednym wymiarze)

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t=0) e^{-ikx} dx$$

Też jest znormalizowany:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(k)|^2 dk = 1$$

Kwadrat rozkładu ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w stanie o określonym  $k$  (pędzie  $p = \hbar k$ ):

$$p(k) = |\varphi(k)|^2$$

Dla cząstki swobodnej  $|\varphi(k)|^2$  nie zależy od czasu, choć faza może (!)...



## Wymiar

Warunek normalizacji określa także wymiar (jednostki) funkcji falowej.  
W jednym wymiarze:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

⇒ iloczyn  $|\Psi(x, t)|^2 dx$  musi być **bezwymiarowy**

⇒  $|\Psi(x, t)|^2$  musi mieć wymiar odwrotności długości

$$\Rightarrow [\Psi(x, t)] = \frac{1}{\sqrt{m}} = m^{-\frac{1}{2}}$$

## Wymiar

Warunek normalizacji określa także wymiar (jednostki) funkcji falowej.  
W jednym wymiarze:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

⇒ iloczyn  $|\Psi(x, t)|^2 dx$  musi być **bezwymiarowy**

⇒  $|\Psi(x, t)|^2$  musi mieć wymiar odwrotności długości

$$\Rightarrow [\Psi(x, t)] = \frac{1}{\sqrt{m}} = m^{-\frac{1}{2}}$$

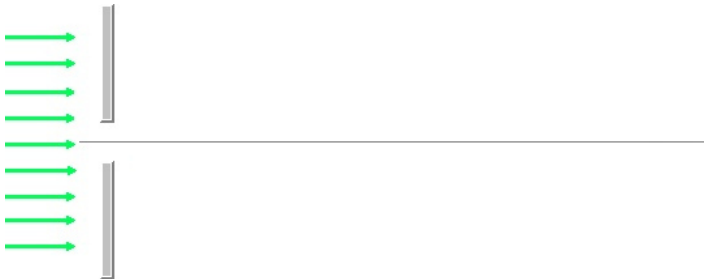
Podobnie w trzech wymiarach:

$$[\Psi(\vec{r}, t)] = \frac{1}{\sqrt{m^3}} = m^{-\frac{3}{2}}$$

- 1 Ewolucja paczki falowej
- 2 Interpretacja probabilistyczna
- 3 Zasada nieoznaczoności**
- 4 Stany stacjonarne
- 5 Twierdzenie Noether

## Dyfrakcja na szczelinie

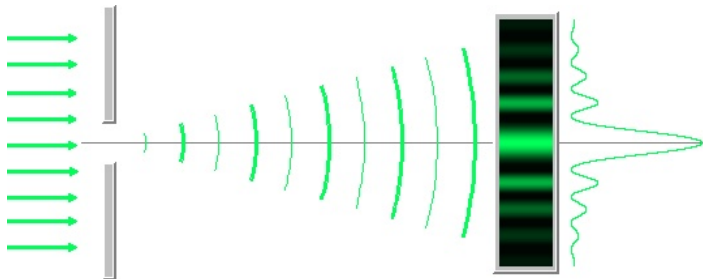
Fala płaska docierająca do płaszczyzny szczeliny ma dokładnie znany wektor falowy (pęd), ale nie jest zlokalizowana przestrzennie.



## Dyfrakcja na szczelinie

Fala płaska docierająca do płaszczyzny szczeliny ma dokładnie znany wektor falowy (pęd), ale nie jest zlokalizowana przestrzennie.

Foton przechodzący przez szczelinę jest dobrze zlokalizowany przestrzennie, ale jego pęd poprzeczny ulega rozmyciu:

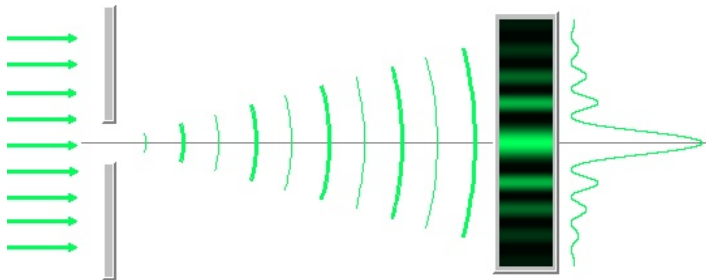


# Zasada nieoznaczoności

## Dyfrakcja na szczelinie

Fala płaska docierająca do płaszczyzny szczeliny ma dokładnie znany wektor falowy (pęd), ale nie jest zlokalizowana przestrzennie.

Foton przechodzący przez szczelinę jest dobrze zlokalizowany przestrzennie, ale jego pęd poprzeczny ulega rozmyciu:



Rozmycie pędu poprzecznego wynika z szerokości  $d = \Delta y$  szczeliny:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \sim h$$

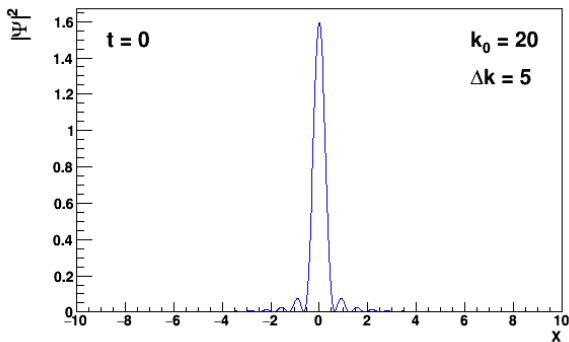
patrz ćwiczenia

## Paczka falowa

Prostokątne widmo wektora falowego:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Rozmywanie rozkładu przestrzennego przy zmniejszaniu rozmycia pędowego

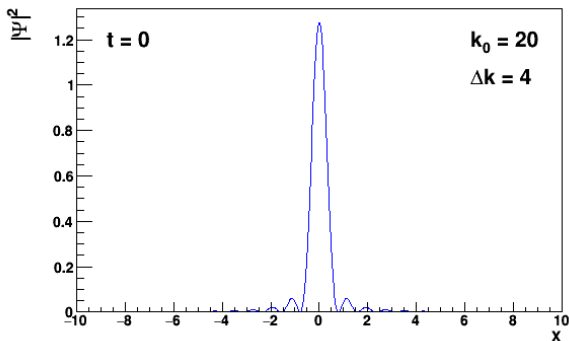


## Paczka falowa

Prostokątne widmo wektora falowego:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Rozmywanie rozkładu przestrzennego przy zmniejszaniu rozmycia pędowego



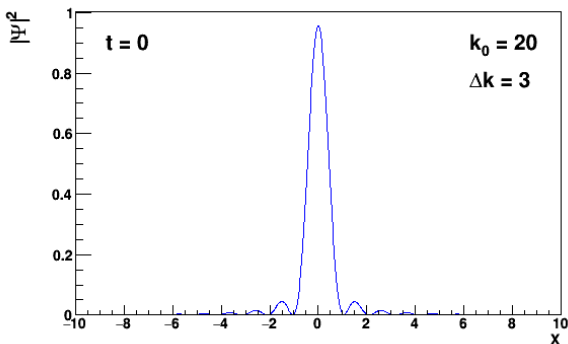


## Paczka falowa

Prostokątne widmo wektora falowego:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Rozmywanie rozkładu przestrzennego przy zmniejszaniu rozmycia pędowego

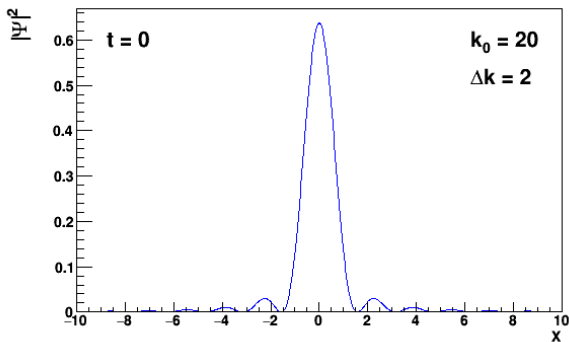


## Paczka falowa

Prostokątne widmo wektora falowego:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Rozmywanie rozkładu przestrzennego przy zmniejszaniu rozmycia pędowego

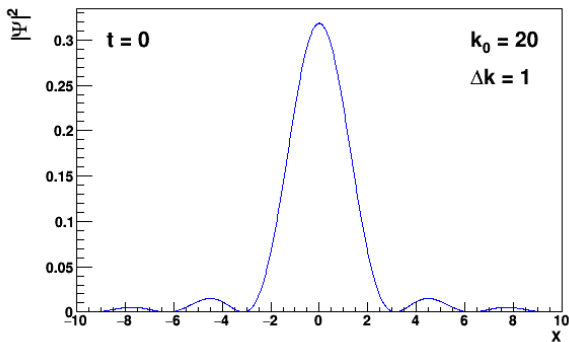


## Paczka falowa

Prostokątne widmo wektora falowego:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Rozmywanie rozkładu przestrzennego przy zmniejszaniu rozmycia pędowego

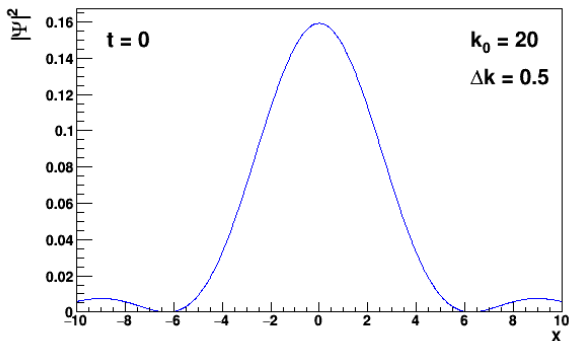


## Paczka falowa

Prostokątne widmo wektora falowego:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Rozmywanie rozkładu przestrzennego przy zmniejszaniu rozmycia pędowego



## Paczka falowa

Prostokątne widmo wektora falowego:

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq k_{min} = k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & \text{dla } k_{min} \leq k \leq k_{max}, \\ 0 & \text{dla } k \geq k_{max} = k_0 + \Delta k. \end{cases}$$

Rozmywanie rozkładu przestrzennego przy zmniejszaniu rozmycia pędowego

Biorąc pozycję  $\Delta x$  pierwszego minimum  $|\Psi(x, t)|^2$  jako miarę szerokości rozkładu przestrzennego można pokazać, że: (ćwiczenia)

$$\Delta x \Delta k = \pi$$

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{h}{2}$$

$\Rightarrow$  dokładność z jaką możemy znać położenie cząstki jest związana z dokładnością określenia jej pędu

$$\Delta p_x = \hbar \Delta k$$

## Zasada nieoznaczoności Heisenberga 1927

Nie można eksperymentalnie określić **jednocześnie** dokładnej wartości danej **składowej pędu** i odpowiedniej **składowej położenia**.

## Zasada nieoznaczoności Heisenberga 1927

Nie można eksperymentalnie określić **jednocześnie** dokładnej wartości danej **składowej pędu** i odpowiedniej **składowej położenia**.

Dokładności pomiaru są ograniczone warunkiem

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

podobnie dla składowych  $y$  i  $z$

## Zasada nieoznaczoności Heisenberga 1927

Nie można eksperymentalnie określić **jednocześnie** dokładnej wartości danej **składowej pędu** i odpowiedniej **składowej położenia**.

Dokładności pomiaru są ograniczone warunkiem

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

podobnie dla składowych  $y$  i  $z$

Jest to konsekwencja falowej natury cząstek!

Nie można stworzyć paczki falowej, która by odpowiadała dokładniejszej lokalizacji przestrzennej i pędowej.

Dotyczy pomiarów równoczesnych (tego samego stanu)!



## Nieoznaczoność położenia i pędu

Jeśli “zamkniemy” cząstkę w ustalonej przestrzeni o rozmiarze  $R$  (np. cząstka w studni potencjału, elektron w atomie, nukleon w jądrze) to “automatycznie” pęd tej cząstki przestaje być dobrze określony.

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2R}$$

## Nieoznaczoność położenia i pędu

Jeśli “zamkniemy” cząstkę w ustalonej przestrzeni o rozmiarze  $R$  (np. cząstka w studni potencjału, elektron w atomie, nukleon w jądrze) to “automatycznie” pęd tej cząstki przestaje być dobrze określony.

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2R}$$

⇒ “uwięzione” cząstki muszą mieć niezerowy pęd (i energię kinetyczną)

## Nieoznaczoność położenia i pędu

Jeśli “zamkniemy” cząstkę w ustalonej przestrzeni o rozmiarze  $R$  (np. cząstka w studni potencjału, elektron w atomie, nukleon w jądrze) to “automatycznie” pęd tej cząstki przestaje być dobrze określony.

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2R}$$

⇒ “uwięzione” cząstki muszą mieć niezerowy pęd (i energię kinetyczną)

Stała Plancka:

$$\hbar \approx 1.066 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s} = 197.3 \text{ MeV}/c\cdot\text{fm}$$

⇒ nukleony w jądrze ( $R \sim 1 \text{ fm}$ ) muszą mieć pędy rzędu  $100 \text{ MeV}/c\dots$

## Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Może być też sformułowana dla dokładności pomiaru energii i czasu

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Jeśli chcemy dokładnie zmierzyć energię jakiegoś stanu, pomiar musi trwać odpowiednio długo.

W procesach, które zachodzą bardzo szybko energia nie może być dobrze określona.

## Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Może być też sformułowana dla dokładności pomiaru energii i czasu

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Jeśli chcemy dokładnie zmierzyć energię jakiegoś stanu, pomiar musi trwać odpowiednio długo.

W procesach, które zachodzą bardzo szybko energia nie może być dobrze określona.

Stała Plancka:

$$\hbar \approx 1.066 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 0.6582 \text{ eV}\cdot\text{fs} = 197.3 \text{ MeV}/c\cdot\text{fm}$$

⇒ energia fotonów z lasera generującego ultrakrótkie impulsy ( $\sim\text{fs}$ ) nie jest dokładnie ustalona

## Zasady zachowania

Zasada nieoznaczoności mówi nam, że **nie istnieją** stany, które miałyby dokładnie ustalne wszystkie parametry fizyczne.

**Gdy cząstka jest bardzo dobrze zlokalizowana, jej pęd nie jest ustalony.**  
**Gdy stan układu jest nietrwały, jego energia nie jest dobrze określona.**

## Zasady zachowania

Zasada nieoznaczoności mówi nam, że **nie istnieją** stany, które miałyby dokładnie ustalne wszystkie parametry fizyczne.

**Gdy cząstka jest bardzo dobrze zlokalizowana, jej pęd nie jest ustalony.**  
**Gdy stan układu jest nietrwały, jego energia nie jest dobrze określona.**

Nie oznacza to jednak naruszenia zasad zachowania !!!

**Energia i pęd** pozostają **ściśle zachowane** we wszystkich procesach, także na poziomie kwantowym!

Wracając do stanu podstawowego układ zawsze “odda” tyle samo energii ile zostało włożone w jego wzbudzenie. Bilans musi wyjść na zero!

**Podobnie zachowany jest moment pędu i ładunek...**

## Nieoznaczoność energii i czasu

Szczególnym przypadkiem jest zależność między szerokością  $\Gamma$  stanu a średnim czasem jego życia  $\tau$ :

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar$$

Im dany stan wzbudzony lub cząstka szybciej się rozpada (mniejsze  $\tau$ ) tym większa jest jego “naturalną szerokość”  $\Gamma = \hbar/\tau$



## Nieoznaczoność energii i czasu

Szczególnym przypadkiem jest zależność między szerokością  $\Gamma$  stanu a średnim czasem jego życia  $\tau$ :

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar$$

Im dany stan wzbudzony lub cząstka szybciej się rozpada (mniejsze  $\tau$ ) tym większa jest jego “naturalną szerokość”  $\Gamma = \hbar/\tau$

Stała Plancka:  $\hbar \approx 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$

⇒ poszerzenie istotne dopiero przy czasach życia poniżej  $10^{-15} \text{ s}$ ...

## Nieoznaczoność energii i czasu

Szczególnym przypadkiem jest zależność między szerokością  $\Gamma$  stanu a średnim czasem jego życia  $\tau$ :

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar$$

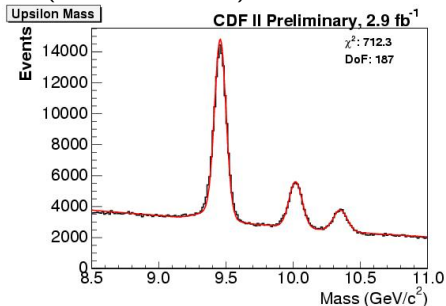
Im dany stan wzbudzony lub cząstka szybciej się rozpada (mniejsze  $\tau$ ) tym większa jest jego “naturalną szerokość”  $\Gamma = \hbar/\tau$

Stała Plancka:  $\hbar \approx 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$

⇒ poszerzenie istotne dopiero przy czasach życia poniżej  $10^{-15} \text{ s}$ ...

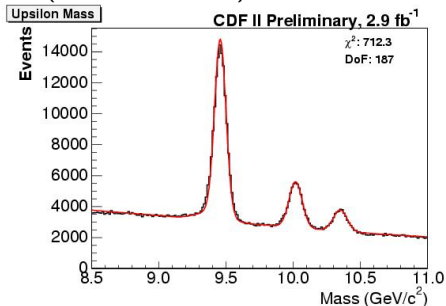
⇒ w makroskopowych pomiarach efekt nie może być istotny

Cząstki krótkożyciowe (tzw. rezonanse) obserwowane w fizyce cząstek:



Masy tych cząstek są naturalnie rozmyte. Cząstka może być produkowana z masą trochę niższą lub wyższą niż masa nominalna (średnia).

Cząstki krótkożyciowe (tzw. rezonanse) obserwowane w fizyce cząstek:



Masy tych cząstek są naturalnie rozmyte. Cząstka może być produkowana z masą trochę niższą lub wyższą niż masa nominalna (średnia).

Z tego rozmycia (szerokości  $\Gamma$  rozkładu) wnioskujemy o czasie życia.

Dla pierwszego pokazanego stanu:

$$\Gamma \approx 52.5 \text{ keV}$$

$$\Rightarrow \tau \approx 1.25 \cdot 10^{-20} \text{ s}$$



- 1 Ewolucja paczki falowej
- 2 Interpretacja probabilistyczna
- 3 Zasada nieoznaczoności
- 4 Stany stacjonarne**
- 5 Twierdzenie Noether

## Nieoznaczoność energii

Z zasady nieoznaczoności wynika, że stanem o ustalonej energii (nieoznaczoność  $\Delta E \rightarrow 0$ ) może być tylko stan stabilny ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ).

## Stan stacjonarny

Stan którego rozkład gęstości prawdopodobieństwa **nie zmienia się w czasie** nazywamy **stanem stacjonarnym**

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$$

## Nieoznaczoność energii

Z zasady nieoznaczoności wynika, że stanem o ustalonej energii (nieoznaczoność  $\Delta E \rightarrow 0$ ) może być tylko stan stabilny ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ).

## Stan stacjonarny

Stan którego rozkład gęstości prawdopodobieństwa **nie zmienia się w czasie** nazywamy **stanem stacjonarnym**

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$$

Dla stanu stacjonarnego możemy zapisać:

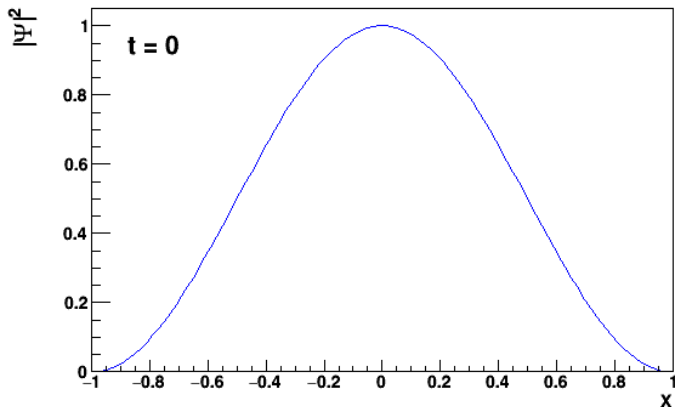
$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

⇒ z czasem zmienia się tylko faza funkcji falowej (niemierzalna)



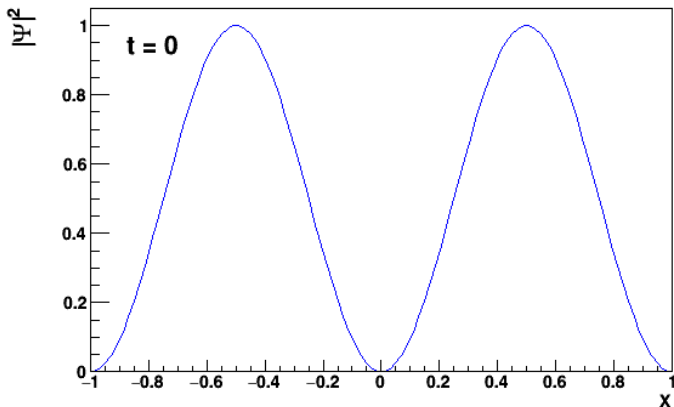
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Stan stacjonarny  $n = 1$



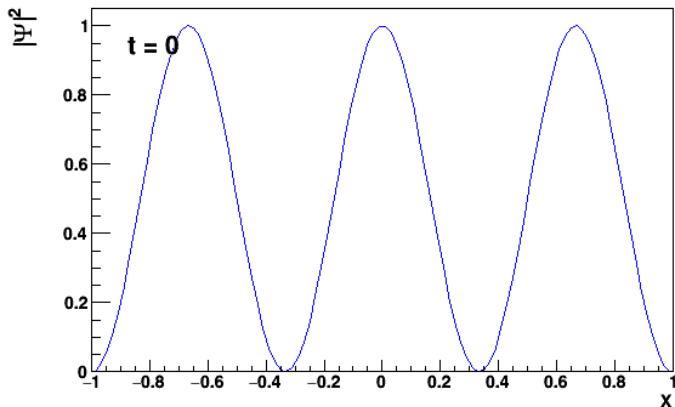
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Stan stacjonarny  $n = 2$



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

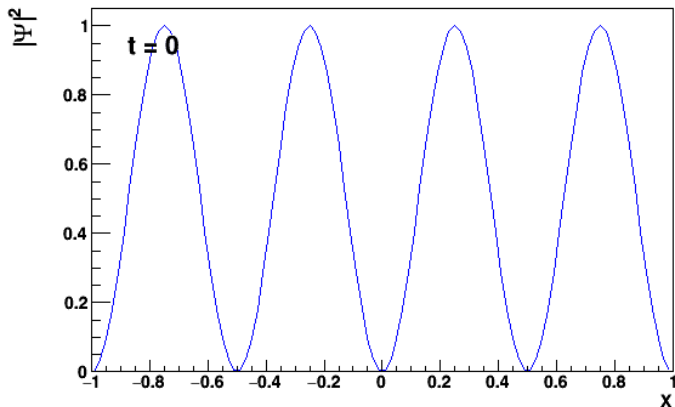
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Stan stacjonarny  $n = 3$



# Stany stacjonarne

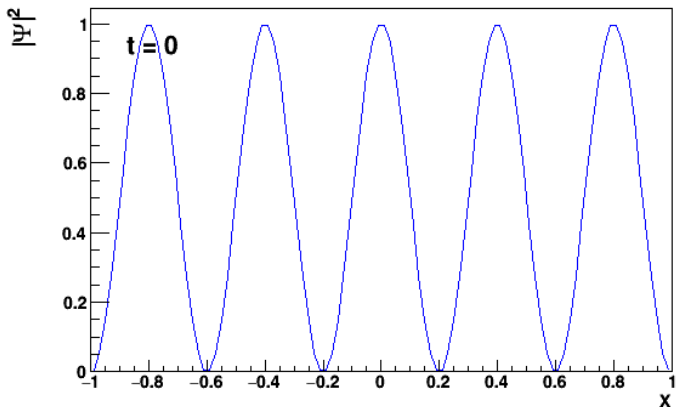
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Stan stacjonarny  $n = 4$



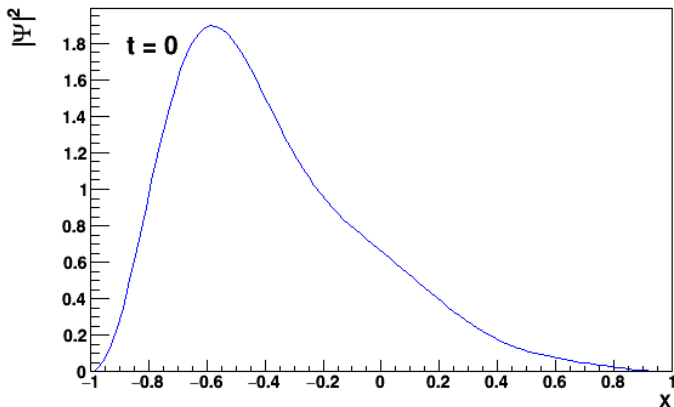
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Stan stacjonarny  $n = 5$**



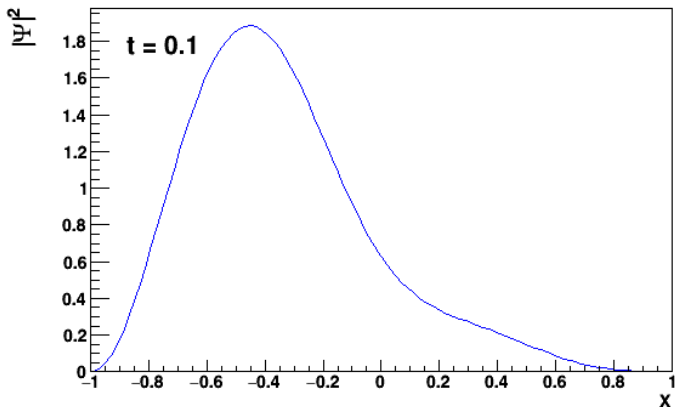
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

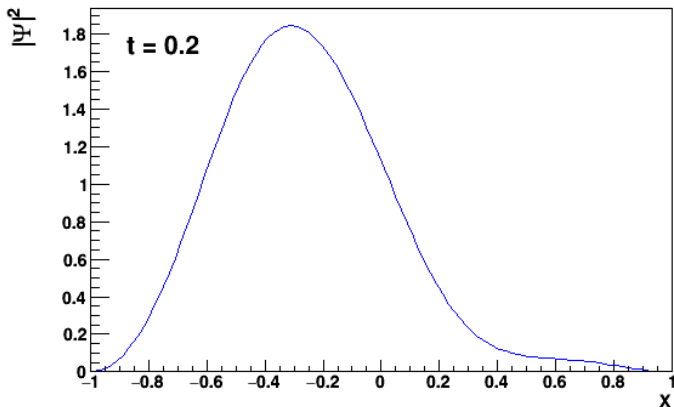
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



# Stany stacjonarne

Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

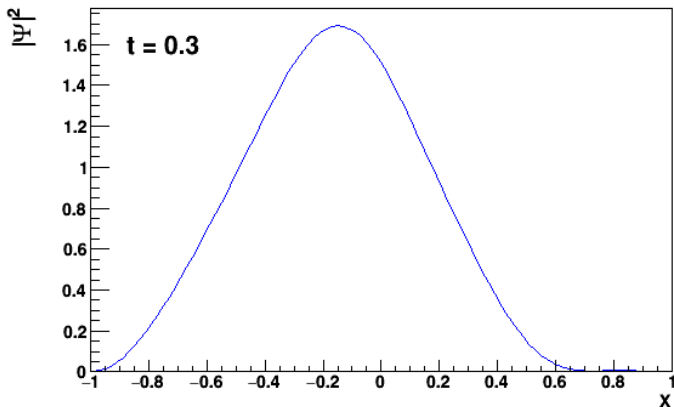
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**





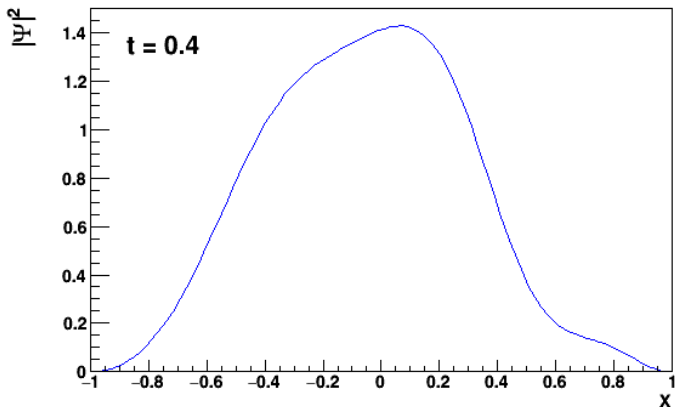
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



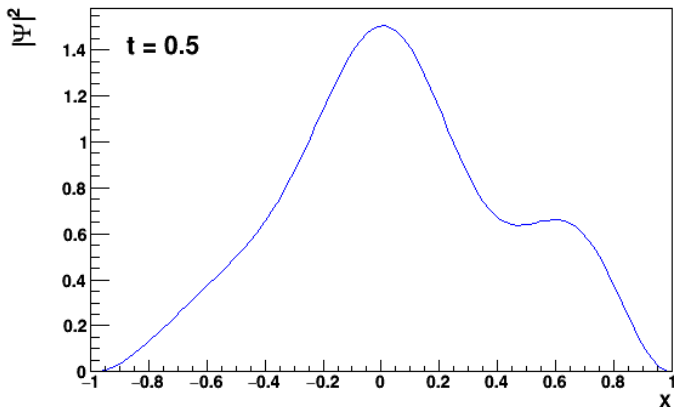
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



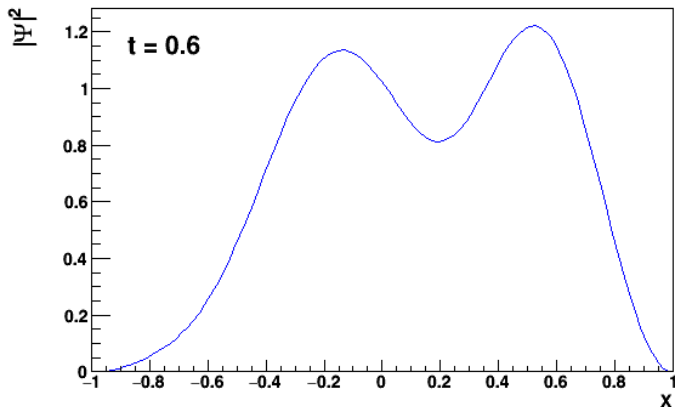
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



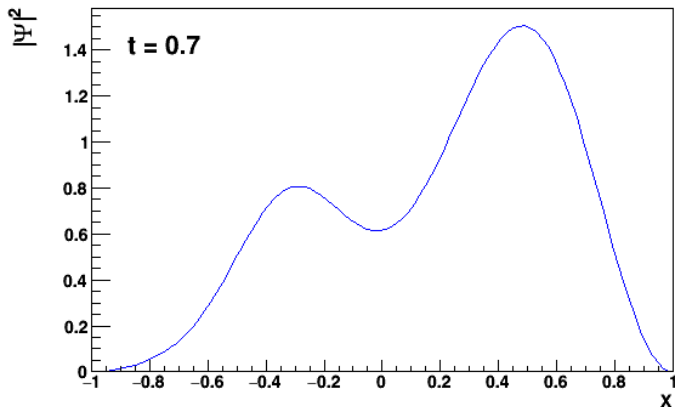
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



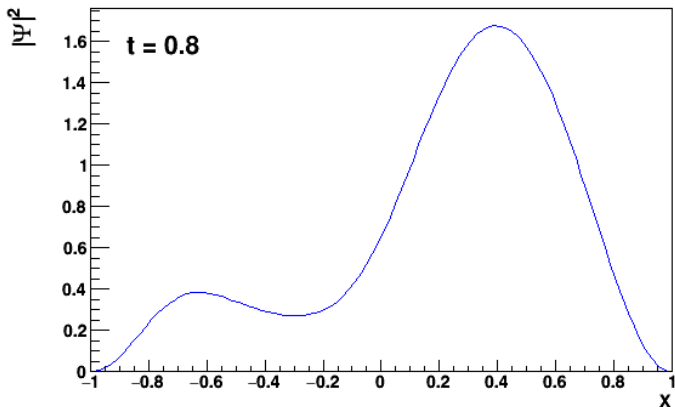
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



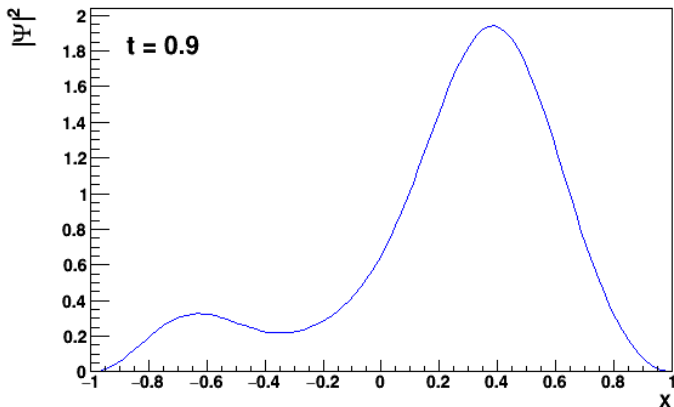
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



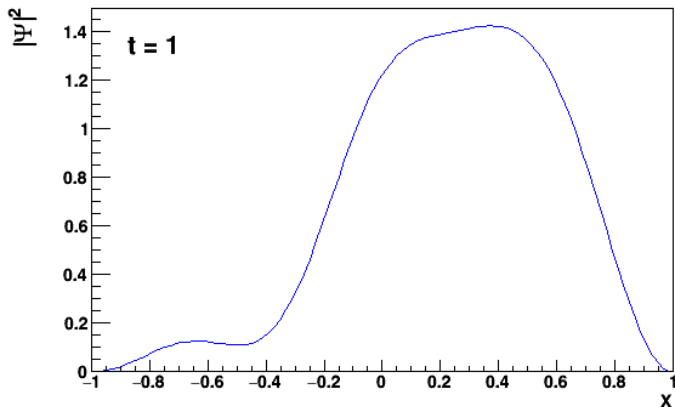
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

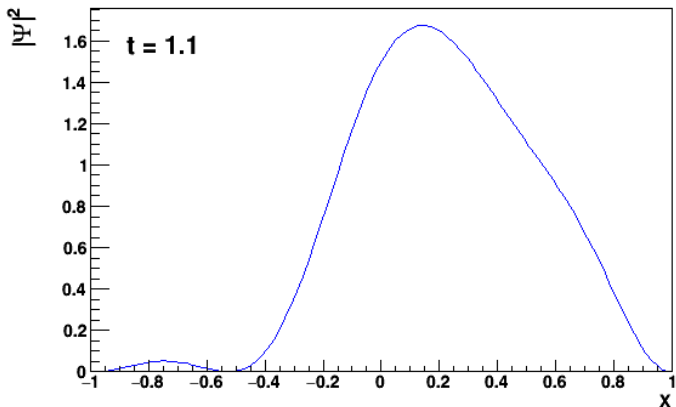
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:





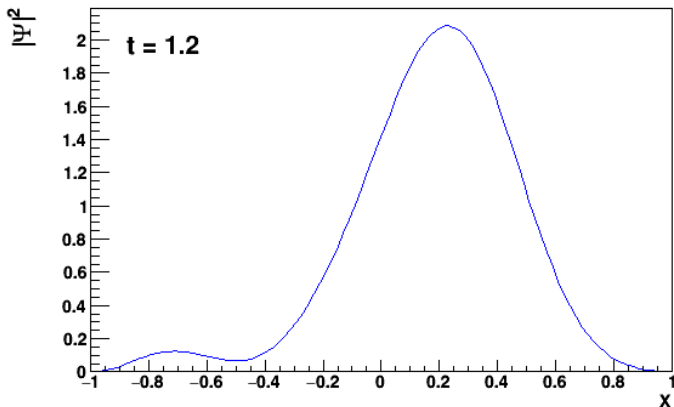
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

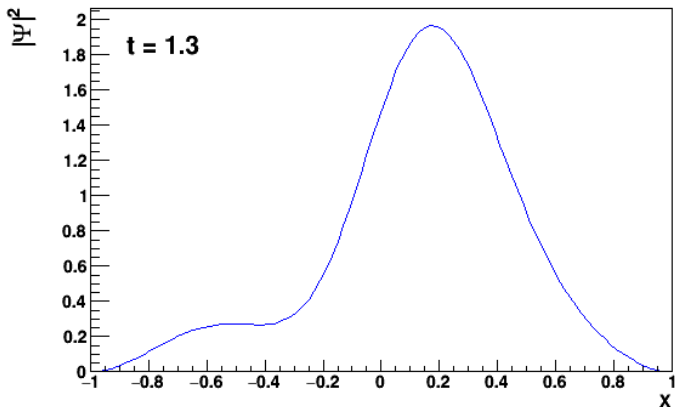
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



# Stany stacjonarne

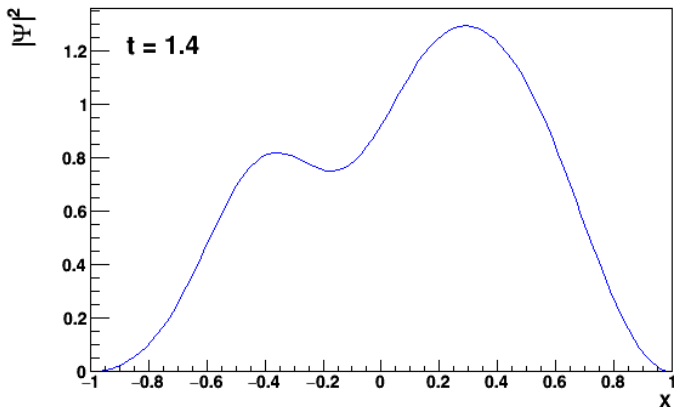
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



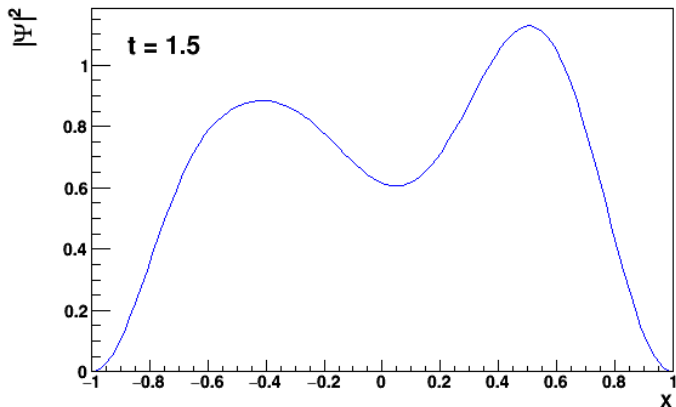
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



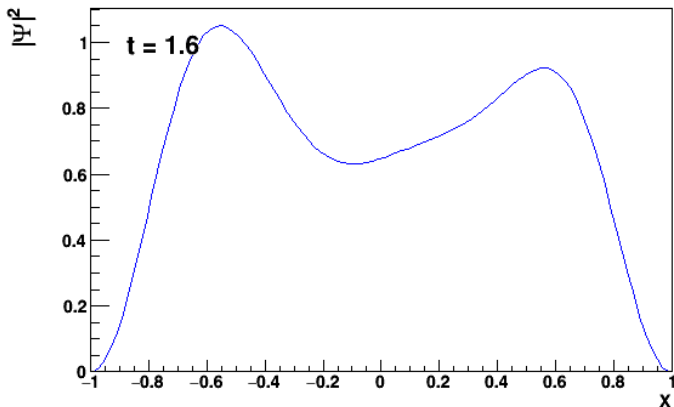
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



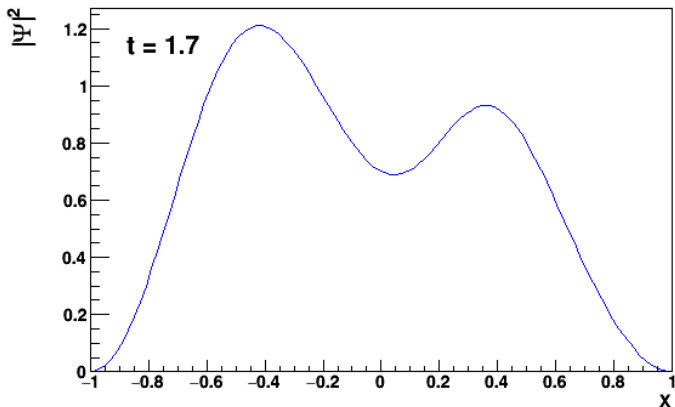
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



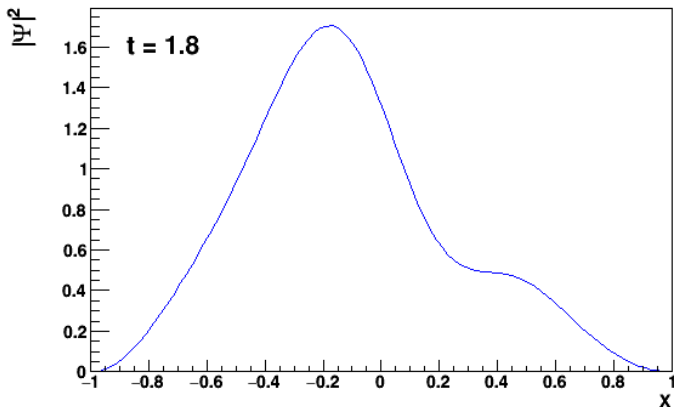
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:

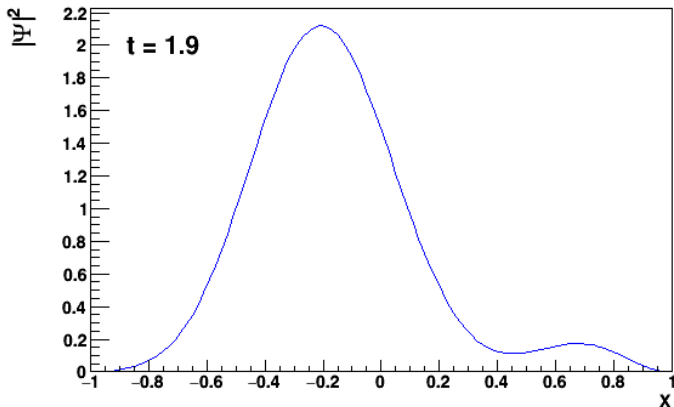




# Stany stacjonarne

Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

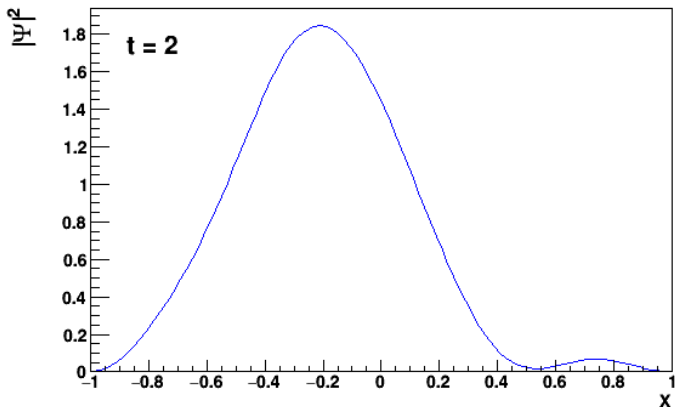
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



# Stany stacjonarne

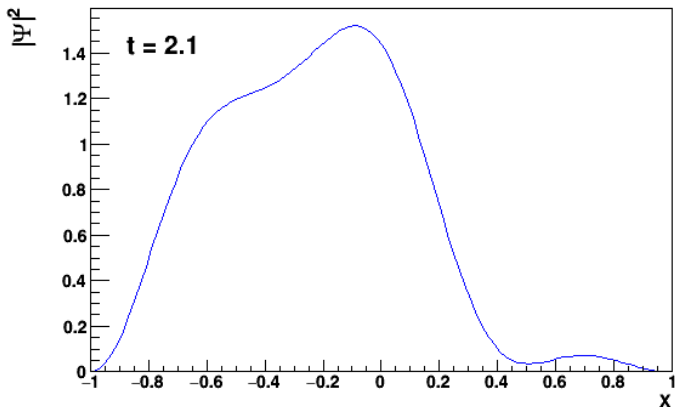
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



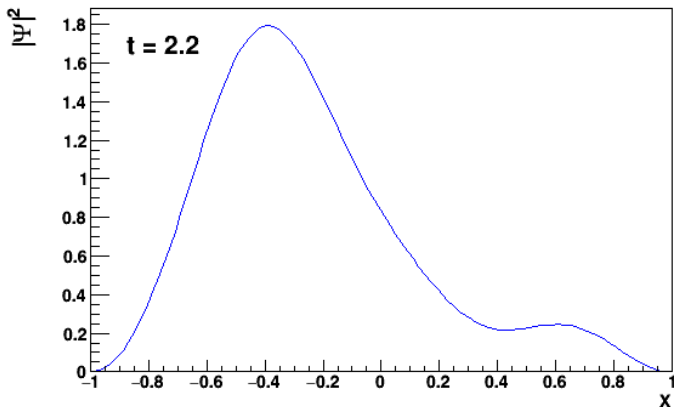
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



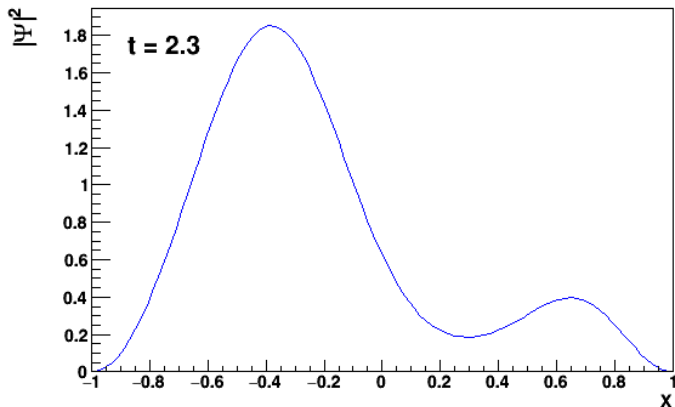
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

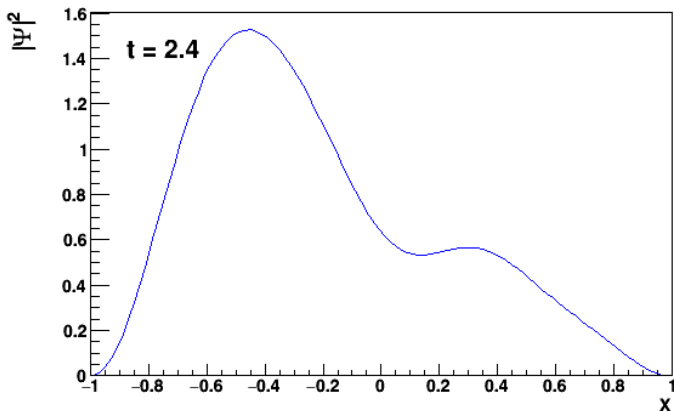
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



# Stany stacjonarne

Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

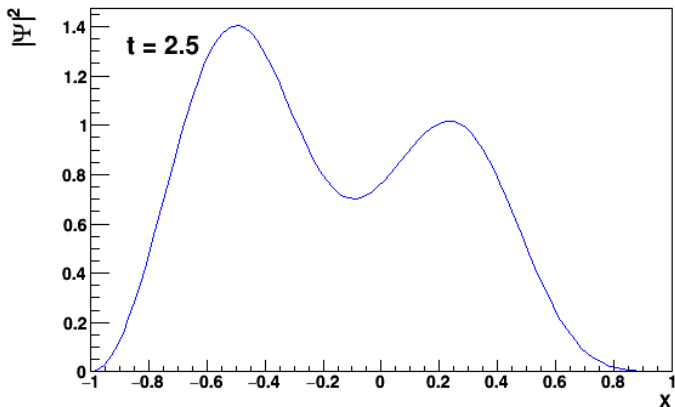
**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



# Stany stacjonarne

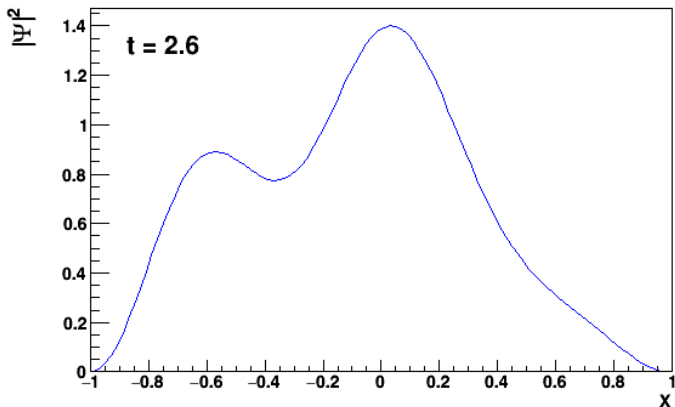
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**

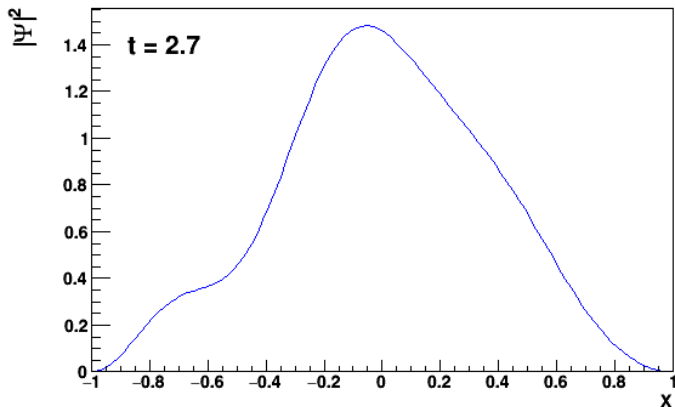




# Stany stacjonarne

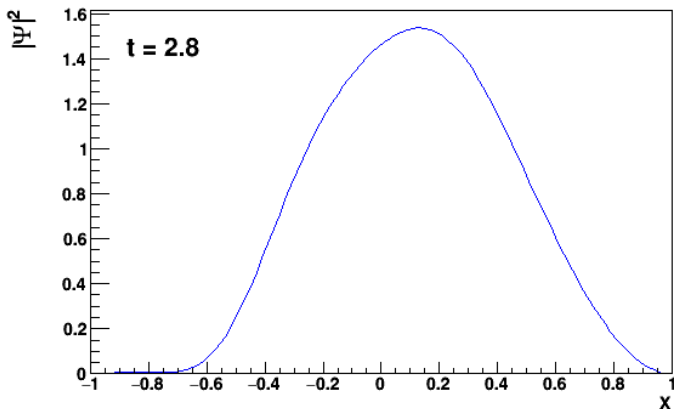
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



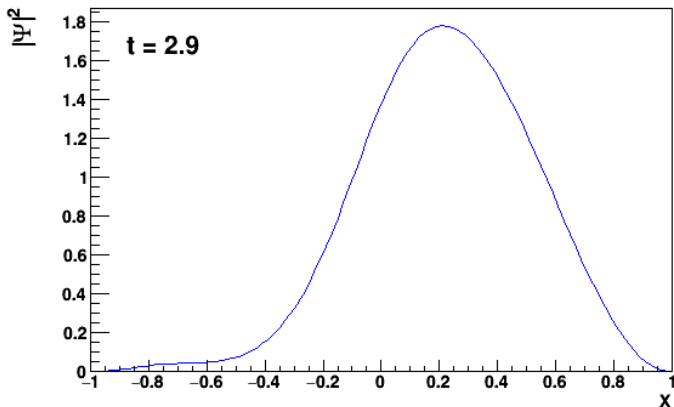
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



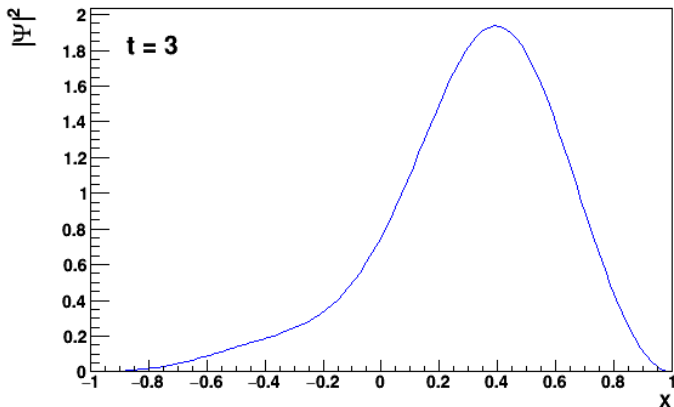
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



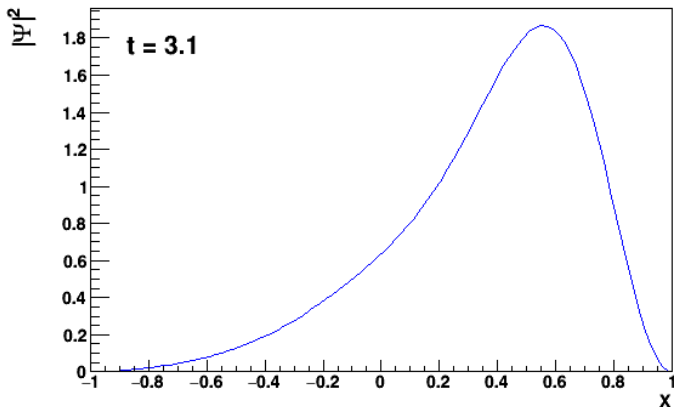
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



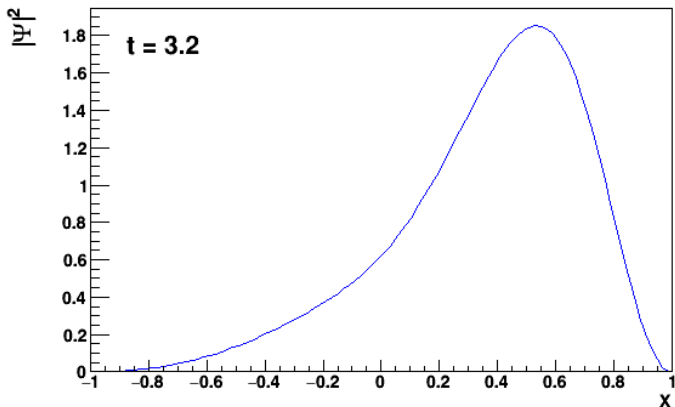
Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). Superpozycja ewoluuje w czasie:



Nie każdy stabilny stan musi być stanem stacjonarnym.

**Przykład:** jednowymiarowa paczka falowa cząstki uwięzionej między dwoma nieskończonymi barierami ( $-1 < x < 1$ ). **Superpozycja ewoluuje w czasie:**



Funkcja falowa dowolnego stanu zawsze da się zapisać jako superpozycja funkcji falowych stanów stacjonarnych:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i A_i \psi_i(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t}$$

Funkcja falowa dowolnego stanu zawsze da się zapisać jako superpozycja funkcji falowych stanów stacjonarnych:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i A_i \psi_i(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t}$$

Stany stacjonarne o **różnych energiach** są ortogonalne:

$$\int \psi_i^*(\vec{r}) \psi_j(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{ij}$$

w przypadku "degeneracji" stanów (kilka ma taką samą energię) można zawsze wybrać kombinacje ortogonalne



Funkcja falowa dowolnego stanu zawsze da się zapisać jako superpozycja funkcji falowych stanów stacjonarnych:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i A_i \psi_i(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t}$$

Stany stacjonarne o **różnych energiach** są ortogonalne:

$$\int \psi_i^*(\vec{r}) \psi_j(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{ij}$$

w przypadku "degeneracji" stanów (kilka ma taką samą energię) można zawsze wybrać kombinacje ortogonalne

⇒ stany stacjonarne stanowią bazę w przestrzeni stanów

dla danego układu

Funkcja falowa dowolnego stanu zawsze da się zapisać jako superpozycja funkcji falowych stanów stacjonarnych:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i A_i \psi_i(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t}$$

Stany stacjonarne o różnych energiach są ortogonalne:

$$\int \psi_i^*(\vec{r}) \psi_j(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{ij}$$

w przypadku "degeneracji" stanów (kilka ma taką samą energię) można zawsze wybrać kombinacje ortogonalne  
⇒ stany stacjonarne stanowią bazę w przestrzeni stanów

Warunek normalizacji:

dla danego układu

$$\sum_i |A_i|^2 = 1$$

## Widmo energii

Jeśli układ znajduje się w stanie będącym superpozycją **stanów stacjonarnych** o energiach  $E_j$ :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i A_i \psi_i(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t}$$

to pomiar energii takiego stanu zawsze da jedną z wartości  $E_j$ .

## Widmo energii

Jeśli układ znajduje się w stanie będącym superpozycją **stanów stacjonarnych** o energiach  $E_i$ :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i A_i \psi_i(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t}$$

to pomiar energii takiego stanu zawsze da jedną z wartości  $E_i$ .

⇒ w trakcie pomiaru wybieramy (losowo) jeden ze stanów składowych

Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości  $E_i$  energii stanu:

$$p(E_i) = |A_i|^2$$

Z warunku normalizacji dla  $\Psi(\vec{r}, t)$  wynika też:  $\sum_i p(E_i) = 1$

- 1 Ewolucja paczki falowej
- 2 Interpretacja probabilistyczna
- 3 Zasada nieoznaczoności
- 4 Stany stacjonarne
- 5 Twierdzenie Noether

## Twierdzenie Noether (1918)

Każdej ciągłej symetrii praw fizyki (czyli takiemu przekształceniu, które nie zmienia zachowania badanych układów fizycznych) odpowiada prawo zachowania.

Jest to jedno z najbardziej fundamentalnych praw współczesnej fizyki

## Twierdzenie Noether (1918)

Każdej ciągłej **symetrii** praw fizyki (czyli takiemu przekształceniu, które nie zmienia zachowania badanych układów fizycznych) odpowiada **prawo zachowania**.

Jest to jedno z najbardziej fundamentalnych praw współczesnej fizyki

### Przykład 1

Jeśli zmienimy czas z letniego na zimowy to nie zmienia to praw fizyki.

Pomiar czasu można rozpocząć w dowolnym momencie, nie istnieje “czas absolutny” (wyróżniona chwila  $t = 0$ )

## Twierdzenie Noether (1918)

Każdej ciągłej symetrii praw fizyki (czyli takiemu przekształceniu, które nie zmienia zachowania badanych układów fizycznych) odpowiada prawo zachowania.

Jest to jedno z najbardziej fundamentalnych praw współczesnej fizyki

### Przykład 1

Jeśli zmienimy czas z letniego na zimowy to nie zmienia to praw fizyki.

Pomiar czasu można rozpocząć w dowolnym momencie, nie istnieje "czas absolutny" (wyróżniona chwila  $t = 0$ )

Prawa przyrody są niezmiennicze względem przesunięcia w czasie

⇒ Zasada Zachowania Energii



## Twierdzenie Noether (1918)

Każdej ciągłej **symetrii** praw fizyki (czyli takiemu przekształceniu, które nie zmienia zachowania badanych układów fizycznych) odpowiada **prawo zachowania**.

Jest to jedno z najbardziej fundamentalnych praw współczesnej fizyki

## Przykład 2

Jeśli odległość będziemy mierzyć w jardach to nie zmienia to praw fizyki.

Wybór jednostki długości i punktu zerowego jest zawsze umowny, nie istnieje wyróżniony układ odniesienia

## Twierdzenie Noether (1918)

Każdej ciągłej symetrii praw fizyki (czyli takiemu przekształceniu, które nie zmienia zachowania badanych układów fizycznych) odpowiada prawo zachowania.

Jest to jedno z najbardziej fundamentalnych praw współczesnej fizyki

## Przykład 2

Jeśli odległość będziemy mierzyć w jardach to nie zmienia to praw fizyki.

Wybór jednostki długości i punktu zerowego jest zawsze umowny, nie istnieje wyróżniony układ odniesienia

Prawa przyrody są niezmiennicze względem przesunięcia w przestrzeni

⇒ Zasada Zachowania Pędu

## Prawa zachowania

Twierdzenie Noether pokazuje, że prawa zachowania są dużo bardziej fundamentalne niż skłonni byliśmy przypuszczać

### symetria

### zachowana wielkość

przesunięcie w czasie



energia

przesunięcie w przestrzeni



pęd

obrót



moment pędu

## Funkcja falowa

Funkcje falowe są zespolone, ale wynik pomiaru nie zależy od fazy

⇒ dodatkowa symetria “cechowania”:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \cdot \psi(x)$$

Transformacje obrotu fazy o kąt  $\alpha$ :

$$U(\alpha) = e^{i\alpha}$$

tworzą grupę abelową znaną jako  $U(1)$ .

## Funkcja falowa

Funkcje falowe są zespolone, ale wynik pomiaru nie zależy od fazy

⇒ dodatkowa symetria “cechowania”:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \cdot \psi(x)$$

Transformacje obrotu fazy o kąt  $\alpha$ :

$$U(\alpha) = e^{i\alpha}$$

tworzą grupę abelową znaną jako  $U(1)$ .

Niezmienniczość względem transformacji cechowania

⇒ Zasada Zachowania Ładunku

## Funkcja falowa

Transformacja **obrotu fazy** o **ustalony** kąt  $\alpha$   
 $\Rightarrow$  **“globalna”** symetria cechowania

Jeśli faza funkcji falowej nie jest mierzalna to czy nasza teoria jest też niezmiennicza względem **“lokalnej”** symetrii cechowania  $U(1)$ :

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \cdot \psi(x)$$

gdzie kąt obrotu fazy  $\alpha(x)$  zależy od położenia (i czasu) ?

# Twierdzenie Noether

## Funkcja falowa

Transformacja **obrotu fazy** o **ustalony** kąt  $\alpha$   
 $\Rightarrow$  **“globalna”** symetria cechowania

Jeśli faza funkcji falowej nie jest mierzalna to czy nasza teoria jest też niezmiennicza względem **“lokalnej”** symetrii cechowania U(1):

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \cdot \psi(x)$$

gdzie kąt obrotu fazy  $\alpha(x)$  zależy od położenia (i czasu) ?

Nie jest to możliwe dla swobodnej cząstki.

Musimy dodać do teorii opis oddziaływań elektromagnetycznych (!)

Z **niezmienniczości** względem **lokalnej** symetrii cechowania otrzymujemy

Elektrodynamikę Kwantową (QED)

pełną teorię oddziałujących ładunków elektrycznych i fotonów