

Podstawy fizyki kwantowej i budowy materii

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki

Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych
Instytut Fizyki Doświadczalnej



Wykład 8
28 listopada 2016

- 1 Operatory i równanie Schrödingera
- 2 Studnia potencjału
- 3 Stopień potencjału
- 4 Efekt tunelowy

- 1 Operatory i równanie Schrödingera
- 2 Studnia potencjału
- 3 Stopień potencjału
- 4 Efekt tunelowy

Operatory

Możemy zdefiniować dla mierzalnych wielkości fizycznych

obserwabela O

operator \hat{O}

wyrażenie

położenie

\hat{x}

x

Operatory

Możemy zdefiniować dla mierzalnych wielkości fizycznych

obserwable O	operator \hat{O}	wyrażenie
położenie	\hat{x}	x
energia potencjalna	\hat{V}	$V(x)$
pęd	\hat{p}	$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
energia całkowita	\hat{E}	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
energia kinetyczna	$\hat{E}_{kin} = \frac{p^2}{2m}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Operatory

Możemy zdefiniować dla mierzalnych wielkości fizycznych

obserwable O	operator \hat{O}	wyrażenie
położenie	\hat{x}	x
energia potencjalna	\hat{V}	$V(x)$
pęd	\hat{p}	$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
energia całkowita	\hat{E}	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
energia kinetyczna	$\hat{E}_{kin} = \frac{p^2}{2m}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
operator Hamiltona en. kinetyczna + potencjalna	$\hat{H} = \hat{E}_{kin} + \hat{V}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

Wartość oczekiwana

Operatora \hat{O} w stanie opisanym funkcją falową $\Psi(x, t)$

$$\langle O \rangle = \int dx \Psi^*(x, t) \hat{O} \Psi(x, t) \equiv \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$$

Stany własne

Jeśli wynik działania operatora \hat{O} jest o - liczbą rzeczywistą

$$\hat{O} |\Psi\rangle = o |\Psi\rangle$$

to stan $|\Psi\rangle$ nazywamy **stanem własnym** operatora \hat{O} ,
zaś wartość o - **wartością własną** operatora.

W stanie własnym wartość własna jest wartością oczekiwaną operatora

$$\langle O \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle = o$$

\Rightarrow jest to jedyny możliwy wynik pomiaru O w tym stanie

Zależne od czasu równanie Schrödingera

Zależne od czasu równanie Schrödingera otrzymujemy przyjmując, że dozwolony stan układu powinien spełniać klasyczną zależność

$$\hat{H} |\Psi\rangle \equiv (\hat{E}_{kin} + \hat{V}) |\Psi\rangle = \hat{E} |\Psi\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \Psi(x, t)$$

Podstawiając postaci poszczególnych operatorów dostajemy:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

Zależne od czasu równanie Schrödingera

Zależne od czasu równanie Schrödingera otrzymujemy przyjmując, że dozwolony stan układu powinien spełniać klasyczną zależność

$$\hat{H} |\Psi\rangle \equiv (\hat{E}_{kin} + \hat{V}) |\Psi\rangle = \hat{E} |\Psi\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \Psi(x, t)$$

Podstawiając postaci poszczególnych operatorów dostajemy:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

Operator Laplace'a (laplasjan): $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Stany stacjonarne

Dla stanów własnych \hat{E} ogólne rozwiązanie jest postaci

$$\Psi_E(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Niezależne od czasu równanie Schrödingera

Dla stanów stacjonarnych możemy wyeliminować zależność od czasu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

Stany stacjonarne

Dla stanów własnych \hat{E} ogólne rozwiązanie jest postaci

$$\Psi_E(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Niezależne od czasu równanie Schrödingera

Dla stanów stacjonarnych możemy wyeliminować zależność od czasu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Stany stacjonarne

Dla stanów własnych \hat{E} ogólne rozwiązanie jest postaci

$$\Psi_E(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Niezależne od czasu równanie Schrödingera

Dla stanów stacjonarnych możemy wyeliminować zależność od czasu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Równanie to pozwala nam znaleźć **stany własne energii** w zadanym $V(x)$.

Stany stacjonarne

Dla stanów własnych \hat{E} ogólne rozwiązanie jest postaci

$$\Psi_E(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Niezależne od czasu równanie Schrödingera

Dla stanów stacjonarnych możemy wyeliminować zależność od czasu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Równanie to pozwala nam znaleźć **stany własne energii** w zadanym $V(x)$.

Wartości własne energii definiują dostępne **poziomy energetyczne** cząstki.

Stany stacjonarne

Dla stanów własnych \hat{E} ogólne rozwiązanie jest postaci

$$\Psi_E(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Niezależne od czasu równanie Schrödingera

Dla stanów stacjonarnych możemy wyeliminować zależność od czasu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Równanie to pozwala nam znaleźć **stany własne energii** w zadanym $V(x)$.

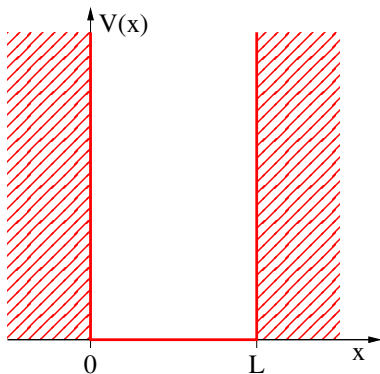
Wartości własne energii definiują dostępne **poziomy energetyczne** cząstki.

Stan układu można zawsze zapisać jako **superpozycję stanów własnych** \hat{E} .

- 1 Operatory i równanie Schrödingera
- 2 Studnia potencjału**
- 3 Stopień potencjału
- 4 Efekt tunelowy

Studnia potencjału

Rozważmy jednowymiarowy problem cząstki zamkniętej w “pułapce”, którą możemy stworzyć przez odpowiedni dobór potencjału.



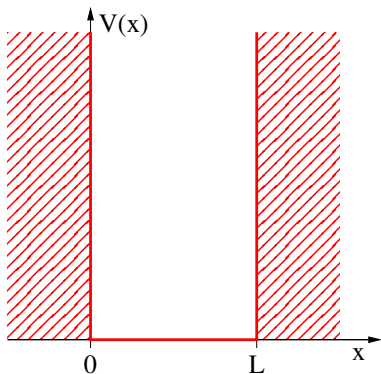
Przypadek “idealnej” pułapki:

$$V(x) = \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{dla } x < 0 \\ \rightarrow +\infty & \text{dla } x > L \end{cases}$$

Nieskończona **bariera potencjału** odgradza cząstkę od obszarów $x < 0$ i $x > L$.

Studnia potencjału

Rozważmy jednowymiarowy problem cząstki zamkniętej w “pułapce”, którą możemy stworzyć przez odpowiedni dobór potencjału.



Przypadek “idealnej” pułapki:

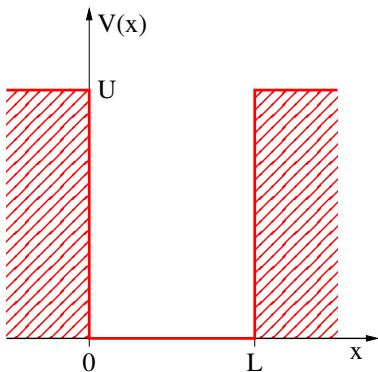
$$V(x) = \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < L \\ \rightarrow +\infty & \text{dla } x > L \end{cases}$$

Nieskończona **bariera potencjału** odgradza cząstkę od obszarów $x < 0$ i $x > L$.

Cząstka jest “swobodna” dla $0 < x < L$

Bariera potencjału

Czy pojęcie “bariery potencjału” działa także w mechanice kwantowej?



Przypadek rzeczywistej pułapki:

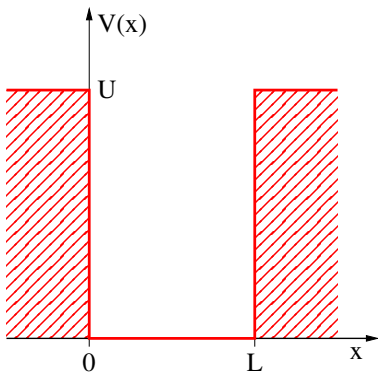
$$V(x) = \begin{cases} U & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < L \\ U & \text{dla } x > L \end{cases}$$

W obszarze $x < 0$ równanie Schrödingera:

$$(U - E) \psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

Bariera potencjału

Czy pojęcie “bariery potencjału” działa także w mechanice kwantowej?



Przypadek rzeczywistej pułapki:

$$V(x) = \begin{cases} U & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < L \\ U & \text{dla } x > L \end{cases}$$

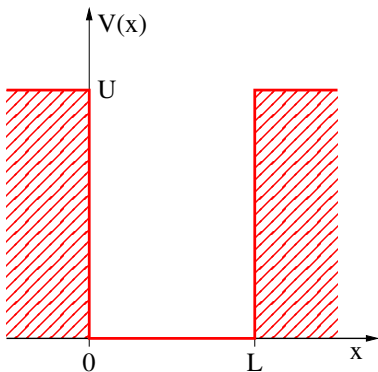
W obszarze $x < 0$ równanie Schrödingera:

$$(U - E) \psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

Dla $U \rightarrow +\infty$ druga pochodna $\psi(x)$ staje się **rozbieżna!**

Bariera potencjału

Czy pojęcie “bariery potencjału” działa także w mechanice kwantowej?



Przypadek rzeczywistej pułapki:

$$V(x) = \begin{cases} U & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < L \\ U & \text{dla } x > L \end{cases}$$

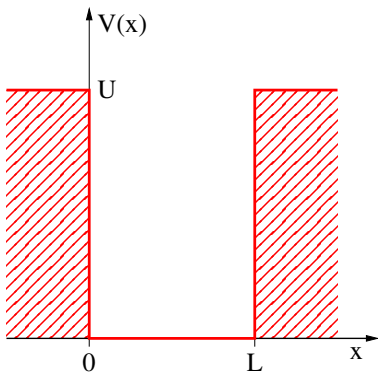
W obszarze $x < 0$ równanie Schrödingera:

$$(U - E) \psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

Dla $U \rightarrow +\infty$ druga pochodna $\psi(x)$ staje się **rozbieżna!** $\psi(x)$ **wybuch** ?!

Bariera potencjału

Czy pojęcie “bariery potencjału” działa także w mechanice kwantowej?



Przypadek rzeczywistej pułapki:

$$V(x) = \begin{cases} U & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < L \\ U & \text{dla } x > L \end{cases}$$

W obszarze $x < 0$ równanie Schrödingera:

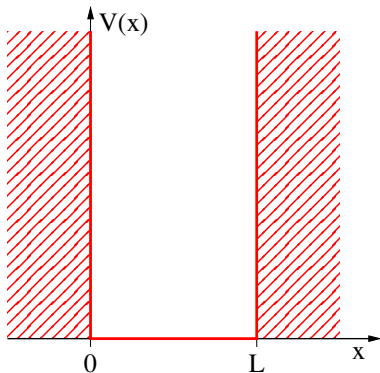
$$(U - E) \psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

Dla $U \rightarrow +\infty$ druga pochodna $\psi(x)$ staje się **rozbieżna!** $\psi(x)$ **wybuch** ?!

\Rightarrow jedyne poprawne rozwiązanie dla $x < 0$ to $\psi(x) \equiv 0$ (podobnie dla $x > L$)

Nieskończona studnia potencjału

Bariera potencjału ogranicza przestrzeń dostępną dla cząstki do $0 < x < L$



Szukamy rozwiązania w postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \psi_E(x) & \text{dla } 0 < x < L \\ 0 & \text{dla } x > L \end{cases}$$

gdzie $\psi_E(x)$ jest rozwiązaniem równania Schrödingera dla cząstki swobodnej:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_E(x) = E \psi_E(x)$$

Ale funkcja falowa musi być ciągła w całej przestrzeni, także w $x = 0, L$!
 \Rightarrow musimy uwzględnić **warunek "zszycia"** rozwiązań pomiędzy obszarami

Nieskończona studnia potencjału

Równanie dla cząstki swobodnej można przepisać (w przedziale $0 < x < L$)

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = -k^2 \psi(x)$$

Nieskończona studnia potencjału

Równanie dla cząstki swobodnej można przepisać (w przedziale $0 < x < L$)

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = -k^2 \psi(x)$$

Równanie oscylatora harmonicznego \Rightarrow ogólne rozwiązanie jest postaci:

$$\psi(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Nieskończona studnia potencjału

Równanie dla cząstki swobodnej można przepisać (w przedziale $0 < x < L$)

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = -k^2 \psi(x)$$

Równanie oscylatora harmonicznego \Rightarrow ogólne rozwiązanie jest postaci:

$$\psi(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

W zagadnieniu studni wygodniejsza jest równoważna postać:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Warunki zszycia narzucają:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0$$

\Rightarrow tylko wyróżnione wartości k są dozwolone !

Nieskończona studnia potencjału

Warunek zszycia $\psi(L) = 0$ daje:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

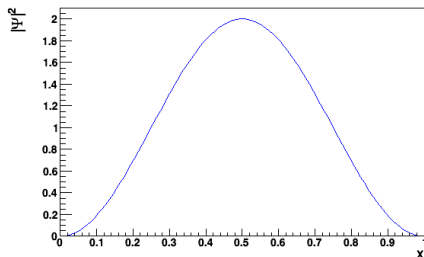
$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad k = n \cdot \frac{\pi}{L}$$

Uwzględniając warunek normalizacji:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = n^2 E_1$$

Stan podstawowy ($n = 1$):



Nieskończona studnia potencjału

Warunek zszycia $\psi(L) = 0$ daje:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

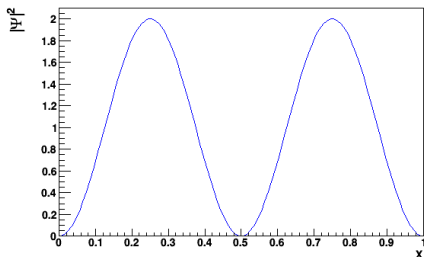
$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad k = n \cdot \frac{\pi}{L}$$

Uwzględniając warunek normalizacji:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = n^2 E_1$$

Stan $n = 2$:



Nieskończona studnia potencjału

Warunek zszycia $\psi(L) = 0$ daje:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

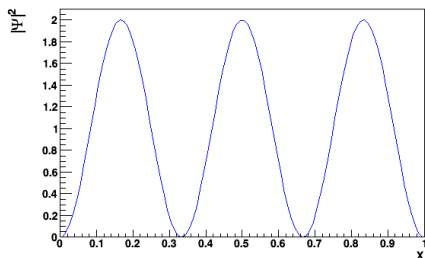
$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad k = n \cdot \frac{\pi}{L}$$

Uwzględniając warunek normalizacji:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = n^2 E_1$$

Stan $n = 3$:



Nieskończona studnia potencjału

Warunek zszycia $\psi(L) = 0$ daje:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

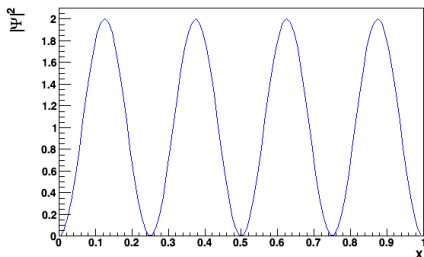
$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad k = n \cdot \frac{\pi}{L}$$

Uwzględniając warunek normalizacji:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = n^2 E_1$$

Stan $n = 4$:



Nieskończona studnia potencjału

Warunek zszycia $\psi(L) = 0$ daje:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

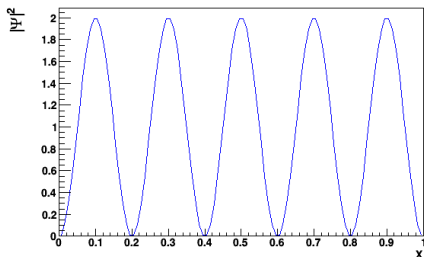
$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad k = n \cdot \frac{\pi}{L}$$

Uwzględniając warunek normalizacji:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = n^2 E_1$$

Stan $n = 5$:



Nieskończona studnia potencjału

Pełna postać funkcji falowej

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

Nieskończona studnia potencjału

Pełna postać funkcji falowej

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

Zasada nieoznaczoności

Znalezione stany stacjonarne są funkcjami własnymi energii.

Nie są to stany własne pędu! Stanowią superpozycję stanów $k_x = \pm k$.

⇒ nieoznaczoność pędu: $\Delta p_x = \hbar k = \frac{n\pi\hbar}{L}$

Jednocześnie nieoznaczoność położenia: $\Delta x = L$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x = n\pi\hbar > \frac{\hbar}{2}$$

Studnia potencjału

Nieskończona studnia potencjału

Pełna postać funkcji falowej

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

Zasada nieoznaczoności

Znalezione stany stacjonarne są funkcjami własnymi energii.

Nie są to stany własne pędu! Stanowią superpozycję stanów $k_x = \pm k$.

⇒ nieoznaczoność pędu: $\Delta p_x = \hbar k = \frac{n\pi\hbar}{L}$

Jednocześnie nieoznaczoność położenia: $\Delta x = L$

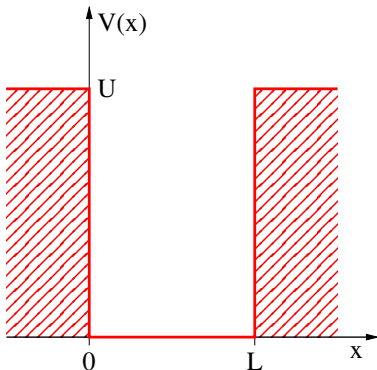
$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x = n\pi\hbar > \frac{\hbar}{2}$$

Z zasady nieoznaczoności wynika, że im węższa jest studnia (mniejsze L) tym większe jest rozmycie pędowe, a więc i energia stanu podstawowego:

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m} \frac{1}{L^2}$$

Skończona studnia potencjału

Wróćmy do modelu skończonej "bariery potencjału"



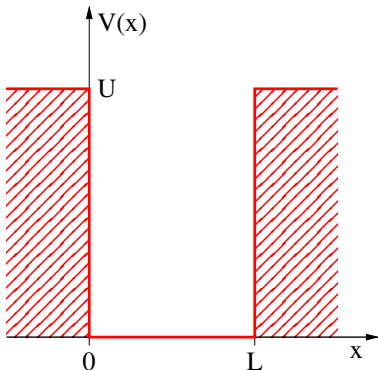
$$V(x) = \begin{cases} U & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < L \\ U & \text{dla } x > L \end{cases}$$

W obszarze $x < 0$ równanie Schrödingera:

$$(U - E) \psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

Skończona studnia potencjału

Wróćmy do modelu skończonej "bariery potencjału"



$$V(x) = \begin{cases} U & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < L \\ U & \text{dla } x > L \end{cases}$$

W obszarze $x < 0$ równanie Schrödingera:

$$(U - E) \psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

Co można przekształcić do:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = \frac{2m(U - E)}{\hbar^2} \psi(x) = \alpha^2 \psi(x)$$

Skończona studnia potencjału

Dla $x < 0$ i $x > L$ otrzymujemy równanie na $\psi(x)$ analogiczne do równanie oscylatora harmonicznego, ale ze **zmienionym znakiem** współczynnika!

⇒ ogólne rozwiązanie jest teraz postaci:

$$\psi(x) = A_1 e^{+\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}$$

Skończona studnia potencjału

Dla $x < 0$ i $x > L$ otrzymujemy równanie na $\psi(x)$ analogiczne do równanie oscylatora harmonicznego, ale ze **zmienionym znakiem** współczynnika!

⇒ ogólne rozwiązanie jest teraz postaci:

$$\psi(x) = A_1 e^{+\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}$$

Pierwszy człon jest rozbieżny dla $x \rightarrow +\infty$ zaś drugi dla $x \rightarrow -\infty$

Funkcja falowa powinna być unormowana, zatem jej postać powinna być:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{+\alpha x} & \text{dla } x < 0 \\ B \sin(kx) + C \cos(kx) & 0 < x < L \\ D e^{-\alpha x} & x > L \end{cases}$$

gdzie wykorzystaliśmy uzyskaną poprzednio postać ogólnego rozwiązania dla cząstki swobodnej w obszarze $0 < x < L$

Skończona studnia potencjału

Dla danej energii E rozważanego stanu stacjonarnego musimy znaleźć cztery współczynniki rozwiązania: A , B , C , D .

Jakie mamy ograniczenia?

Możemy narzucić (jak dla studni nieskończonej) warunki “zszycia” w $x = 0$ i $x = L$ dla funkcji falowej

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \psi_{II}(L) = \psi_{III}(L)$$

Skończona studnia potencjału

Dla danej energii E rozważanego stanu stacjonarnego musimy znaleźć cztery współczynniki rozwiązania: A , B , C , D .

Jakie mamy ograniczenia?

Możemy narzucić (jak dla studni nieskończonej) warunki “zszycia” w $x = 0$ i $x = L$ dla funkcji falowej oraz jej pochodnej

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \psi_{II}(L) = \psi_{III}(L)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad \psi'_{II}(L) = \psi'_{III}(L)$$

⇒ 4 warunki

Skończona studnia potencjału

Dla danej energii E rozważanego stanu stacjonarnego musimy znaleźć cztery współczynniki rozwiązania: A , B , C , D .

Jakie mamy ograniczenia?

Możemy narzucić (jak dla studni nieskończonej) warunki “zszycia” w $x = 0$ i $x = L$ dla funkcji falowej oraz jej pochodnej

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \psi_{II}(L) = \psi_{III}(L)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad \psi'_{II}(L) = \psi'_{III}(L)$$

⇒ 4 warunki

Ale mamy jeszcze warunek normalizacji!?

Skończona studnia potencjału

Dla danej energii E rozważanego stanu stacjonarnego musimy znaleźć cztery współczynniki rozwiązania: A , B , C , D .

Jakie mamy ograniczenia?

Możemy narzucić (jak dla studni nieskończonej) warunki “zszycia” w $x = 0$ i $x = L$ dla funkcji falowej oraz jej pochodnej

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \psi_{II}(L) = \psi_{III}(L)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad \psi'_{II}(L) = \psi'_{III}(L)$$

⇒ 4 warunki

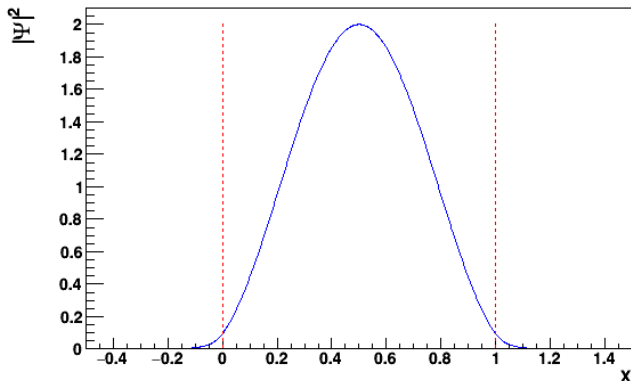
Ale mamy jeszcze warunek normalizacji!?

Tak jak w przypadku studni nieskończonej, możliwe są tylko stany o wybranych wartościach E (szczegóły na ćwiczeniach)

Skończona studnia potencjału

Przykładowe rozwiązania dla stanów stacjonarnych

Stan podstawowy ($n = 1$):

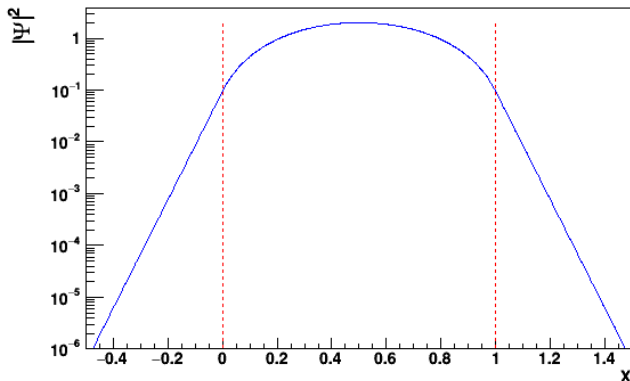


Cząstka może przebywać w obszarze klasycznie zabronionym.

Skończona studnia potencjału

Przykładowe rozwiązania dla stanów stacjonarnych

Stan podstawowy ($n = 1$): (skala logarytmiczna)



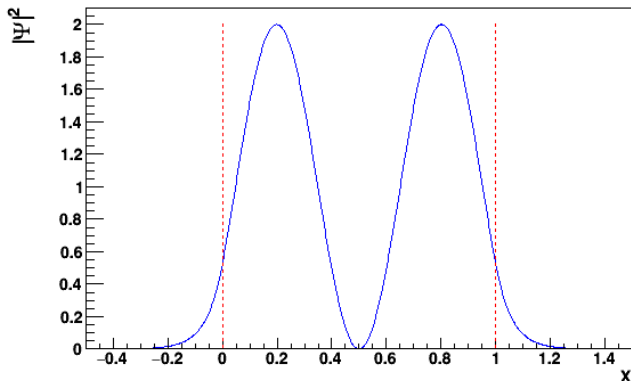
Cząstka może przebywać w obszarze klasycznie zabronionym.

Choć zdolność “penetracji” bariery szybko maleje z głębokością...

Skończona studnia potencjału

Przykładowe rozwiązania dla stanów stacjonarnych

Stan $n = 2$:



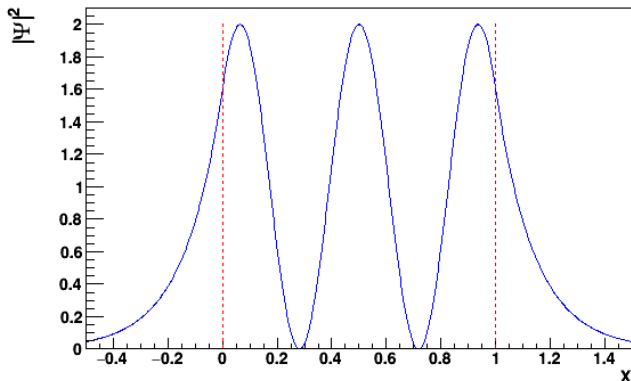
Cząstka może przebywać w obszarze klasycznie zabronionym.

Choć zdolność “penetracji” bariery szybko maleje z głębokością...

Skończona studnia potencjału

Przykładowe rozwiązania dla stanów stacjonarnych

Stan $n = 3$:



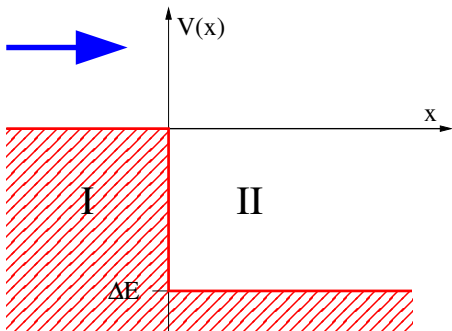
Cząstka może przebywać w obszarze klasycznie zabronionym.

Choć zdolność “penetracji” bariery szybko maleje z głębokością...

- 1 Operatory i równanie Schrödingera
- 2 Studnia potencjału
- 3 Stopień potencjału**
- 4 Efekt tunelowy

Stopień potencjału

Rozważmy cząstkę o ustalonej energii $E > 0$ poruszającą się swobodnie od $x = -\infty$, natrafiającą w $x = 0$ na skok potencjału $\Delta E < 0$

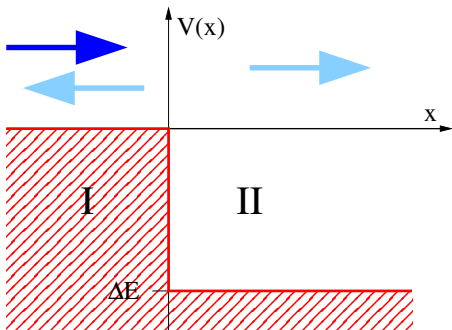


Co się stanie z tą cząstką?

Klasycznie zawsze przeleci przez uskok i zwiększy swoją prędkość

Stopień potencjału

Rozważmy cząstkę o ustalonej energii $E > 0$ poruszającą się swobodnie od $x = -\infty$, natrafiającą w $x = 0$ na skok potencjału $\Delta E < 0$



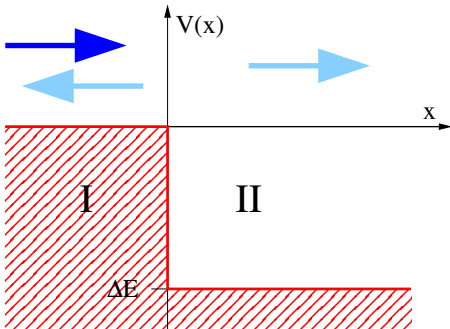
Co się stanie z tą cząstką?

Klasycznie zawsze przeleci przez uskok i zwiększy swoją prędkość

Kwantowa natura cząstki powoduje jednak, że może ona przez barierę przelecieć, ale może się też odbić!...

Stopień potencjału

Rozważmy cząstkę o ustalonej energii $E > 0$ poruszającą się swobodnie od $x = -\infty$, natrafiającą w $x = 0$ na skok potencjału $\Delta E < 0$



Co się stanie z tą cząstką?

Klasycznie zawsze przeleci przez uskok i zwiększy swoją prędkość

Kwantowa natura cząstki powoduje jednak, że może ona przez barierę przelecieć, ale może się też odbić!...

Nie jesteśmy w stanie przewidzieć co się stanie z cząstką.
Dowiemy się dopiero gdy przeprowadzimy pomiar...

Możemy tylko wyznaczyć prawdopodobieństwa przejścia i odbicia.



Ogólne rozwiązanie

Szukamy rozwiązania w ogólnej postaci postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{dla } x < 0 \\ Ce^{iqx} + De^{-iqx} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

gdzie: $k\hbar = \sqrt{2mE}$ i $q\hbar = \sqrt{2m(E - \Delta E)}$ - pęd cząstki przed i za progiem

Możemy narzucić warunki zszycia w $x = 0$:

$$\begin{aligned} \psi(x) : & \quad A + B = C + D \\ \psi'(x) : & \quad ikA - ikB = iqC - iqD \end{aligned}$$

Ogólne rozwiązanie

Szukamy rozwiązania w ogólnej postaci postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{dla } x < 0 \\ Ce^{iqx} + De^{-iqx} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

gdzie: $k\hbar = \sqrt{2mE}$ i $q\hbar = \sqrt{2m(E - \Delta E)}$ - pęd cząstki przed i za progiem

Możemy narzucić warunki zszycia w $x = 0$:

$$\begin{aligned} \psi(x) : & \quad A + B = C + D \\ \psi'(x) : & \quad ikA - ikB = iqC - iqD \end{aligned}$$

Funkcja harmoniczna nie jest unormowana, możemy przyjąć $A = 1$.

Wciąż brakuje nam jednego warunku?

Ogólne rozwiązanie

Szukamy rozwiązania w ogólnej postaci postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{dla } x < 0 \\ Ce^{iqx} + De^{-iqx} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

gdzie: $k\hbar = \sqrt{2mE}$ i $q\hbar = \sqrt{2m(E - \Delta E)}$ - pęd cząstki przed i za progiem

Możemy narzucić warunki zszycia w $x = 0$:

$$\begin{aligned} \psi(x) : & \quad A + B = C + D \\ \psi'(x) : & \quad ikA - ikB = iqC - iqD \end{aligned}$$

Funkcja harmoniczna nie jest unormowana, możemy przyjąć $A = 1$.

Wciąż brakuje nam jednego warunku?

Nie powinniśmy obserwować cząstek nadlatujących z $x = +\infty \Rightarrow D = 0$

Rozwiązanie

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = iqC \end{cases}$$

Podstawiając C z pierwszego równania do drugiego i kładąc $A = 1$:

$$B = \frac{k - q}{k + q} \quad C = \frac{2k}{k + q}$$

Stopień potencjału

Rozwiązanie

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = iqC \end{cases}$$

Podstawiając C z pierwszego równania do drugiego i kładąc $A = 1$:

$$B = \frac{k - q}{k + q} \quad C = \frac{2k}{k + q}$$

Możemy policzyć współczynnik odbicia cząstki jako stosunek natężenia fali padającej i odbitej:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k - q)^2}{(k + q)^2}$$

Jeśli tylko $\Delta E \neq 0$, zawsze istnieje szansa, że cząstka się odbije od progu
 \Rightarrow efekt czysto kwantowy

Ale znany też np. dla światła, które odbija się na granicy ośrodków...

Współczynnik transmisji

Czy możemy podobnie policzyć współczynnik transmisji ?

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k^2}{(k+q)^2}$$

Współczynnik transmisji

Czy możemy podobnie policzyć współczynnik transmisji ? **NIE !**

$$T \neq \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k^2}{(k+q)^2}$$

Musimy uwzględnić fakt, że cząstki szybciej poruszają się za progiem!

Współczynnik transmisji

Czy możemy podobnie policzyć współczynnik transmisji ? **NIE !**

$$T \neq \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k^2}{(k+q)^2}$$

Musimy uwzględnić fakt, że cząstki szybciej poruszają się za progiem!

Strumień cząstek proporcjonalny jest do $|\psi|^2 \cdot v$

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} \frac{v_{II}}{v_I} = \frac{|C|^2}{|A|^2} \frac{q}{k} = \frac{4kq}{(k+q)^2}$$

Współczynnik transmisji

Czy możemy podobnie policzyć współczynnik transmisji ? **NIE !**

$$T \neq \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k^2}{(k+q)^2}$$

Musimy uwzględnić fakt, że cząstki szybciej poruszają się za progiem!

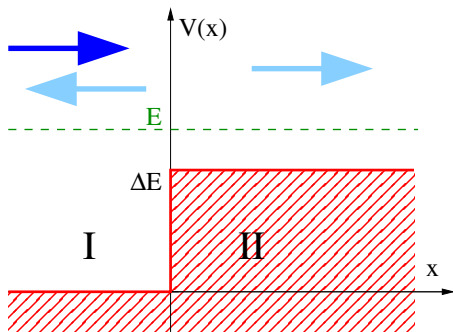
Strumień cząstek proporcjonalny jest do $|\psi|^2 \cdot v$

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} \frac{v_{II}}{v_I} = \frac{|C|^2}{|A|^2} \frac{q}{k} = \frac{4kq}{(k+q)^2}$$

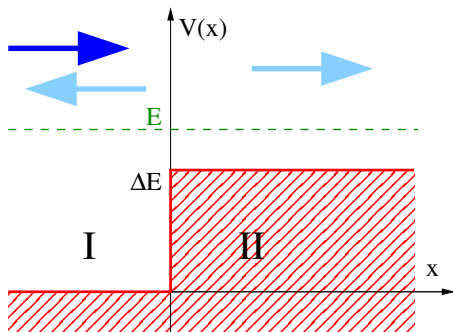
Tylko przy takiej definicji dostajemy: **zasada zachowania liczby cząstek**

$$R + T = \frac{(k-q)^2}{(k+q)^2} + \frac{4kq}{(k+q)^2} = 1$$

Jak trzeba zmodyfikować uzyskane rozwiązanie dla $\Delta E > 0$?



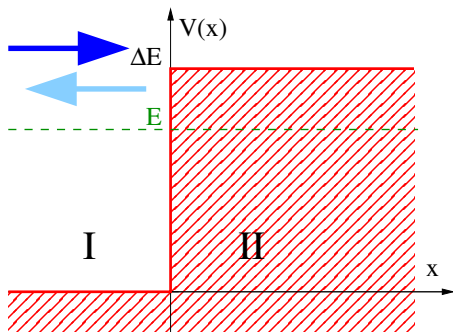
Jak trzeba zmodyfikować uzyskane rozwiązanie dla $\Delta E > 0$?



Jeśli energia cząstki jest wyższa od progu, $0 < \Delta E < E$, znalezione rozwiązanie pozostaje słuszne:

$$R = \frac{(k - q)^2}{(k + q)^2}$$

Jak trzeba zmodyfikować uzyskane rozwiązanie dla $\Delta E > 0$?



Jeśli energia cząstki jest wyższa od progu, $0 < \Delta E < E$, znalezione rozwiązanie pozostaje słuszne:

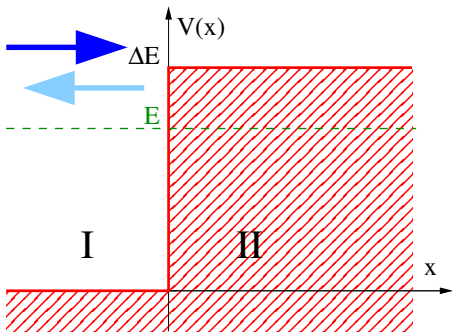
$$R = \frac{(k - q)^2}{(k + q)^2}$$

Ale jeśli wysokość progu przewyższa energię, $\Delta E > E$, cząstka zawsze odbije się od bariery!

$$R = 1$$

Stopień potencjału

Jak trzeba zmodyfikować uzyskane rozwiązanie dla $\Delta E > 0$?



Jeśli energia cząstki jest wyższa od progu, $0 < \Delta E < E$, znalezione rozwiązanie pozostaje słuszne:

$$R = \frac{(k - q)^2}{(k + q)^2}$$

Ale jeśli wysokość progu przewyższa energię, $\Delta E > E$, cząstka zawsze odbije się od bariery!

$$R = 1$$

Choć wciąż cząstka może wniknąć w próg na skończoną głębokość, podobnie jak w przypadku skończonej studni potencjału...

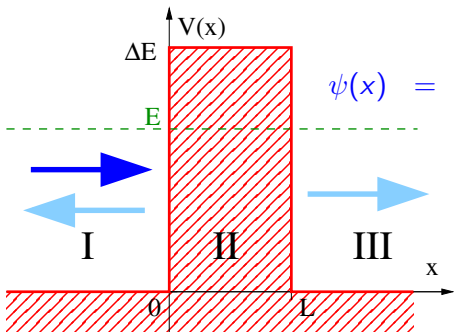
- 1 Operatory i równanie Schrödingera
- 2 Studnia potencjału
- 3 Stopień potencjału
- 4 Efekt tunelowy

Efekt tunelowy

Cienka bariera potencjału

Skoro cząstka wnika w głąb bariery potencjału, bariera ta musi być odpowiednio gruba, żeby cząstkę “zatrzymać” ($T = 0$)

W przeciwnym wypadku możemy mieć do czynienia z “tunelowaniem”



$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{dla } x < 0 \\ Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} & 0 < x < L \\ Ee^{ikx} & x > L \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo przeniknięcia zależy od **grubości bariery** L oraz **wysokości bariery** w stosunku do energii cząstki ($\Delta E/E$).

Mikroskop tunelowy

Efekty tunelowania obserwujemy na odległościach atomowych.

Dla elektronu o energii $E = 2$ eV napotykającego barierę o wysokości $\Delta E = 5$ eV i szerokości $L = 1$ nm prawdopodobieństwo przeniknięcia przez barierę wynosi $T \approx 10^{-7}$.

Mikroskop tunelowy

Efekty tunelowania obserwujemy na odległościach atomowych.

Dla elektronu o energii $E = 2$ eV napotykającego barierę o wysokości $\Delta E = 5$ eV i szerokości $L = 1$ nm prawdopodobieństwo przeniknięcia przez barierę wynosi $T \approx 10^{-7}$.

Zależność od szerokości L jest wykładnicza: $L = 0.5$ nm $\Rightarrow T \approx 5 \cdot 10^{-4}$

Mikroskop tunelowy

Efekty tunelowania obserwujemy na odległościach atomowych.

Dla elektronu o energii $E = 2$ eV napotykającego barierę o wysokości $\Delta E = 5$ eV i szerokości $L = 1$ nm prawdopodobieństwo przeniknięcia przez barierę wynosi $T \approx 10^{-7}$.

Zależność od szerokości L jest wykładnicza: $L = 0.5$ nm $\Rightarrow T \approx 5 \cdot 10^{-4}$

Odpowiednie prądy można mierzyć odpowiednio czułymi przyrządami. Dzięki temu jesteśmy w stanie (pośrednio) mierzyć odległość między dwoma przewodzącymi elementami (barierą jest praca wyjścia)

Mikroskop tunelowy

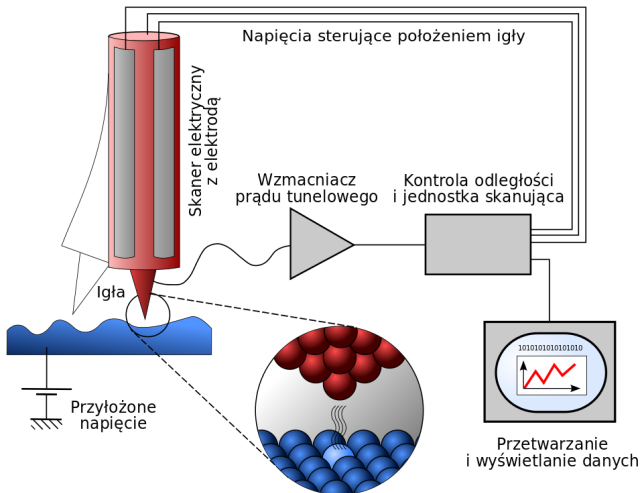
Efekty tunelowania obserwujemy na odległościach atomowych.

Dla elektronu o energii $E = 2$ eV napotykającego barierę o wysokości $\Delta E = 5$ eV i szerokości $L = 1$ nm prawdopodobieństwo przeniknięcia przez barierę wynosi $T \approx 10^{-7}$.

Zależność od szerokości L jest wykładnicza: $L = 0.5$ nm $\Rightarrow T \approx 5 \cdot 10^{-4}$

Odpowiednie prądy można mierzyć odpowiednio czułymi przyrządami. Dzięki temu jesteśmy w stanie (pośrednio) mierzyć odległość między dwoma przewodzącymi elementami (barierą jest praca wyjścia)

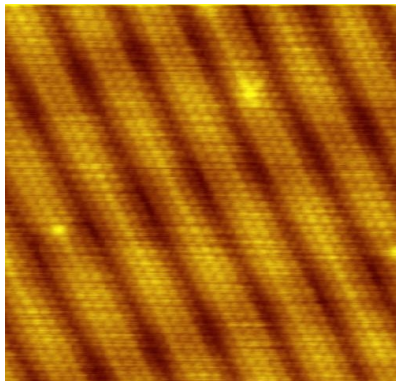
W Skaningowym Mikroskopie Tunelującym jednym z tych elementów jest igła przewodząca o średnicy ostrza rzędu 1 nm, drugim badana próbka.



Przesuwamy igłę i regulujemy jej wysokość tak, żeby prąd był stały
⇒ ruch igły obrazuje kształt badanej powierzchni

Skaningowy Mikroskop Tunelujący

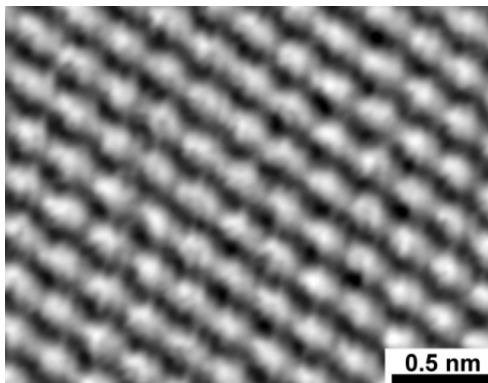
Został skonstruowany przez Gerda Binniga oraz Heinricha Rohrera w 1981
Wynalazek ten został szybko doceniony \Rightarrow Nagroda Nobla 1986



Powierzchnia złota

Skaningowy Mikroskop Tunelujący

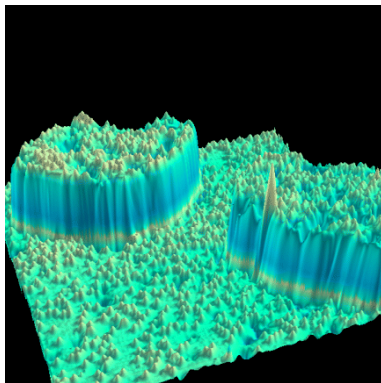
Został skonstruowany przez Gerda Binniga oraz Heinricha Rohrera w 1981
Wynalazek ten został szybko doceniony \Rightarrow Nagroda Nobla 1986



Powierzchnia grafitu

Skaningowy Mikroskop Tunelujący

Został skonstruowany przez Gerda Binniga oraz Heinricha Rohrera w 1981
Wynalazek ten został szybko doceniony \Rightarrow Nagroda Nobla 1986



Zanieczyszczenia (atomy chromu) na powierzchni żelaza