

Zadania na ćwiczenia VI

Zadanie 1

Przyjmij związek dyspersyjny w postaci $\omega(k) = vk$ i utwórz, superponując fale płaskie $e^{i(kx-\omega t)}$, paczkę falową

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

o profilu

$$\Phi(k) = \begin{cases} 0, & k \leq k_0 - \Delta k, \\ \psi_0, & k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k, \\ 0 & k \geq k_0 + \Delta k, \end{cases}$$

gdzie ψ_0 jest zadaną (być może zespoloną) stałą. Przedyskutuj ruch tej paczki.

Wskazówka

Zapisz związek dyspersyjny w formie

$$\omega(k) = vk = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) = \omega_0 + v(k - k_0),$$

Zadanie 2

Dla nierelatywistycznej cząstki swobodnej związek dyspersyjny jest postaci $\omega(k) = \alpha k^2$, gdzie $\alpha > 0$ to zadaną stałą. Superponując fale płaskie $e^{i(kx-\omega t)}$ utwórz paczkę falową

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

o gausowskim profilu danym przez

$$\Phi(k) = \frac{\psi_0}{\sqrt{\sqrt{2\pi} \sigma_k}} \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{4\sigma_k^2}\right), \quad -\infty < k < \infty,$$

gdzie k_0 jest zadaną stałą rzeczywistą, zaś ψ_0 jest zadaną (być może zespoloną) liczbą.

- Wyznacz postać paczki falowej dla $t = 0$.
- Przedyskutuj ruch tej paczki i zmianę rozkładu przestrzennego w czasie.

Porównaj (posiłkując się wynikiem poprzedniego zadania) z przypadkiem, gdy związek dyspersyjny ma postać $\omega = vk$. Wyznacz iloczyn nieoznaczoności położenia i liczby falowej.

Wskazówka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ika-bk^2} dk = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{a^2}{4b}\right), \quad \text{jeśli } \Re(b) > 0.$$

Przyjmij, że

$$\omega = \alpha k^2 \equiv \omega_0 + v(k - k_0) + \frac{\Omega}{4\sigma^2}(k - k_0)^2, \quad v = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = 2\alpha k_0, \quad \frac{\Omega}{4\sigma^2} = \alpha.$$

Zadanie 3

Przyjmując, że nieoznaczoność położenia elektronu w atomie wodoru odpowiada promieniowi pierwszej orbity Bohra, $a_0 = 0.529 \text{ \AA}$, oszacuj w oparciu o zasadę nieoznaczoności energię tego elektronu.

Wskazówka: zastosuj nierelatywistyczny wzór na energię kinetyczną