Podstawy fizyki kwantowej i budowy materii 2017/2018

Zadania na ćwiczenia VII

Zadanie 1
Określ, które z następujących funkcji falowych są funkcjami własnymi składowej $\hat{p}_x$ operatora pędu i znajdź ich wartości własne:

a) $A \sin kx$,

b) $A \cos kx$,

c) $A \cos kx + A \sin kx$,

d) $A \cos kx + iA \sin kx$,

e) $A \exp(ik(x-a))$,

f) $A \exp(ikx) + A \exp(-ikx)$,

g) $A \exp(ikx) + iA \exp(-ikx)$,

Zadanie 2
Stan stacjonarny cząstki poddanej działaniu pewnego pola sił opisany jest unormowaną funkcją falową

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\,\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2} + ikx\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0, \quad k > 0,$$

przy czym wartości parametrów σ oraz k są znane. Wyznacz wartości oczekiwane operatora pędu oraz energii kinetycznej w tym stanie. Podaj interpretacje parametru k.
Wskazówka

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2.$$

Zadanie 3
Funkcja falowa cząstki o masie m poruszającej się w pewnym jednowymiarowym polu siły ma postać

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax \exp(-\alpha x + i\beta t), & x \geq 0, \end{cases} \qquad \beta = \frac{\hbar\alpha^2}{2m}, \quad \alpha > 0,$$

gdzie A jest stałą, niezależną od argumentu x, zaś α to pewna zadana rzeczywista stała.

a) Jaki jest wymiar funkcji falowej?

b) Wyznacz wartość stałej A.

c) Naszkicuj kształt gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie x.

d) Jakie wartości energii cząstki można otrzymać w wyniki pomiaru?

e) Wyznacz postać energii potencjalnej pola sił.

f) Czy cząstka ta jest związana czy też niezwiązana? Odpowiedź uzasadnij.

g) Ile wynosi prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze niedostępnym na gruncie fizyki klasycznej?

Wskazówka

$$\int_0^\infty x^n \exp(-\gamma x)\, dx = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}, \quad \int_0^\infty x \exp(-(ik+\gamma)x)\, dx = \frac{1}{(\gamma+ik)^2}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int x^2 e^{-\gamma x} dx = -\frac{1}{\gamma^3}(\gamma^2 x^2 + 2\gamma x + 2) \exp(-\gamma x).$$