

Zadania na ćwiczenia XI

Zadanie 1

Jeden ze stanów wzbudzonych atomu wodoru opisany jest funkcja falową

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A r \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \cos \theta, \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

Wyznacz wartości liczb kwantowych n , l oraz m tego stanu.

Wskazówka: operator orbitalnego momentu pędu

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Równanie Schrödingera dla części radialnej $R(r)$ funkcji falowej

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) + V(r) R(r) = E R(r)$$

Energię stanu można wyrazić jako

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \frac{1}{n^2}$$

Zadanie 2

Atom wodoru znajduje się w stanie opisanym liczbami kwantowymi $n = 2$, $l = 1$ i $m = 0$. Jaka jest oczekiwana wartość orbitalnego momentu pędu i rzutu momentu pędu elektronu na oś Z? Jakie są w tym stanie możliwe wartości rzutu momentu pędu na oś X?

Wskazówka: zapisz rozkład kątowy funkcji falowej we współrzędnych kartezjańskich, a następnie dokonaj odpowiedniej zamiany zmiennych.

Rozkłady kątowe funkcji falowej ψ_{nlm} w stanach $n = 2$, $l = 1$ są postaci:

$$\begin{aligned} \psi_{210}(r, \theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \cdot R_{21}(r) \\ \psi_{21-1}(r, \theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{+i\phi} \cdot R_{21}(r) \\ \psi_{21+1}(r, \theta, \phi) &= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \cdot R_{21}(r) \end{aligned}$$

Zadanie 3

Pozytronium, to analog atomu wodoru, w którym związana jest para elektron-pozytron. Wyznacz promień takiego układu i jego energię wiązania. Wyznacz też promień i energię wiązania układu proton-mion, jeżeli $m_\mu = 0,113m_p$.

Wskazówka: wykorzystaj pojęcie masy zredukowanej układu.