

# Podstawy fizyki kwantowej i budowy materii

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki

Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych  
Instytut Fizyki Doświadczalnej



Wykład 2  
9 października 2017

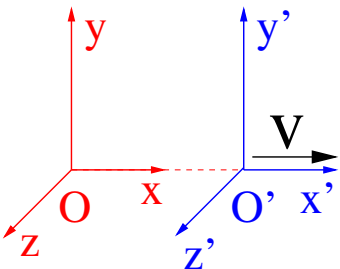
- 1 Dynamika relatywistyczna
- 2 Budowa materii
- 3 Natura światła
- 4 Pozytonowa tomografia emisyjna

# Transformacja Lorentza

Z postulatów Einsteina (1905):

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (zasada względności)
- prędkość światła w próżni,  $c$ , jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia (uniwersalność prędkości światła)

Wynika transformacja współrzędnych zdarzeń:



$$\left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma ct' + \gamma \beta x' \\ x = \gamma \beta ct' + \gamma x' \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Zagadnienia ruchu ciał w mechanice **nierelatywistycznej** (Newtona/Galileusza) często rozwiązujemy w oparciu o **zasady zachowania**.

Dla układu izolowanego i ruchu pod wpływem sił zachowawczych (np. sił grawitacji lub sprężystości):

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$E = E_p + E_k = E_p + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \text{const}$$

$$\vec{E}_{k,i} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Czy podejścia te można też wykorzystać w przypadku relatywistycznym?

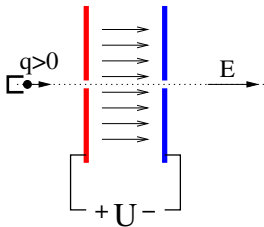
**TAK!** Ale musimy uogólnić pojęcia pędu i energii!

- 1 Dynamika relatywistyczna
- 2 Budowa materii
- 3 Natura światła
- 4 Pozytonowa tomografia emisyjna

# Relatywistyczna definicja pędu

## Granice podejścia klasycznego

Elektron w kondensatorze  
(najprostszy 'akcelerator' cząstek):



Klasycznie:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{wyp} = q\vec{E}$$

Potrafimy wytwarzać pola elektryczne

$$E \sim 10 \text{ MV/m} = 10^7 \text{ V/m}$$

Dla elektronu:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$|q_e| \equiv 1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow a \approx 20 \text{ m}^{-1} \cdot c^2 \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ m/s}^2$$

W **podejściu klasycznym** elektron powinien osiągnąć **prędkość światła** już po przebyciu  $\Delta x \approx 2.5 \text{ cm}$  !!!

$\Rightarrow$  konieczność modyfikacji definicji pędu

# Relatywistyczna definicja pędu

Jeśli chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

musimy zmienić definicję pędu...

# Relatywistyczna definicja pędu

Jeśli chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

musimy zmienić definicję pędu...

Wychodząc z bardzo ogólnych założeń (symetria + zasada względności) można pokazać, że poprawnym uogólnieniem definicji pędu jest

$$\vec{p} = m \gamma \vec{v} = m c \gamma \vec{\beta}$$

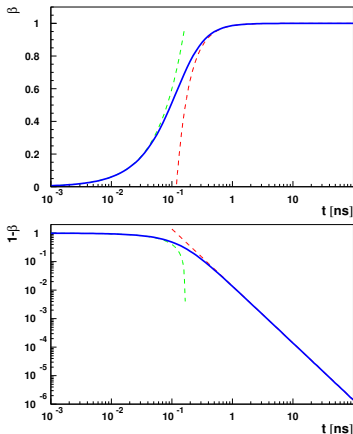
Dla małych prędkości ( $v \ll c$ )  $\Rightarrow$  definicja klasyczna ( $\gamma \approx 1$ )

Dla dużych prędkości ( $v \rightarrow c$ )  $\Rightarrow$  pęd rośnie w nieskończoność  
 nawet gdy prędkość jest już praktycznie stała



# Relatywistyczna definicja pędu

## Przykład



Rozwiązanie dla ruchu w stałym polu  $\vec{E}$ :

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

gdzie:  $\alpha = \frac{qE}{mc}$

W naszym przykładzie ( $e^-$  w polu  $10 \frac{MV}{m}$ ):

$$\alpha \sim 6 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha^{-1} \sim 0.17 \text{ ns}$$

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$1 - \beta(t) \approx \frac{1}{2\alpha^2 t^2}$$

nigdy nie osiągniemy  $\beta = 1$

Ale:  $p(t) = mc \alpha \cdot t$  – rośnie  $\sim t$  !

# Relatywistyczna definicja pędu

## Przykład

Rozwiązanie dla ruchu w stałym polu  $\vec{E}$ :  
Zależność drogi od czasu:

$$\Rightarrow x(t) = \frac{c}{\alpha} \left( \sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

W granicy  $\alpha t \ll 1$ :

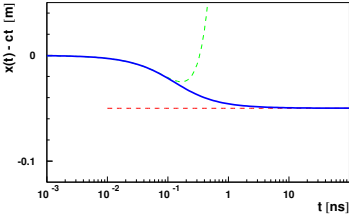
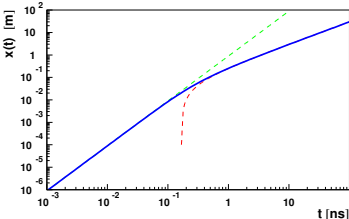
$$x(t) \approx \frac{c\alpha t^2}{2}$$

klasyczny ruch jednostajnie przyspieszony

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$x(t) \approx ct - \frac{c}{\alpha}$$

światło wyprzedzi elektron tylko o 5 cm !!!



# Relatywistyczna definicja energii

Dla ruchu ciała pod wpływem zewnętrznej siły uzyskana **energia kinetyczna** powinna być równa **pracy** wykonanej przez siłę.

Można pokazać, że prowadzi to do wzoru na energie kinetyczną:

$$E_k = m c^2 (\gamma - 1)$$

# Relatywistyczna definicja energii

Dla ruchu ciała pod wpływem zewnętrznej siły uzyskana **energia kinetyczna** powinna być równa **pracy** wykonanej przez siłę.

Można pokazać, że prowadzi to do wzoru na energie kinetyczną:

$$E_k = m c^2 (\gamma - 1)$$

**ale energia kinetyczna NIE JEST ZACHOWANA !**

# Relatywistyczna definicja energii

Dla ruchu ciała pod wpływem zewnętrznej siły uzyskana **energia kinetyczna** powinna być równa **pracy** wykonanej przez siłę.

Można pokazać, że prowadzi to do wzoru na energie kinetyczną:

$$E_k = m c^2 (\gamma - 1)$$

**ale energia kinetyczna NIE JEST ZACHOWANA !**

Musimy wprowadzić dodatkowy wkład: **energię spoczynkową**

$$E_o = m c^2$$

Zachowana w procesach relatywistycznych jest **TYLKO energia całkowita**

$$E = E_o + E_k = m c^2 \gamma$$

Wychodząc z transformacji Lorentza oraz bardzo ogólnych zasad (zasada bezwładności + zasada względności), i symetrii czasoprzestrzeni można dojść do:

Energia całkowita ciała:

$$E = \gamma \cdot m c^2$$

pęd ciała:

$$\vec{p} = \gamma \cdot m \vec{v}$$

$$c \vec{p} = \vec{\beta} E$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i m_i c^2 = const$$

zasada zachowania energii

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i \vec{V}_i = const$$

zasada zachowania pędu

Zasady te są fundamentalne,  
obowiązują we wszystkich procesach !!!

Zasada zachowania energii ma jednak swoją “cenę”  
Zderzenie całkowicie nieelastyczne dwóch ciał:



Z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned} E_c &= E_1 + E_2 \\ M c^2 &= \gamma m c^2 + \gamma m c^2 \\ M &= 2 \gamma m \end{aligned}$$

Masa “zlepka” jest większa niż suma mas cząstek!  $M > m + m$

W świecie relatywistycznym przestaje obowiązywać zachowanie masy!!!

Energia kinetyczna zderzających się cząstek została zamieniona na energię wewnętrzną, co jest równoważne ze wzrostem masy (energii spoczynkowej).

Energia spoczynkowa cząstki:

$$E_0 = m c^2$$

Energia całkowita:

$$E = E_0 + E_k = m c^2 \cdot \gamma$$

Wyrażenie na pęd:

$$p = m c \cdot \beta \gamma$$

W układzie własnym cząstki:

$$p_0 = 0$$

Możemy zauważyć, że:

$$E = \gamma E_0$$

$$p c = \beta \gamma E_0$$

Jeśli cząstka porusza się wzdłuż osi  $X$ :

$$E = \gamma E_0$$

$$c p_x = \beta \gamma E_0$$

$$c p_y = 0$$

$$c p_z = 0$$

Definicja układu środka masy



Okazuje się, że energia i pęd podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji Lorentza identycznej z transformacją czasu i położenia:

$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E' + \gamma \beta c p'_x \\ \gamma \beta E' + \gamma c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E' \\ c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix}$$

gdzie dla układu własnego cząstki:  $E' = E_0$  i  $\vec{p}' \equiv 0$ .

Ale transformacja jest całkowicie ogólna !

Można ją stosować do pojedynczych ciał jak i dowolnych układów.

Okazuje się, że **energia i pęd** podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji **Lorenza** identycznej z transformacją **czasu i położenia**:

$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E' + \gamma \beta c p'_x \\ \gamma \beta E' + \gamma c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E' \\ c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix}$$

gdzie dla układu własnego cząstki:  $E' = E_0$  i  $\vec{p}' \equiv 0$ .

Ale transformacja jest całkowicie ogólna !

Można ją stosować do pojedynczych ciał jak i dowolnych układów.

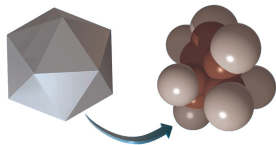
Niezmiennikiem transformacji Lorenza dla dowolnego układu fizycznego jest tzw. **masa niezmiennicza**,  $M$ :

$$M^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2$$

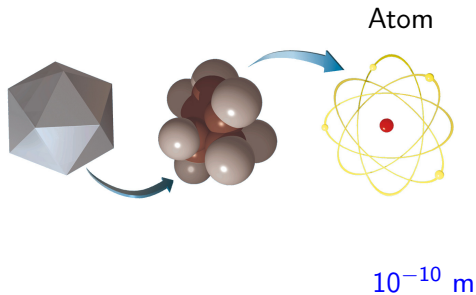
dla pojedynczej cząstki  $M \equiv m$

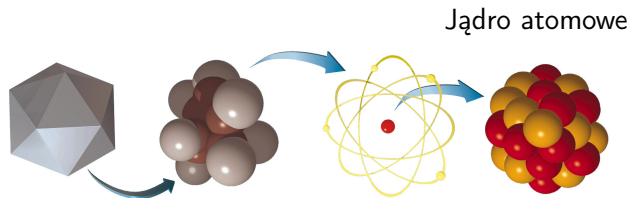
- 1 Dynamika relatywistyczna
- 2 Budowa materii**
- 3 Natura światła
- 4 Pozytonowa tomografia emisyjna

Cząsteczka

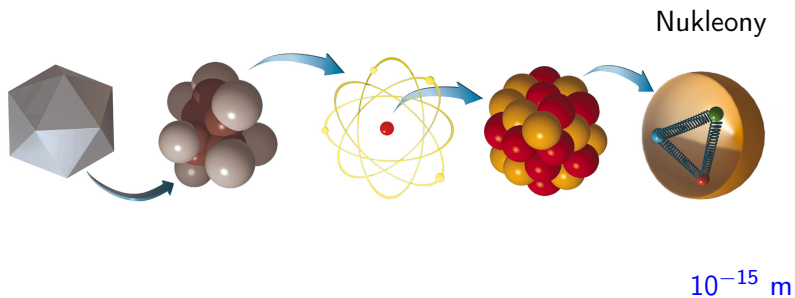


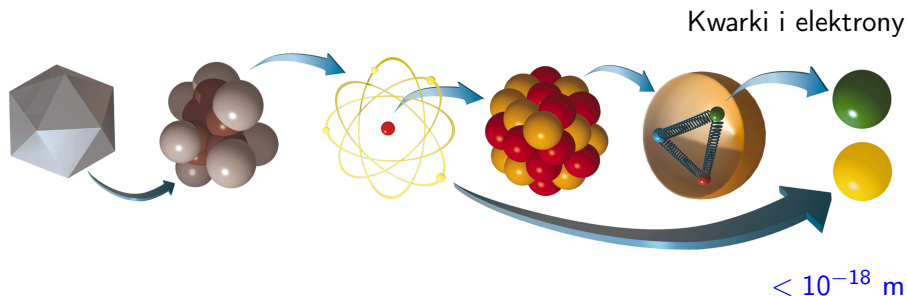
$10^{-9}$  m





$10^{-14}$  m





Obecnie za najbardziej fundamentalne, niepodzielne składniki materii uważamy **kwarki** i **leptony**.

Proton i neutron składają się z kwarków  $u$  i  $d$ :

$$p = (uud) \quad n = (udd)$$



## Fermiony

Świat “codzienny”: 3 “cegietki” (elektron oraz kwarki  $u$  i  $d$ )

	leptony	kwarki	
	$e$ <i>elektron</i>	$d$ <i>down</i>	$u$ <i>up</i>
ładunek [e]	$-1$	$-1/3$	$+2/3$

## Fermiony

Świat “codzienny”: 3 “cegietki” (elektron oraz kwarki  $u$  i  $d$ ) + *neutrino*

	leptony		kwarki	
	$e$ <i>elektron</i>	$\nu_e$ <i>neutrino el.</i>	$d$ <i>down</i>	$u$ <i>up</i>
ładunek [e]	-1	0	-1/3	+2/3

## Fermiony

Świat “codzienny”: 3 “cegietki” (elektron oraz kwarki  $u$  i  $d$ ) + *neutrino*

Fizyka cząstek  $\Rightarrow$  12 fundamentalnych “cegietek” materii, fermionów

	leptony		kwarki	
pokolenie 1	$e$ <i>elektron</i>	$\nu_e$ <i>neutrino el.</i>	$d$ <i>down</i>	$u$ <i>up</i>
pokolenie 2	$\mu$ <i>mion</i>	$\nu_\mu$ <i>neutrino mionowe</i>	$s$ <i>strange</i>	$c$ <i>charm</i>
pokolenie 3	$\tau$ <i>taon</i>	$\nu_\tau$ <i>neutrino taonowe</i>	$b$ <i>beauty</i> <i>(bottom)</i>	$t$ <i>top</i> <i>(truth)</i>
ładunek [e]	-1	0	-1/3	+2/3

## Fermiony

Świat “codzienny”: 3 “cegietki” (elektron oraz kwarki  $u$  i  $d$ ) + *neutrino*

Fizyka cząstek  $\Rightarrow$  12 fundamentalnych “cegietek” materii, fermionów

	leptony		kwarki	
pokolenie 1	$e$ <i>elektron</i>	$\nu_e$ <i>neutrino el.</i>	$d$ <i>down</i>	$u$ <i>up</i>
pokolenie 2	$\mu$ <i>mion</i>	$\nu_\mu$ <i>neutrino mionowe</i>	$s$ <i>strange</i>	$c$ <i>charm</i>
pokolenie 3	$\tau$ <i>taon</i>	$\nu_\tau$ <i>neutrino taonowe</i>	$b$ <i>beauty</i> <i>(bottom)</i>	$t$ <i>top</i> <i>(truth)</i>
ładunek [e]	-1	0	-1/3	+2/3

+ **anty-fermiony** (kolejnych 12)

## Bozony

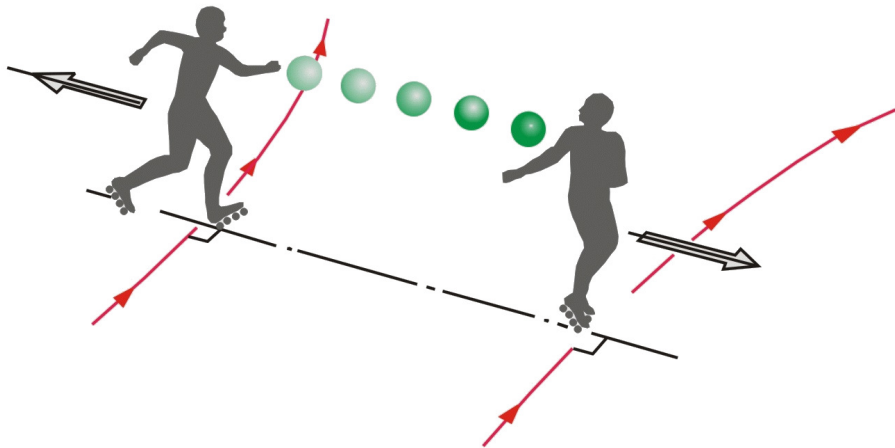
“Cegielki” oddziałują ze sobą poprzez wymianę **nośników oddziaływań**  
 Nośnik przekazuje część energii i/lub pędu jednej cząstki drugiej cząstce

<i>oddziaływanie</i>	<i>źródło</i>	<i>nośnik</i>		<i>moc</i>
grawitacyjne	masa	grawiton	G	$10^{-39}$
elektromagnetyczne	ładunek	foton	$\gamma$	$10^{-2}$
silne	“kolor”	gluony	g	1
słabe	“ładunek słaby”	“bozony pośredniczące”	$W^{\pm}, Z^0$	$10^{-7}$

“moc” - przykładowe porównanie wielkości oddziaływań dla dwóch sąsiadujących protonów

## Bozony

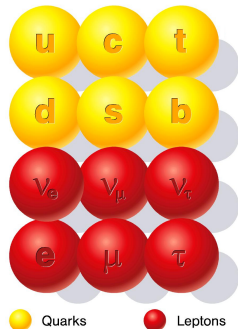
Klasyczny obraz opisu oddziaływania poprzez wymianę cząstek-nośników



## Podsumowanie

Cząstki, które obecnie uważamy za **fundamentalne**  
w ramach tzw. **Modelu Standardowego fizyki cząstek**

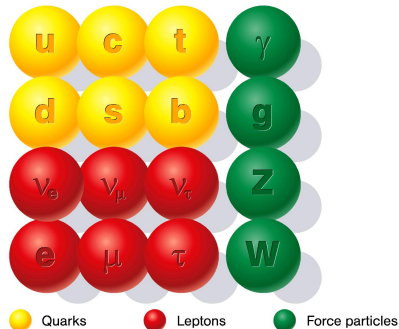
- cząstki materii  
    kwarki i leptony



## Podsumowanie

Cząstki, które obecnie uważamy za **fundamentalne**  
w ramach tzw. **Modelu Standardowego fizyki cząstek**

- cząstki materii  
    **kwarki i leptony**
- nośniki oddziaływań  
     $\gamma$ ,  $g$ ,  $W^\pm$  i  $Z^0$



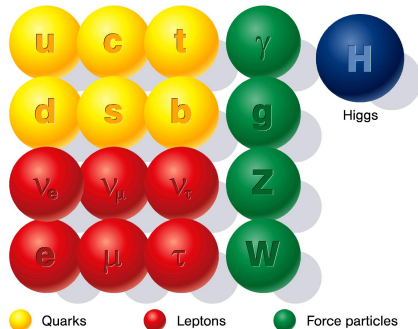


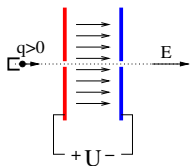
## Podsumowanie

Cząstki, które obecnie uważamy za **fundamentalne**  
w ramach tzw. **Modelu Standardowego fizyki cząstek**

- cząstki materii  
    kwarki i leptony
- nośniki oddziaływań  
     $\gamma$ ,  $g$ ,  $W^\pm$  i  $Z^0$
- bozon Higgsa  
    konieczny dla  
    spójności modelu

“Nadaje masy”  
wszystkim cząstkom





Naturalną jednostką energii w fizyce mikroświata jest **1 elektronowolt (1 eV)** - energia jaką zyskuje cząstka o ładunku **1 e** (ładunek elementarny) przy przejściu różnicy potencjału **1 V**.

$$1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} C \Rightarrow 1 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

$$\Delta E = U \cdot q$$

Jednostki pochodne:

$$1 keV = 10^3 eV, 1 MeV = 10^6 eV, 1 GeV = 10^9 eV.$$

Jednostkę energii możemy też przyjąć za jednostkę masy ( $E = mc^2$ )

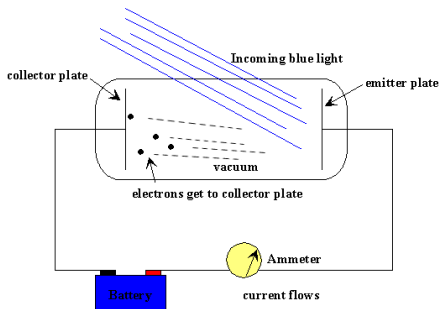
$$1 eV/c^2 = 1.8 \cdot 10^{-36} kg$$

elektron	e	511 keV/c <sup>2</sup>	(9.1 · 10 <sup>-31</sup> kg)	kwark	t	173 GeV/c <sup>2</sup>
proton	p	938 MeV/c <sup>2</sup>	(1.7 · 10 <sup>-27</sup> kg)	bozon	W <sup>±</sup>	80.4 GeV/c <sup>2</sup>
neutron	n	940 MeV/c <sup>2</sup>			Z <sup>0</sup>	91.2 GeV/c <sup>2</sup>

- 1 Dynamika relatywistyczna
- 2 Budowa materii
- 3 Natura światła**
- 4 Pozytonowa tomografia emisyjna

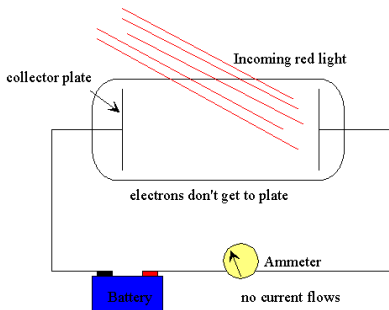
## Efekt fotoelektryczny

Odkryty przez Hertza w 1887  
W 1902 **Philipp Lenard** pokazał, że efekt fotoelektryczny obserwujemy tylko dla wybranych **długości fali** światła:



## Efekt fotoelektryczny

Odkryty przez Hertza w 1887  
W 1902 **Philipp Lenard** pokazał, że efekt fotoelektryczny obserwujemy tylko dla wybranych **długości fali** światła:



Efektu tego nie można było wytłumaczyć w oparciu o falową teorię światła!

## Efekt fotoelektryczny

W roku 1905, Albert Einstein wysunął hipotezę, że światło jest strumieniem niepodzielnych kwantów energii, które dziś nazywamy fotonami.

Energia fotonu:

$$E_{\gamma} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$



## Efekt fotoelektryczny

W roku 1905, Albert Einstein wysunął hipotezę, że światło jest strumieniem niepodzielnych kwantów energii, które dziś nazywamy fotonami.

Energia fotonu:

$$E_{\gamma} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Aby wybić elektron z metalu energia padającego fotonu,  $E_{\gamma}$ , musi być większa od tzw. pracy wyjścia  
 $\Rightarrow$  zależność od długości fali światła

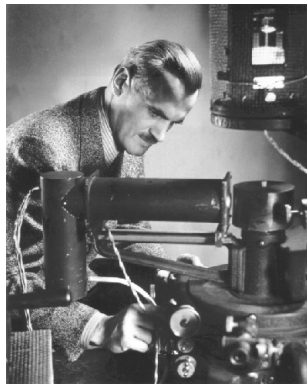
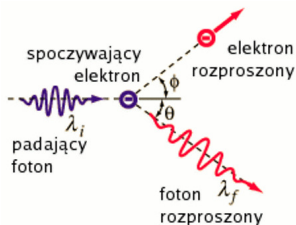
$$E_{\gamma}^{\text{blue}} > E_{\gamma}^{\text{green}} > E_{\gamma}^{\text{red}}$$



## Arthur Compton 1923

Rozpraszanie promieniowania X na kryształach

⇒ fotony rozpraszają się na quasi-swobodnych elektronach



Compton wykazał, że fotony niosą nie tylko **energię**, ale i **pęd**

⇒ zachowują się jak “zwykłe” **cząstki**



## Foton jako cząstka

Wyrażenia na energię i pęd cząstki relatywistycznej ( $E = \gamma mc^2$ ,  $p = \gamma mv$ ) wydają się tracić sens zarówno dla  $v = c$  jak i dla  $m = 0$ .

Ale to nie znaczy, że cząstka bezmasowa nie może być poprawnie opisana.

**Wprost przeciwnie!** zauważmy, że  $pc = \gamma mvc = \gamma \beta mc^2 = \beta E$

## Foton jako cząstka

Wyrażenia na energię i pęd cząstki relatywistycznej ( $E = \gamma mc^2$ ,  $p = \gamma mv$ ) wydają się tracić sens zarówno dla  $v = c$  jak i dla  $m = 0$ .

Ale to nie znaczy, że cząstka bezmasowa nie może być poprawnie opisana.

**Wprost przeciwnie!** zauważmy, że  $pc = \gamma mvc = \gamma \beta mc^2 = \beta E$

Jeśli cząstka pozbawiona jest masy (jak foton) musi poruszać się z prędkością światła  $\Rightarrow$  Wtedy związek energii i pędu jest postaci:  $E = pc$

# Rozpraszanie Comptona

## Foton jako cząstka

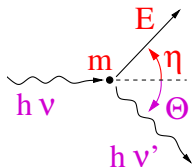
Wyrażenia na energię i pęd cząstki relatywistycznej ( $E = \gamma mc^2$ ,  $p = \gamma mv$ ) wydają się tracić sens zarówno dla  $v = c$  jak i dla  $m = 0$ .

Ale to nie znaczy, że cząstka bezmasowa nie może być poprawnie opisana.

**Wprost przeciwnie!** zauważmy, że  $pc = \gamma mvc = \gamma \beta mc^2 = \beta E$

Jeśli cząstka pozbawiona jest masy (jak foton) musi poruszać się z prędkością światła  $\Rightarrow$  Wtedy związek energii i pędu jest postaci:  $E = pc$

Dla fotonu o częstości  $\nu$  należy przyjąć  $E_\gamma = h\nu$ ,  $p_\gamma = \frac{h\nu}{c}$



Zderzenie foton-elektron możemy “zwyczajnie” opisać z zasad zachowania ( $E$ ,  $p$  - energia i pęd elektronu):

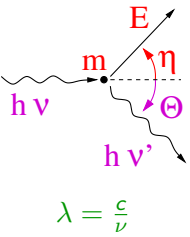
$$E : \quad h\nu + mc^2 = h\nu' + E$$

$$p_{\parallel} : \quad \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cos \eta$$

$$p_{\perp} : \quad 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - p \sin \eta$$

# Rozpraszanie Comptona

## Wzór Comptona



$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m}(1 - \cos\theta)}$$

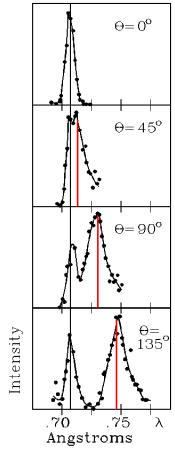
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m c}(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos\theta)$$

Comptonowska długość fali:

$$\lambda_c = \frac{h}{m c} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2.43 \text{ pm}$$

odpowiada przesunięciu przy rozproszeniu pod kątem 90°



W podejściu klasycznym mamy dwa przypadki:

## Ruhome źródło

Źródło o częstotliwości  $\nu$  poruszające się z prędkością  $v$  względem ośrodka.

Częstość dźwięku mierzona przez nieruchomego obserwatora:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}$$

## Ruchomy obserwator

Obserwator porusza się z prędkością  $v$  względem ośrodka i źródła dźwięku

Mierzona częstość:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

# Efekt Dopplera

W podejściu klasycznym mamy dwa przypadki:

## Ruchome źródło

Źródło o częstotliwości  $\nu$  poruszające się z prędkością  $v$  względem ośrodka.

Częstość dźwięku mierzona przez nieruchomego obserwatora:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}$$

## Ruchomy obserwator

Obserwator porusza się z prędkością  $v$  względem ośrodka i źródła dźwięku

Mierzona częstość:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

⇒ należy uwzględnić dylatację czasu:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$

⇒ Pełna symetria !

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

## Podejście "cząstkowe"

Wyrażenia na **relatywistyczny efekt Dopplera** (dla światła) wynikają wprost z **transformacji Lorentza** !

W układzie  $O'$  foton emitowany jest pod kątem  $\theta'$  do osi  $X'$ :

$$E' = h\nu'$$

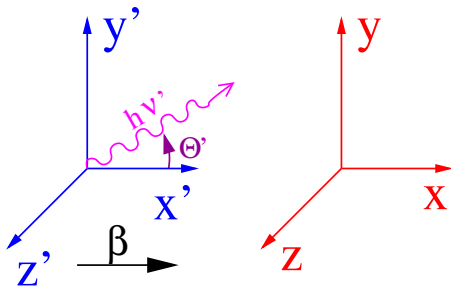
$$c p'_x = h\nu' \cos \theta'$$

$$c p'_y = h\nu' \sin \theta'$$

$$c p'_z = 0$$

W układzie  $O$ , z transformacji Lorentza:

$$\begin{aligned} h\nu = E &= \gamma E' + \beta \gamma p'_x \\ &= h\nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta') \end{aligned}$$



## Podejście "cząstkowe"

Wyrażenia na **relatywistyczny efekt Dopplera** (dla światła) wynikają wprost z **transformacji Lorentza** !

Otrzymujemy:

$$\nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta')$$

Dla  $\theta' = 0$  mamy:

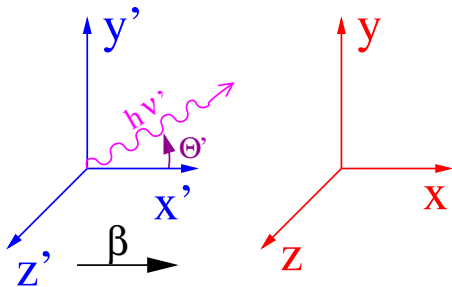
$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

częstość (energia) rośnie

Dla  $\theta' = \pi$  mamy:

$$\nu = \nu' \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

częstość (energia) maleje





## Rozkłady kątowe

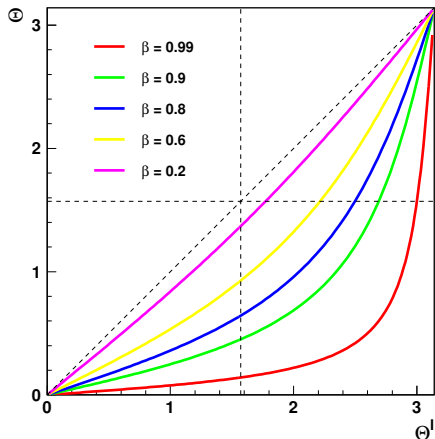
Foton emitowany pod kątem  $\theta'$  w układzie poruszającego się źródła

Obserwowany kąt lotu fotonu:

$$\cos \theta = \frac{p_x}{E} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$$

Dla  $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = \beta \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

Izotropowe promieniowanie szybko poruszającego się ciała jest skolimowane w kierunku ruchu...



- 1 Dynamika relatywistyczna
- 2 Budowa materii
- 3 Natura światła
- 4 Pozytonowa tomografia emisyjna

## Rozpad $\beta^+$

Odkryty przez Frederica and Irene Joliot-Curie w 1934. Przykładowo:



średni czas życia: 110 minut, energia rozpadu: 634 keV

## Rozpad $\beta^+$

Odkryty przez Frederica and Irene Joliot-Curie w 1934. Przykładowo:



średni czas życia: 110 minut, energia rozpadu: 634 keV

Szybko poruszające się pozytony niechętnie anihilują w materii.

Najczęściej tracą wprawdzie energię na jonizację ośrodka i anihilują dopiero po zatrzymaniu, "w spoczynku".



Anihilacja w jeden foton nie jest możliwa! ( $E = 2m_e c^2$ ,  $p = 0$ )

## Rozpad $\beta^+$

Odkryty przez Frederica and Irene Joliot-Curie w 1934. Przykładowo:



średni czas życia: 110 minut, energia rozpadu: 634 keV

Szybko poruszające się pozytony niechętnie anihilują w materii.

Najczęściej tracą wprawdzie energię na jonizację ośrodka i anihilują dopiero po zatrzymaniu, “w spoczynku”.



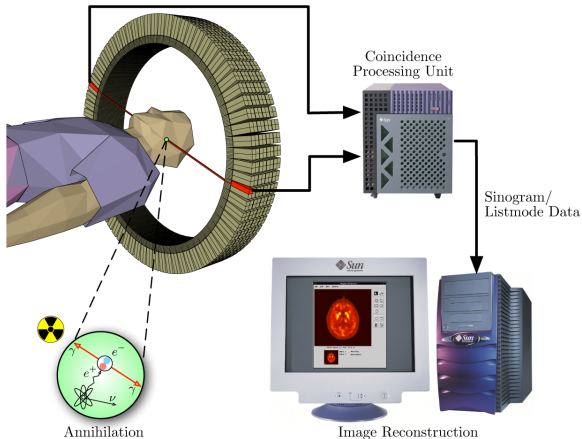
Anihilacja w jeden foton nie jest możliwa! ( $E = 2m_e c^2$ ,  $p = 0$ )

Powstaje zawsze para fotonów, które muszą poruszać się dokładnie w przeciwnych kierunkach (“back-to-back”):

$$E_1 = E_2 = m_e c^2 \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

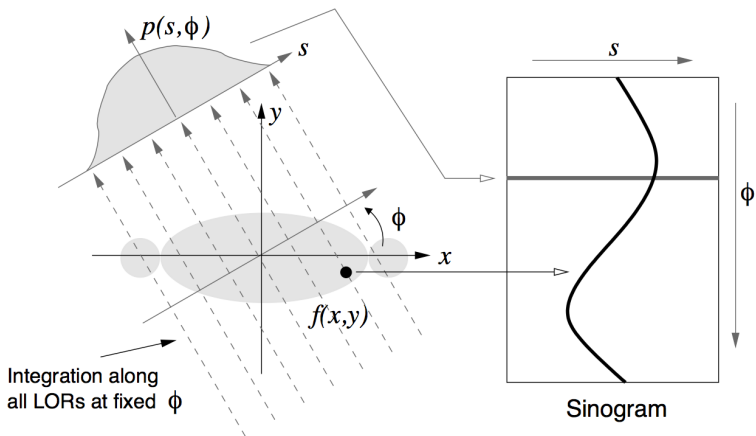
# Pozytonowa tomografia emisyjna

Po podaniu radiofarmaceutyka (np. fludeoksyglukoza z  $^{18}\text{F}$ ) rejestrujemy przypadki koincydencji dwóch wysokoenergetycznych fotonów

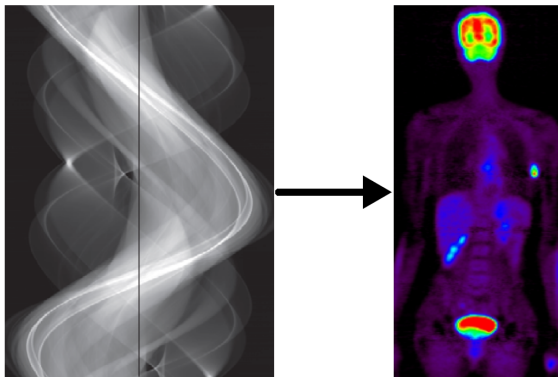


Wiemy, że rozpad  $^{18}\text{F}$  nastąpił na linii łączącej punkty detekcji fotonów!

Rejestrując **miliony rozpadów** możemy otrzymać rozkład “linii odpowiedzi” (line of response - LOR) w przestrzeni opisujących je parametrów ( $s$ ,  $\phi$ )



Dedykowane algorytmy komputerowe rekonstruują na tej podstawie rozkład źródeł emisji (podobnie jak w przypadku CT)



Musimy uwzględnić dodatkowe efekty: tło, pochłanianie i rozpraszanie fotonów, wydajność detektorów...

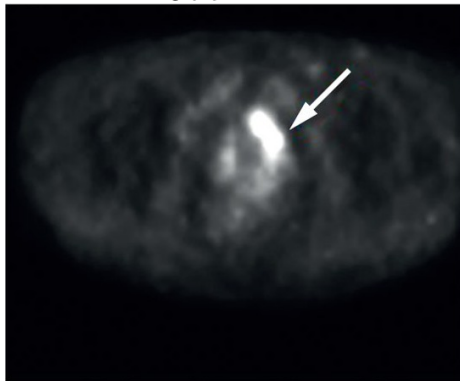


Obecnie najczęściej wykorzystuje się urządzenia hybrydowe  
PET+CT lub PET+MRI:

Obraz CT



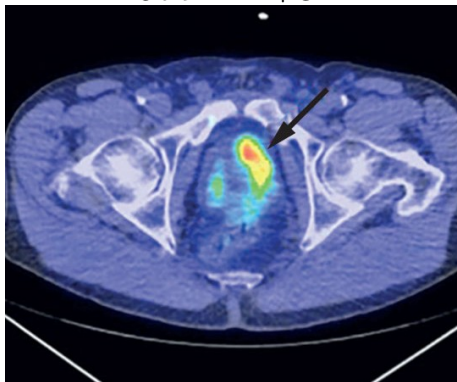
Obraz PET



M.A. Bjurlin et al., Nature Reviews Urology 12 (2015) 617

Obecnie najczęściej wykorzystuje się urządzenia hybrydowe PET+CT lub PET+MRI:

Obraz PET+CT



rak prostaty

M.A. Bjurlin et al., Nature Reviews Urology 12 (2015) 617