Szczególna teoria względności

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki
Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych
Instytut Fizyki Doświadczalnej

Wykład II:

- Transformacja Galileusza
- Ogólna postać transformacji współrzędnych
- Składanie prędkości
- Prędkość światła i doświadczenie Michelsona-Morleya
- Postulaty Einsteina i transformacja Lorenza

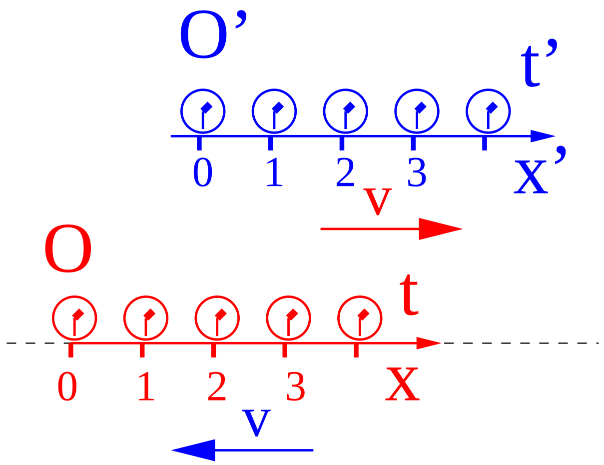
Równoprawność układów odniesienia

Na poprzednim wykładzie, korzystając tylko z:

- zasady bezwładności (definicji układu inercjalnego)
- zasady względności (równoprawności układów odniesienia)

Wyprowadziliśmy ogólną postać związku między współrzędnymi zdarzenia w dwóch układach odniesienia:

$$\begin{aligned} x &= Vt + Ax' \\ x' &= -Vt' + Ax \end{aligned}$$



Aby uprościć dalsze rozważania zamieniłem zwrot osi x'!

Równania te opisują zależności między współrzędnymi dowolnego zdarzenia obserwowanego w układach O i O'

Transformacja Galileusza

$$\begin{cases} x &= Vt + Ax' \\ x' &= -Vt' + Ax \end{cases}$$

Dodając równania stronami otrzymujemy:

$$(x + x') \cdot (1 - A) = V(t - t')$$

Do Einsteina czas uważano za uniwersalny, absolutny, określony jednoznacznie w każdym układzie odniesienia. $t \equiv t'$

Kładąc $A \equiv 1$ otrzymujemy wzory na transformacje współrzędnych z O' do O, zwaną **transformacją Galileusza**:

$$\begin{cases} t &= t' \\ x &= x' + V\,t' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

albo:

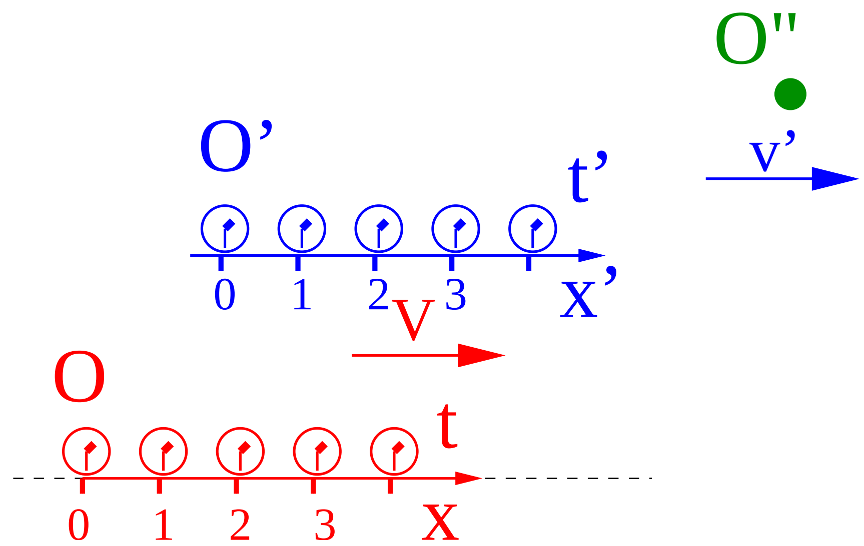
$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ V & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Współrzędne prostopadłe do kierunku ruchu pozostają niezmienione, co wynika z równoprawności układów.

Transformacja Galileusza

Składanie prędkości

Rozważmy teraz ciało O”, które w układzie O’ porusza się z prędkością v’ w kierunku osi x’.



$$v' = \frac{x'}{t'}$$

Jaką prędkość ciała O” zmierzy obserwator O?

$$v = \frac{x}{t} = \frac{x' + V\,t'}{t'} = v' + V$$

W podejściu Galileusza składanie prędkości polega na ich dodawaniu:

$$\boxed{v = v' + V}$$

Wyprowadzając ten wzór rozważaliśmy zdarzenia na lini świata poruszającego się ciała. Ale dotyczy on także innych typów zdarzeń, np. związanych z rozchodzeniem się fali dźwiękowej, fali na wodzie, światła... (uniwersalny wzór na składanie prędkości)

Transformacja współrzędnych

Przyjżyjmy się teraz transformacji współrzędnych w ogólnym przypadku.

Wyjściowe zależności:

$$\begin{cases} x = Vt + Ax' \\ x' = -Vt' + Ax \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy x i wstawiamy do wzoru na t z pierwszego równania $\Rightarrow$

$$x = \frac{Vt' + x'}{A}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{V}\left(x - Ax'\right) \\ &= \frac{1}{V} \cdot \frac{Vt' + x' - A^2 x}{A} \\ &= \frac{t' + \frac{1-A^2}{V}x'}{A} \end{aligned}$$

Transformacja współrzędnych

Otrzymujemy ogolny wzór na transformacje współrzędnych:

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + \frac{1-A^2}{V} x'}{A} \\ x = \dfrac{V t' + x'}{A} \end{cases} \quad \text{albo:} \quad \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & \frac{1-A^2}{AV} \\ \frac{V}{A} & \frac{1}{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

Współrzędne prostopadłe do kierunku ruchu pozostają niezmienione.

Dla $A = 1$ dostajemy transformację Galileusza.

Postać ogólnej transformacji jest podobna do transformacji obrotów na płaszczyźnie!?

Dla zwykłych obrotów oczekiwalibyśmy $\frac{1}{A} = \cos\theta < 1$.

Transformacja współrzędnych

Jak wyglądatransformacja odwrotna, czyli transformacja z układu O do O'?

Można ją wyprowadzić z wyjściowych zależności, albo skorzystać z równoprawności układów zamieniając $V \Leftrightarrow -V$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t' & = & \frac{t - \frac{1-A^2}{V} x}{A} \\ x' & = & \frac{-Vt + x'}{A} \end{array} \right. \qquad \text{albo:} \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{1-A^2}{AV} \\ -\frac{V}{A} & \frac{1}{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że A to nie jest stała przyrody!

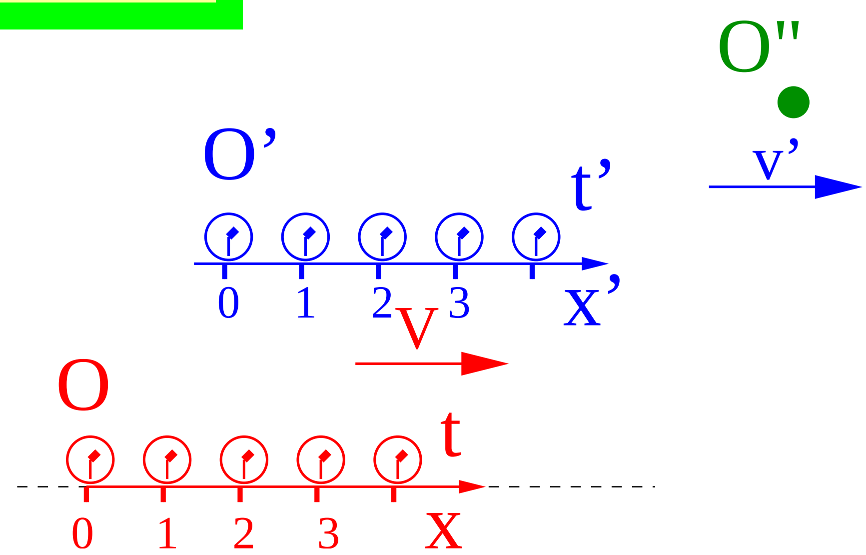
Rozważaliśmy transformację pomiędzy dwoma zadanymi układami odniesienia, które poruszają się względem siebie z prędkością V.

Musimy przyjąć, że A zależy od prędkości: $A = A(V)$.

Dla $V = 0$ mamy $A = 1$.

Czy jesteśmy w stanie powiedzieć coś o postaci tej zależności?

Składanie prędkości



Rozważmy zagadnienie składania prędkości.

Ciało O" porusza się w układzie O' z prędkością v' w kierunku osi x'.

$$v' = \frac{x'}{t'}$$

Jaką prędkość ciała O" zmierzy obserwator O?

$$\begin{cases} x = Vt + A(V)\, x' \\ x' = -Vt' + A(V)\, x \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy x':

$$x' = -V\frac{x'}{v'} + A(V)\, x$$

$$x' = \frac{A(V)\, v'}{V + v'} \cdot x$$

Składanie prędkości

$$\begin{cases} x = Vt + A(V)\, x' \\ x' = -Vt' + A(V)\, x \end{cases}$$

Wyznaczone x' wstawiamy do pierwszego równania:

$$x = Vt + A(V) \cdot \frac{A(V)v'}{V+v'} x$$

$$\left(1 - \frac{A^2(V)v'}{V+v'}\right) \cdot x = Vt$$

$$\frac{V + v'(1 - A^2(V))}{V+v'} \cdot x = Vt$$

$$v = \frac{x}{t} = \frac{V(V+v')}{V + v'(1-A^2(V))} = \frac{V+v'}{1 + (1-A^2(V)) \cdot \frac{v'}{V}}$$

Ogólny wzór na składanie prędkości.

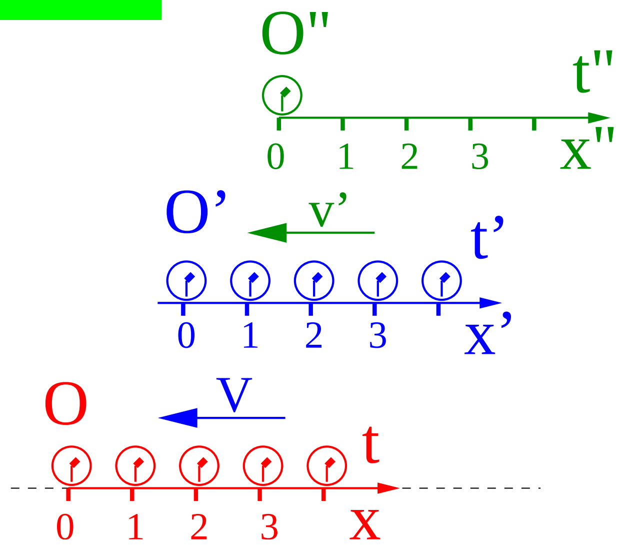
Jeśli $A(V) \neq 1$ prędkości przestają się dodawać! $v \neq V + v'$

v' i V nie wchodzą do wzoru symetrycznie! Może nie muszą?

Składanie prędkości

A co o prędkości ciała O powie obserwator O”?

Sytuacja jest calkowicie symetryczna!



W układzie O’ ciało O porusza się z prędkością V, układ O’ porusza się z prędkością v’ w układzie O”. Otrzymujemy:

$$v'' = \frac{V + v'}{1 + (1 - A^2(v')) \cdot \frac{V}{v'}}$$

Ale z zasady równoważności układów powinniśmy miec $v'' = v$. Czyli:

$$(1 - A^2(V)) \cdot \frac{v'}{V} = (1 - A^2(v')) \cdot \frac{V}{v'}$$

$$\frac{1 - A^2(V)}{V^2} = \frac{1 - A^2(v')}{v'^2}$$

Dla dowolnych wartości prędkości V i v'

Składanie prędkości

Z równoprawności układów odniesienia wynika więc, że wyrażenie to musi mieć wartość stałą, niezależną od prędkości, którą oznaczę C:

$$\frac{1 - A^2(V)}{V^2} \equiv C = const$$

Możemy teraz wyznaczyć postać $A(V)$:

$$A = \sqrt{1 - C\,V^2}$$

$\Rightarrow$ wzór na składanie prędkości:

$$v = \frac{V + v'}{1 + C\,V v'}$$

Pełna symetria względem wyboru układu!

$\Rightarrow$ transformacja współrzędnych:

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + CVx'}{\sqrt{1 - C\,V^2}} \\ x = \dfrac{Vt' + x'}{\sqrt{1 - C\,V^2}} \end{cases}$$

Wychodząc jedynie z zasady bezwładności (układ inercjalny) i zasady względności (równoprawność układów) wyznaczyliśmy jednoznacznie postać transformacji.

Nieznana pozostaje jedynie stała C! $C = 0$ odpowiada transformacji Galileusza

Prędkość światła

Historia pomiarów

Już Galileusz zastanawiał się nad prędkością rozchodzenia się światła.

Jako pierwszy zaproponował pomiar prędkości światła metodą czasu przelotu.

Jednak przy ówczesnych dokładnościach pomiarów ($\Delta L \sim 1\ m$, $\Delta t \sim 1\ s$) było to niewykonalne. Nie w warunkach ziemskich...

W 1676 Ole Rømer zauważył, że obserwowany na Ziemi czas zaćmień satelity Io Jowisza zależy od położenia Ziemi względem Jowisza.

Maksymalne opóźnienie czasu zaćmienia wynosi około 16 minut.

Według ówczesnych pomiarów orbity Ziemi oszacował $c = 214000\ km/s$

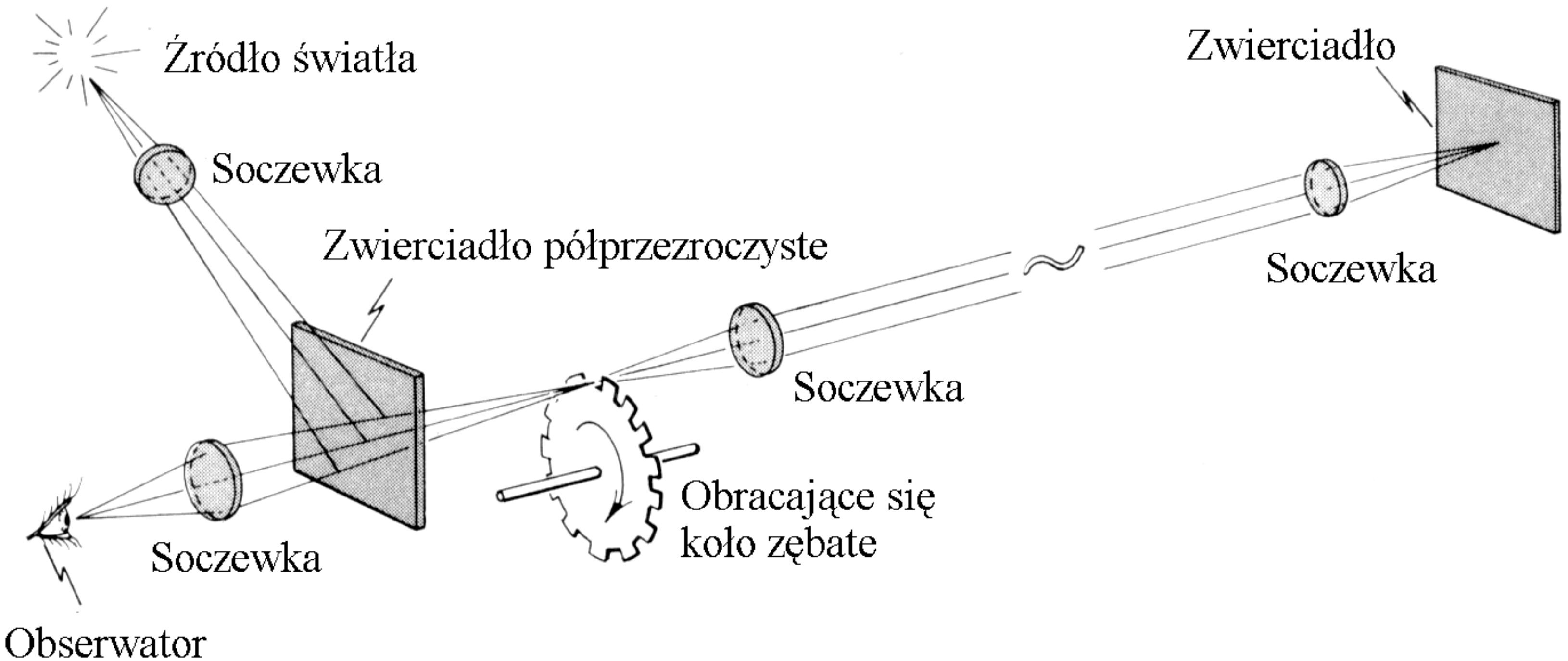
W 1727 William Bradley wyznaczyl prędkość światła z aberracji gwiazd.

Gwiazdy zmieniają w ciągu roku swoje położenie na sferze niebieskiej o ok. 20.5 sekundy łuku, co jest wywołane przez ruch Ziemi dookoła Słońca (przy skończonej prędkości rozchodzenia się światła). Na tej podstawie wyznaczył $c = 301000\ km/s$

Prędkość światła

Pomiar H.L. Fizeau 1849

Pierwszy pomiar w warunkach “laboratoryjnych” (ziemskich)



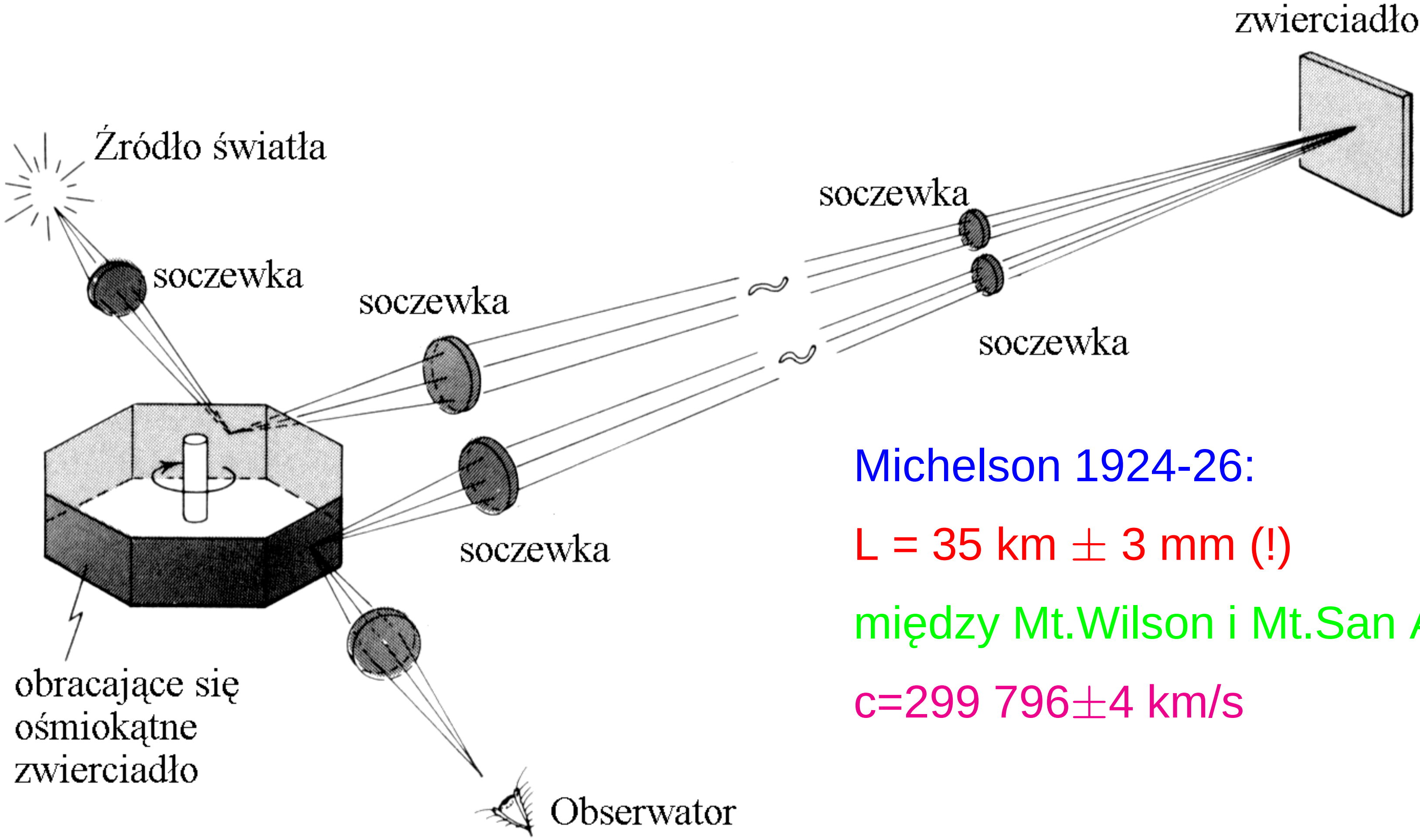
odległość $L = 8633$ m, zębów w “przesłonie” $N = 720$

liczba obrotów przy pierwszym “zaćmieniu” $n = 12.86\ s^{-1} \Rightarrow\ c \approx 315300$ km/s

Prędkość światła

Metoda Foucault od 1850

Metoda wirującego zwierciadła



Michelson 1924-26:

L = 35 km $\pm$ 3 mm (!)

między Mt.Wilson i Mt.San Antonio

c=299 796$\pm$4 km/s

Prędkość światła

W latach 70 XX wieku prędkość światła zmierzono z dokładnością do około 1 m/s !

Mierzono też prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w innych zakresach częstości (od fal radiowych $\nu \sim 10^7$ Hz do promieniowania γ $\nu \sim 10^{24}$ Hz).

Brak różnic w granicach błedów pomiarowych.

Dziś już nie mierzymy prędkości światła !

W 1983 roku prędkość światła została zdefiniowana jako

$$c \;=\; 299792458\, m/s \qquad \text{(dokładnie !)}$$

wybrana wartość zgodna z wcześniejszymi pomiarami

Teraz 1 metr jest zdefiniowany jako odległość jaką pokonuje światło w próżni w czasie równym 1/299792458 sekundy...

Prędkość światła

Na początku XX wieku panowało powszechne przekonanie o falowej naturze światła, która przejawiała się m.in. w zjawiskach dyfrakcji i interferencji.

Rozchodzenie się światła jako fali elektromagnetycznej opisywały Równania Maxwella (1865):

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\circ \,\mathrm{div}\vec{E} &= \rho \\
\mathrm{rot}\vec{E} &= -\mu_\circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\
\mathrm{rot}\vec{B} &= \vec{j} + \varepsilon_\circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Prędkość rozchodzenia fali elektromagnetycznej: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\circ \mu_\circ}}$

Problem: Równania Maxwella nie są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

W szczególności wartość prędkości światła jest określona przez parametry równania i nie zależy od układu odniesienia!

Prędkość światła

Z równań Maxwella wynika, że prędkość światła zależy jedynie od stałych opisujących oddziaływania magnetyczne i elektryczne (prawo Ampera i prawo Coulomba).

Z transformacji Galileusza wynika, że powinna zależeć od układu odniesienia!

Ale ten sam problem możemy dostrzec w przypadku dźwięku.

Prędkość rozchodzenia się dźwięku wyraża się przez parametry ośrodka (!). Z definicji jest więc ustalona tylko względem ośrodka (w układzie w którym ośrodek spoczywa).

Dzieki temu nie ma sprzeczności z transformacją Galileusza
i jego prawem "dodawania" prędkości.

Podobnie mogłoby być w przypadku światła: jeśli jesteśmy w stanie wskazać ośrodek w którym światło się rozchodzi, to równania Maxwella nie są sprzeczne z transformacją Galileusza.

Poszukiwany ośrodek nazwano eterem...

Doświadczenie Michelsona-Morleya

1887

Pomiar prędkości Ziemi względem eteru

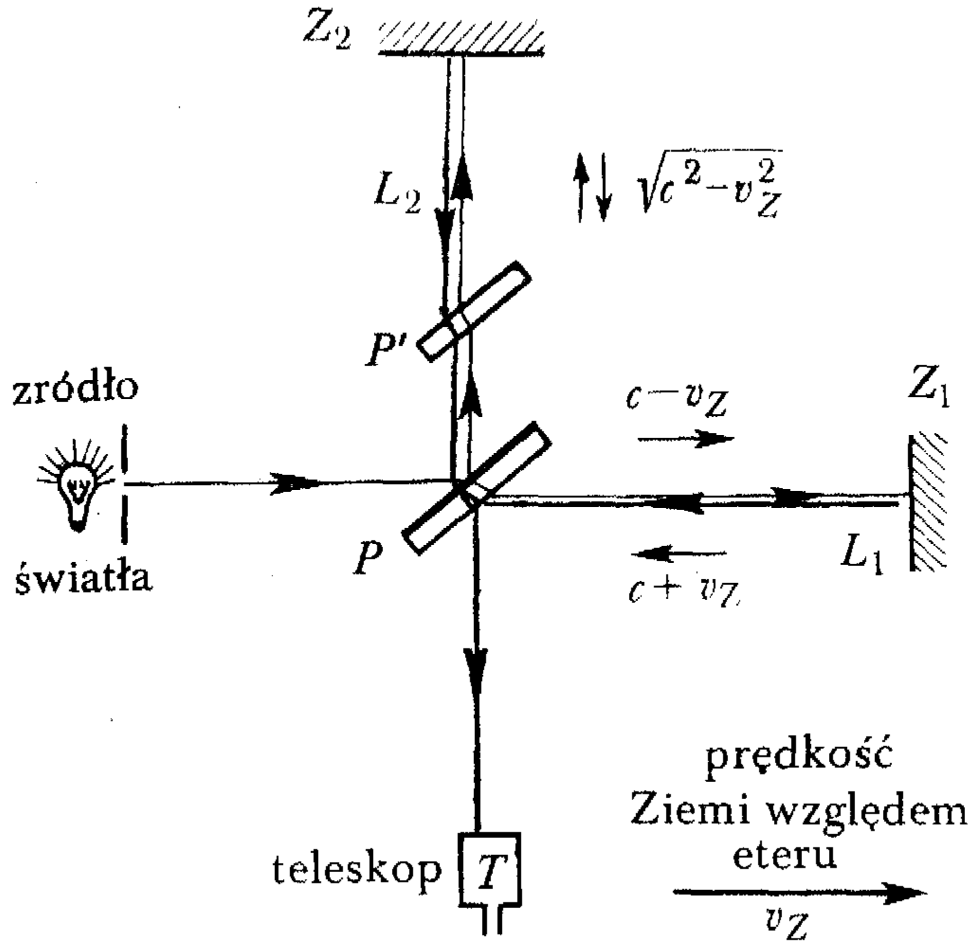
Czas przelotu światła w ramionach interferometru:

$$\Delta t_1 = \frac{L_1}{c + v_Z} + \frac{L_1}{c - v_Z}$$
$$= \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\Delta t_2 = \frac{2L_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

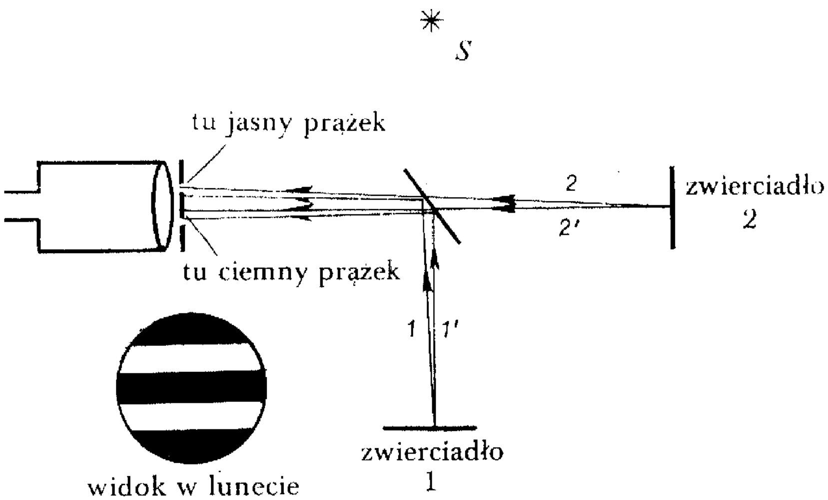
Kierunek ruchu względem eteru jest wyróżniony !



Doświadczenie Michelsona-Morleya

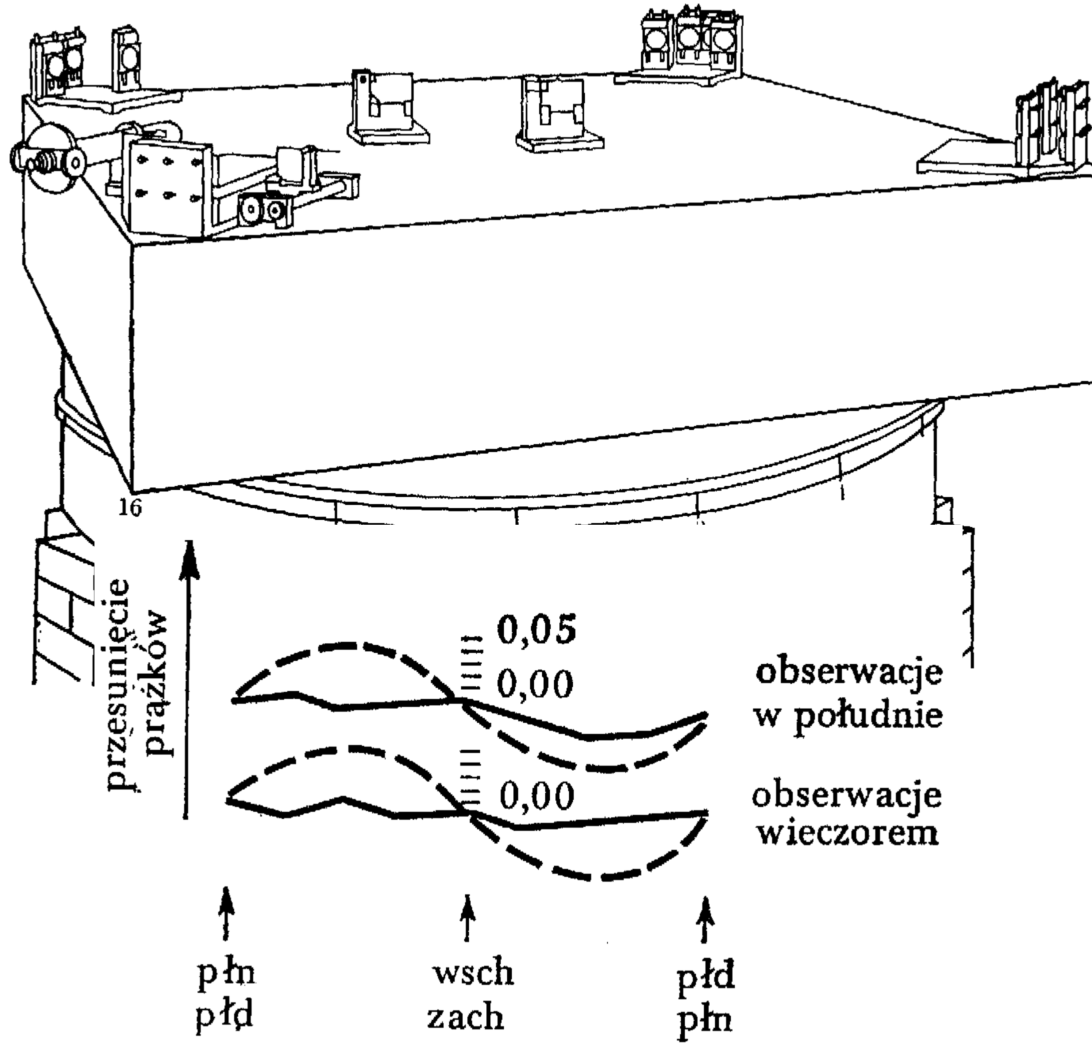
Wyniki

Światło z dwóch ramion interferometru interferuje ze sobą



Przy obrocie interferometru oczekujemy

- ⇒ zmiany $\Delta t_1 - \Delta t_2$
- ⇒ zmiany fazy
- ⇒ przesunięcia prążków interferencyjnych



Brak efektu !!!

Doświadczenie Michelsona-Morleya

Wyniki

Negatywny wynik doświadczenia Michelsona-Morleya wskazywał,
że Ziemia nie porusza się względem ośrodka, w którym rozchodzi się światło.

Doświadczenia tego typu powtarzano wielokrotnie, także w dłuższych okresach
(aby wykorzystać zmianę kierunku prędkości Ziemi w ruchu orbitalnym)
zawsze z wynikiem negatywnym.

Wszystkie wyniki wskazywały, że prędkość światła jest stała (względem źródła)
i nie zależy od układu odniesienia.

W świetle tych wyników równania Maxwella nie dawały się pogodzić z
transformacją Galileusza (postulatem uniwersalności czasu).

Postulaty Einsteina

W roku 1905 Einstein opublikował pracę "O elektrodynamice ciał w ruchu".

Zawarł w niej dwa postulaty, które *"wystarczają do podania prostej, wolnej od sprzeczności elektrodynamiki ciał w ruchu, opartej na teorii Maxwella..."*

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (zasada względności)
- prędkość światła w próżni, c, jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od wzajemnego ruchu obserwatora i źródła (uniwersalność prędkości światła)

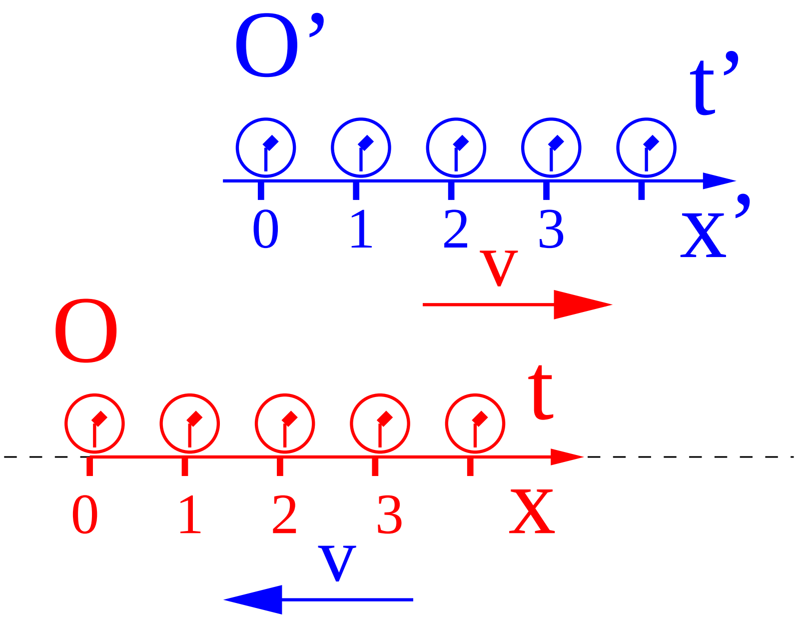
Drugi postulat oznacza odrzucenie transformacji Galileusza na rzecz równań Maxwella.

Postulat ten ustala jednocześnie stałą C w ogólnych wzorach transformacyjnych, które wyprowadziliśmy z postulatu pierwszego

$$C \equiv \frac{1}{c^2}$$

Transformacja Lorenza

Otrzymujemy wzór na transformacje Lorenza



$$
\begin{cases}
t & = \dfrac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
x & = \dfrac{Vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
y & = y' \\
z & = z'
\end{cases}
$$

Układ O' porusza się wzdłuż kierunku osi x układu O z prędkością V. Kierunki osi x', y' i z' wybrane są zgodnie z kierunkami osi x, y i z. Oba układy mają wspólny początek - zdarzenie (0,0,0,0) jest wspólnym zdarzeniem odniesienia.

Transformacja Lorenza

Zapis transformacji bardzo się upraszcza gdy wprowadzimy oznaczenia

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

β - prędkość względna wyrażona w jednostkach prędkości światła, γ - czynnik Lorenza

Otrzymujemy transformacje Lorenza w postaci:

$$\begin{cases} ct = c\gamma t' + \gamma\beta x' \\ x = c\gamma\beta t' + \gamma x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pełna symetria między t (współrzędna czasową) i x (współrzędną przestrzenną)!!!

ct traktujemy jako “czwarty” wymiar (zazwyczaj zapisujemy jako wymiar “zerowy” - x_0)

Transformacja Lorenza

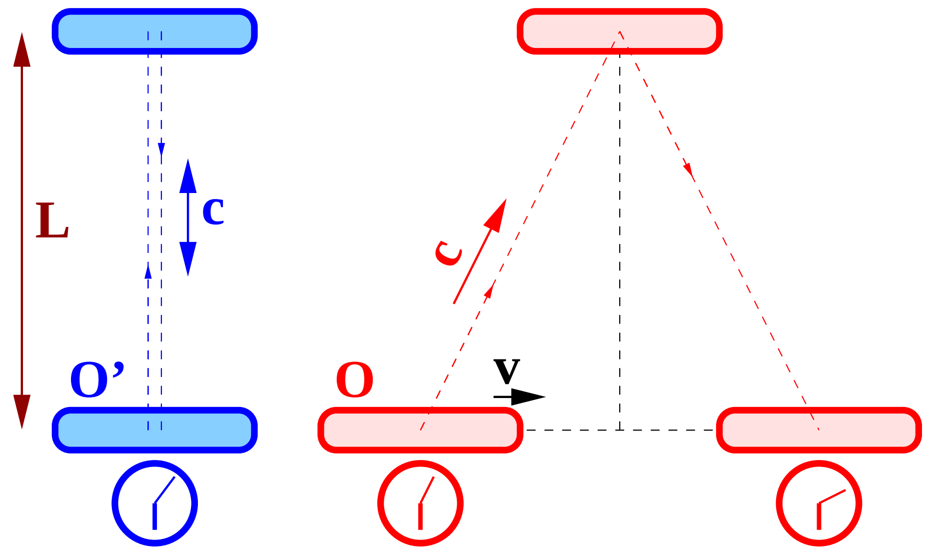
Transformacje Lorenza wyprowadziliśmy korzystając wyłącznie z zasady względności. Postulatu uniwersalności prędkości światła użyliśmy na samym końcu aby ustalić wartość parametru ogólnej transformacji.

Ale nie znaczy to, że ten postulat jest mniej ważny!

Postulat ten odrzuca uniwersalność czasu!

Niech obserwator O' odmierza czas przy pomocy "zegara świetlnego" (impuls światła we wnęce optycznej prostopadłej do kierunku ruchu) takt zegara: $\Delta t' = \frac{2L}{c}$

Dla obserwatora O światło pokonuje dłuższą drogę $\Rightarrow$ $\Delta t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$



Jest to przykład na dylatację czasu: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$

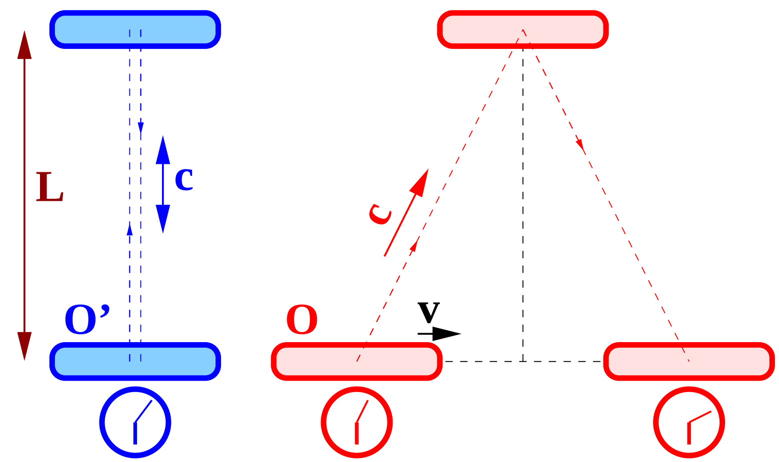
Tr. Lorenza możemy wyprowadzić z postulatu niezmienniczości prędkości światła!

Transformacja Lorenza

Dylatacja czasu

Dla obserwatora O zegar w O' chodzi wolniej !?

Wydaje się, że narusza to równoprawność układów.



Ale zagadnieniu dylatacji czasu sytuacja nie jest symertryczna

Obserwator O' odmierza czas przy pomocy jednego zegara

Obserwator O musi użyć dwóch zegarów

Dla obserwatora O zegary te są ze sobą zsynchronizowane ⇒ pomiar jest poprawny

Obserwator O' stwierdzi jednak, że pomiar został źle przeprowadzony.
W jego układzie odniesienia zegary O nie są zsynchronizowane.

O' stwierdzi też, że wszystkie zegary O odmierzają czas wolniej niż powinny !