Szczególna teoria względności

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki
Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych
Instytut Fizyki Doświadczalnej

Wykład III:

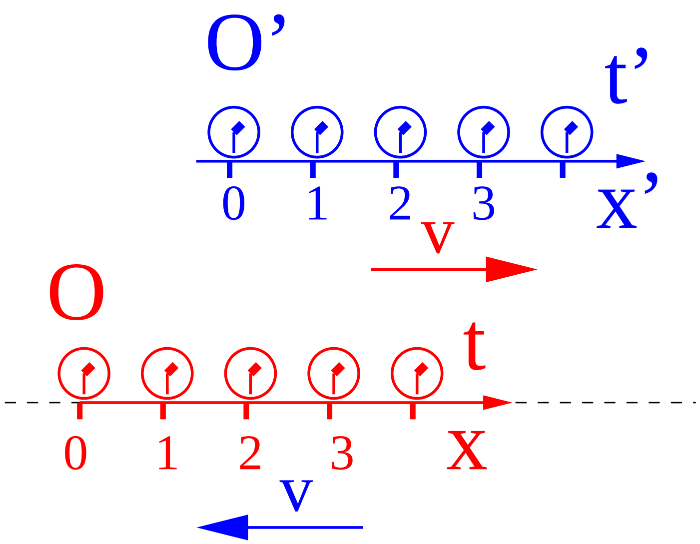
- Postulaty Einsteina i transformacja Lorenza
- Wykres Minkowskiego
- względność równoczesności i przyczynowość
- dylatacja czasu i skrócenie Lorenza
- paradoks bliźniąt

Postulaty Einsteina

opublikowane w pracy "O elektrodynamice ciał w ruchu" (1905):

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (zasada względności)
- prędkość światła w próżni, c, jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia... (uniwersalność prędkości światła)

prowadzą do wzoru na transformacje Lorenza



$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ x = \dfrac{Vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Transformacja Lorenza

Zapis transformacji bardzo się upraszcza gdy wprowadzimy oznaczenia

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

β - prędkość względna wyrażona w jednostkach prędkości światła, γ - czynnik Lorenza

Otrzymujemy transformacje Lorenza w postaci:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ct & = & c\gamma t' + \gamma\beta x' \\ x & = & c\gamma\beta t' + \gamma x' \\ y & = & y' \\ z & = & z' \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pełna symetria między t (współrzędna czasową) i x (współrzędną przestrzenną)!!!

ct traktujemy jako "czwarty" wymiar (zazwyczaj zapisujemy jako wymiar "zerowy" - x_0)

Transformacja Lorenza

Wyrażenia na Transformację Lorenza uzyskaliśmy przy założeniu, że początki układów mijają się w chwili $t = t' = 0$.

$\Rightarrow$ zdarzenie to ma w obu układach współrzędne $(0, 0, 0, 0)$
wspólne zdarzenie odniesienia

W ogólności Transformację Lorenza opisuje transformację różnicy współrzędnych dwóch wybranych zdarzeń A i B: $\Delta t = t_B - t_A, \quad \Delta x = x_B - x_A$ ...

Przyjmując $c \equiv 1$:

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,\Delta t' + \gamma\,\beta\,\Delta x' \\ \gamma\,\beta\,\Delta t' + \gamma\,\Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

Jeśli przyjmiemy, że w obu układach A = $(0, 0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ transformacja współrzędnych.

Transformacja Lorenza

Przedstawienie graficzne

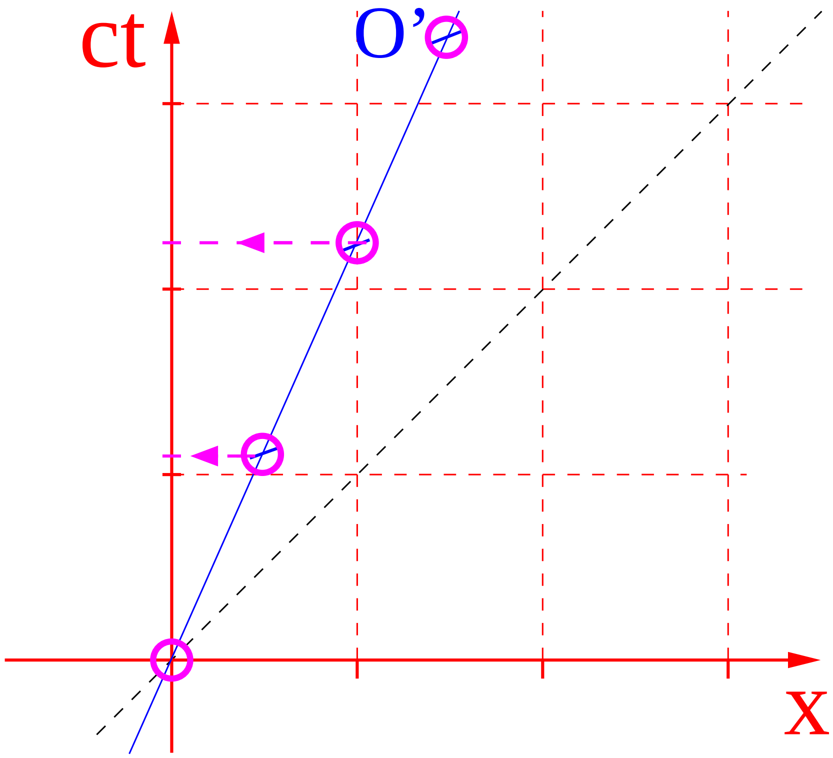
Niech zegar referencyjny w układzie O' błyska z upływem każdej jednostki czasu. Zdarzenia te mają współrzędne:

$$\begin{aligned} ct' &= i \cdot \Delta ct' = i \\ x' &= 0 \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Z transformacji Lorenza uzyskujemy współrzędne tych zdarzeń w układzie O:

$$\begin{aligned} ct &= i \cdot \gamma \Delta ct' = i \cdot \gamma \\ x &= i \cdot \gamma\beta \Delta ct' = i \cdot \gamma\beta \end{aligned}$$

"Tyknięcia" zegara O' rejestrowane w układzie O:



Zdarzenia te leżą na lini świata ciała O', a jednocześnie pokazują nam upływ czasu w jego układzie ⇒ "tyknięcia" obrazują nam oś ct'

Transformacja Lorenza

Przedstawienie graficzne

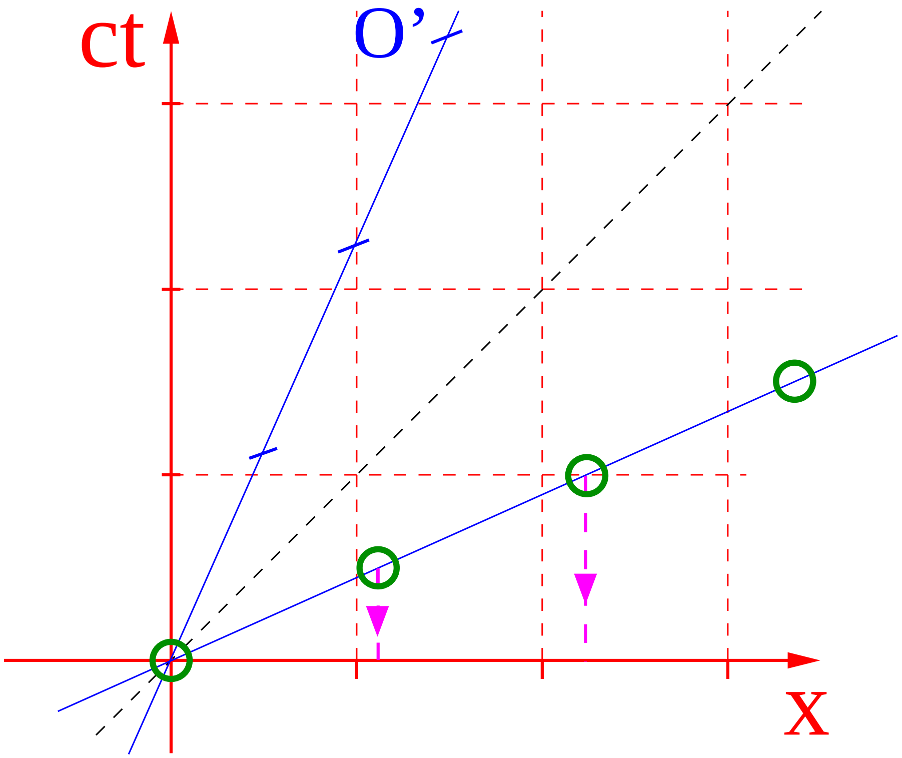
Niech zegary rozmieszczone wzdłuż osi x' wyślą w tej samej chwili t'=0 błysk światła. W O' zdarzenia te mają współrzędne:

$$\begin{aligned} ct' &= 0 \\ x' &= i \cdot \Delta x' = i \end{aligned}$$

Z transformacji Lorenza uzyskujemy współrzędne tych zdarzeń w układzie O:

$$\begin{aligned} ct &= i \cdot \gamma\beta\Delta x' = i \cdot \gamma\beta \\ x &= i \cdot \gamma\Delta x' = i \cdot \gamma \end{aligned}$$

błyski zegarów O'
rejestrowane w układzie O:



Zdarzenia te pokazują nam jak w układzie O wyglądają zdarzenia równoczesne w O', odwzorowują nam też nam też jednostkę długości ⇒ obrazują nam oś x'

Transformacja Lorenza

Wykres Minkowskiego

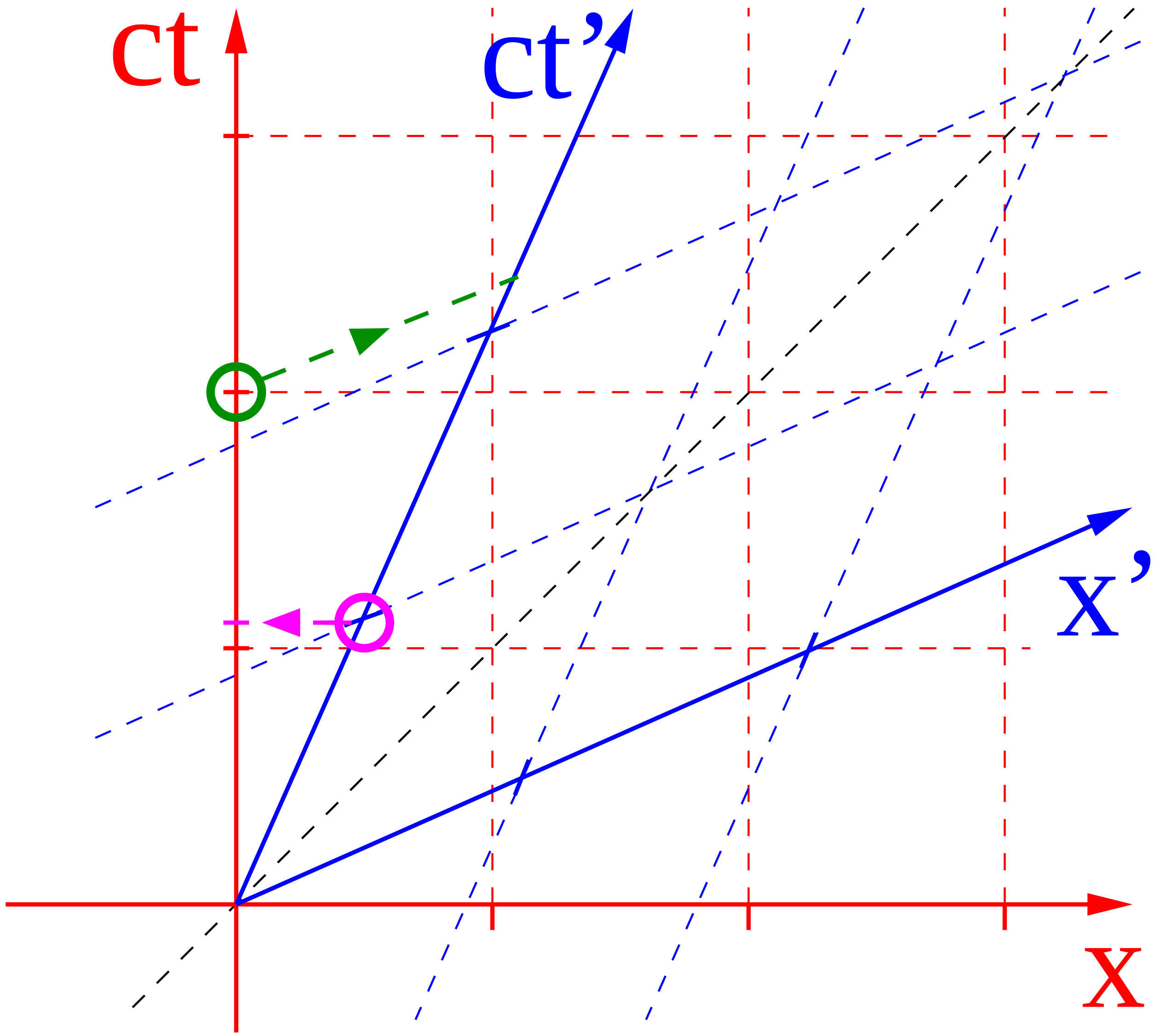
Osie układu O' nachylone są do osi O pod kątem

$$\tan\theta = \beta = \frac{V}{c}$$

Długości jednostek osi w układzie O' widziane w układzie O:

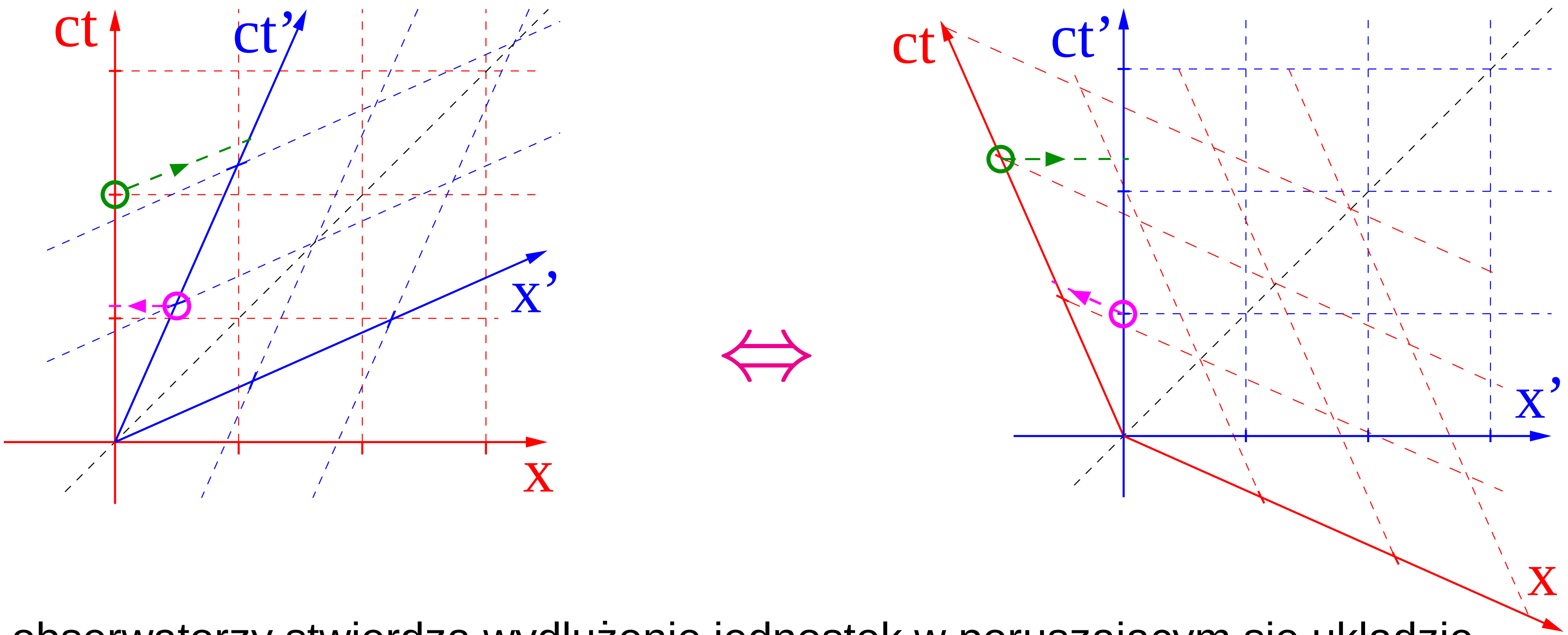
$$1' = \gamma$$

Ale także obserwator O' widzi skrócenie osi układu O !



Transformacja Lorenza

Transformacja odwrotna



Obaj obserwatorzy stwierdzą wydłużenie jednostek w poruszającym się układzie.

Wybierając zgodne zwroty osi układów naruszyliśmy symetrie:
układ O porusza się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x', a O' zgodnie z x.

Transformacja Lorenza

Transformacje możemy też zapisać jako "hiper obrót" w czasoprzestrzeni:

$$\begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

gdzie η jest parametrem transformacji, a cosh i sinh to tzw. funkcje hiperboliczne.

$$\eta = \ln\left[\gamma(1+\beta)\right] = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$\beta = \tanh\eta = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Transformacja Lorenza

Składanie prędkości:
układ O” porusza się z prędkością v’ w układzie O’, a O’ z prędkością v w układzie O

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \qquad\qquad \beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \quad \neq \beta + \beta'$$

Dla współczynnika transformacji:

$$\eta'' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta''}{1-\beta''}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta\beta'+\beta+\beta'}{1+\beta\beta'-\beta-\beta'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1+\beta'}{1-\beta'}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta'}{1-\beta'}\right) = \eta + \eta'$$

Składanie transformacji Lorenza $\Rightarrow$ dodawanie (!) współczynników.

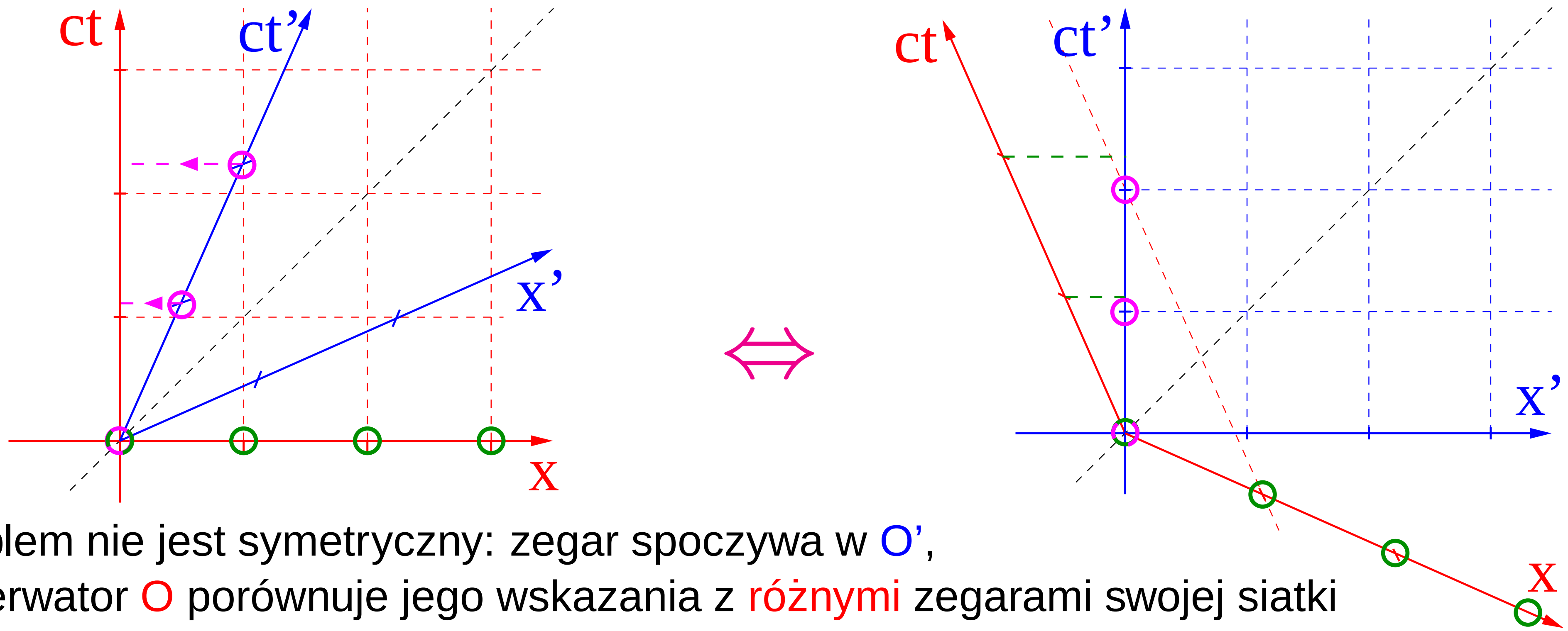
η - kąt hiperboliczny

“zwykłe” obroty: $K = \tan\theta$ obroty “hiperboliczne”: $\beta = \tanh\eta$

Transformacja Lorenza

Dylatacja czasu

zegar układu O’ obserwowany z ukladu O



Problem nie jest symetryczny: zegar spoczywa w O’,
obserwator O porównuje jego wskazania z różnymi zegarami swojej siatki

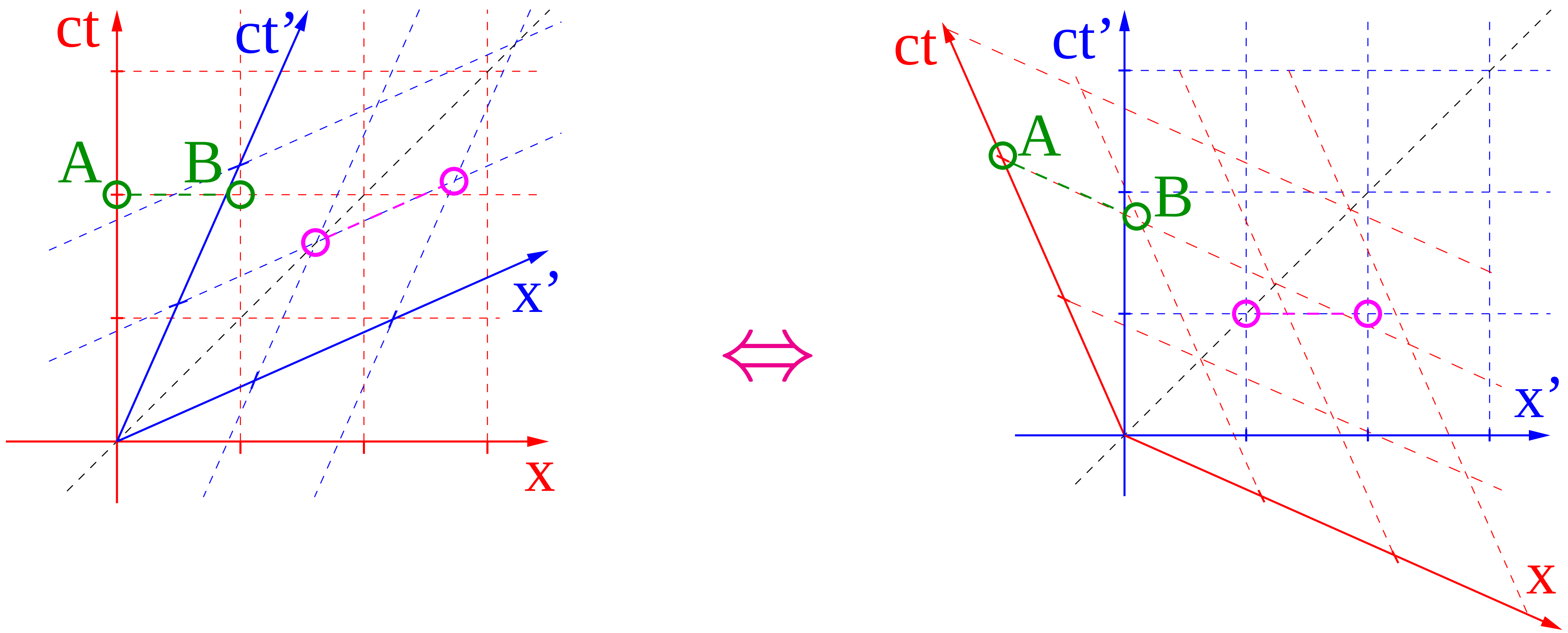
Obserwator O stwierdzi, że zegar w O’ chodzi wolniej: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$

Obserwator O’ stwierdzi, że pomiar był źle wykonany, bo zegary w O

- nie są zsynchronizowane,
- chodzą za wolno.

Transformacja Lorenza

Względność równoczesności



Dwa zdarzenia równoczesne w układzie O nie są równoczesne w układzie O'

Kolejność w jakiej zaobserwuje je obserwator O' zależy od położenia zdarzeń w stosunku do kierunku ruchu względnego.

Transformacja Lorenza

Interwał

Interwał czasoprzestrzenny między dwoma zdarzeniami definiujemy jako:

$$s_{AB} = (\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Interwał jest niezmiennikiem transformacji Lorenza ! “odległość” w czasoprzestrzeni

Nie zależy od układu odniesienia, w którym go mierzymy.

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} > 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia,
w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tym samym miejscu.

$\sqrt{s_{AB}}$ określa odstęp czasu między zdarzeniami w tym układzie
Jeśli zdarzenia A i B związane są z ruchem jakiejś cząstki $\Rightarrow$ czas własny

$\boxed{s_{AB} > 0 \text{ - interwał czasopodobny}}$

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B mogą być powiązane przyczynowo.
Ich kolejność jest zawsze ta sama.

Transformacja Lorenza

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} < 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia,
w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tej samej chwili.

$\sqrt{-s_{AB}}$ określa odległość przestrzenną między zdarzeniami w tym układzie
np. mierzona długość ciała (A i B - pomiary położenia końców)

$s_{AB} < 0$ - interwał przestrzeniopodobny

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B NIE mogą być powiązane przyczynowo !
Kolejność zdarzeń zależy od układu odniesienia.

Jeśli $s_{AB} = 0$ to w żadnym układzie odniesienia
zdarzenia A i B nie będą zachodzić w tej samej chwili ani w tym samym miejscu

$s_{AB} = 0$ - interwał zerowy

Zdarzenia A i B może połączyć przyczynowo jedynie impuls świetlny

Transformacja Lorenza

Przyczynowość

O - “tu i teraz”

$s_{OA} > 0$ i $t_A > 0$

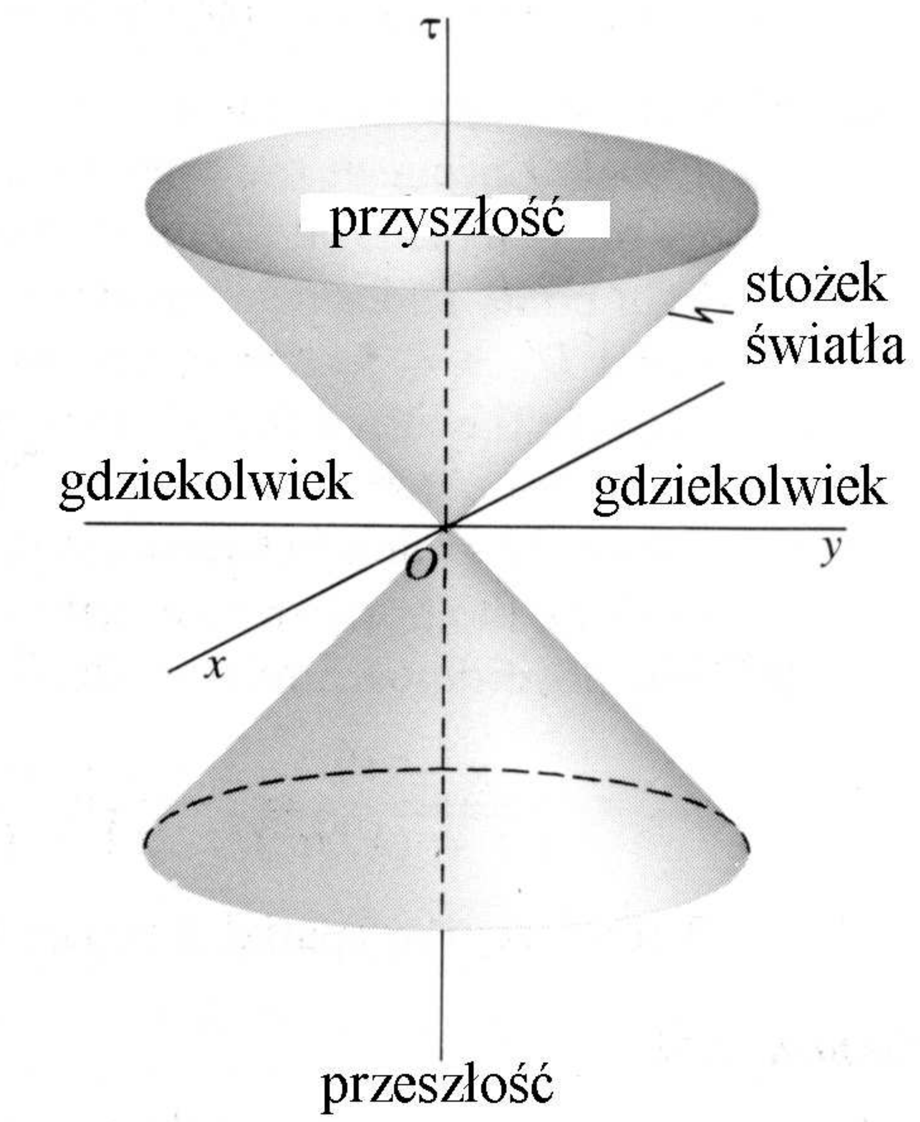
bezwzględna przyszłość: zdarzenia na które możemy mieś wpływ

$s_{OA} < 0$

zdarzenia bez związku przyczynowego

$s_{OA} > 0$ i $t_A < 0$

bezwzględna przeszłość: zdarzenia które mogły mieś wpływ na nas



Skrócenie Lorenza

O' - układ związany z rakietą o długości L_0.

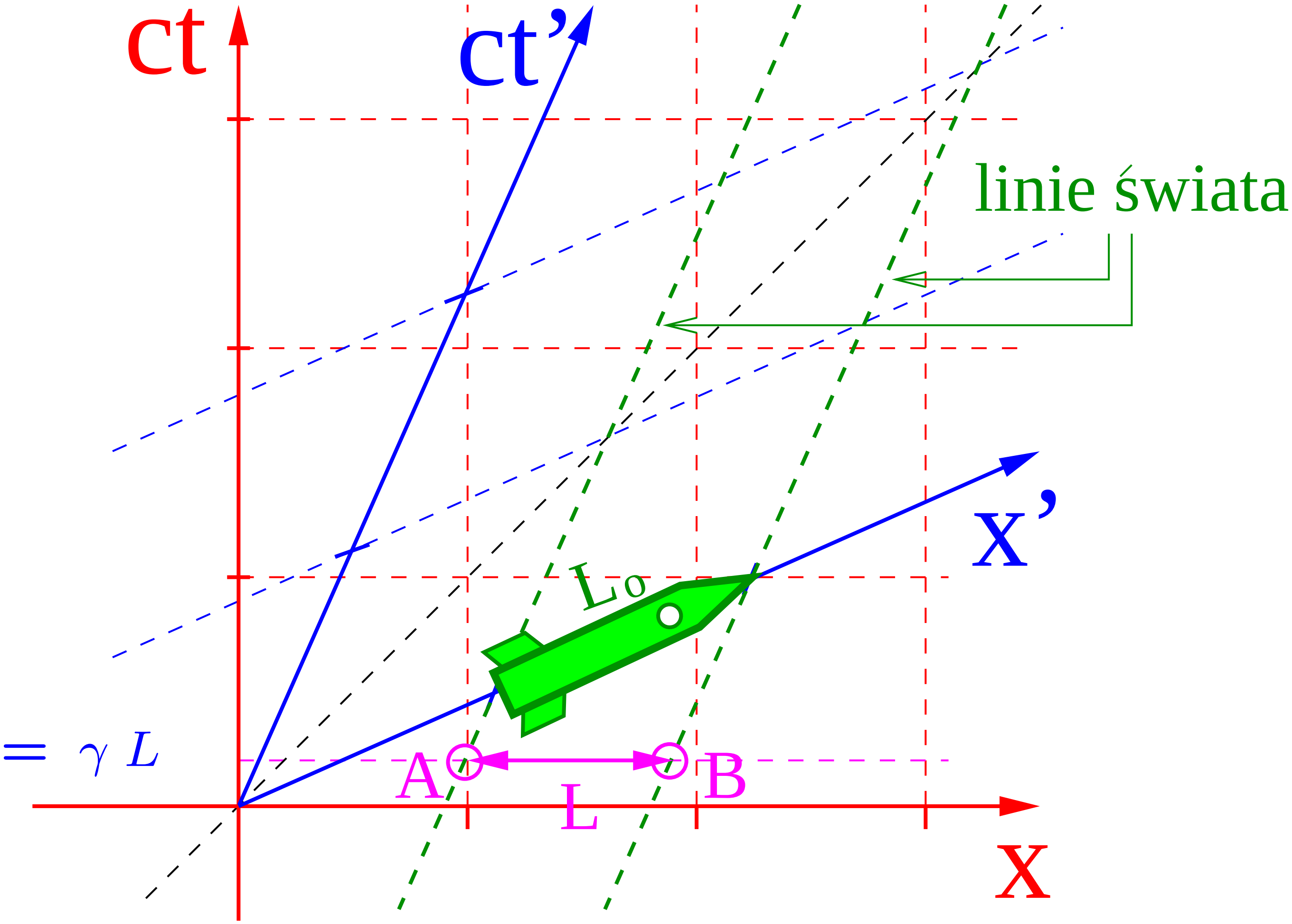
Pomiar długości: równoczesny pomiar położenia obu końców.

Pomiar AB w układzie O:

$$\Delta x_{AB} = L$$
$$\Delta t_{AB} \equiv 0 \quad (!)$$

W układzie O':

$$L_0 \equiv \Delta x'_{AB} = \gamma\, \Delta x_{AB} = \gamma\, L$$
$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{\gamma} L_0$$



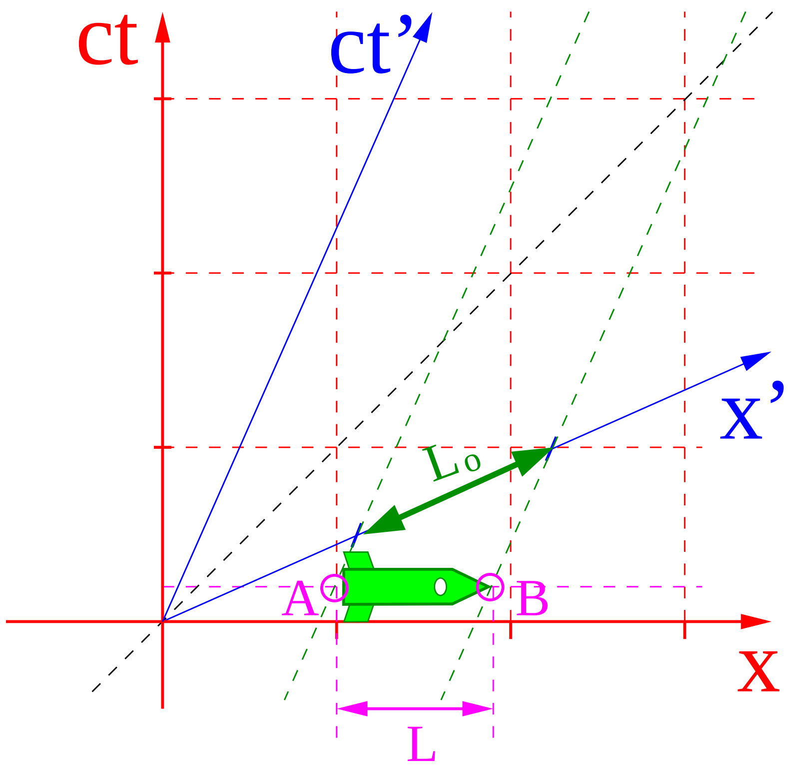
skrócenie Lorenza

$\Delta t'_{AB} \neq 0$!!!

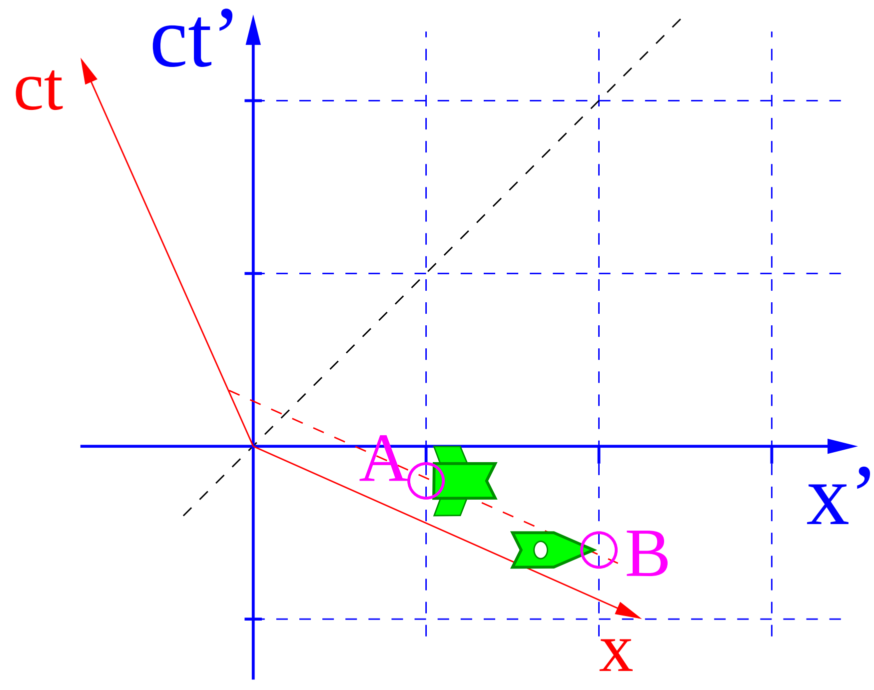
Skrócenie Lorenza

Skrócenie Lorenza ma związek ze względnością równoczesności:

Obserwator O uważa, że równocześnie zmierzył położenie obu końców rakiety (zdarzenia A i B):

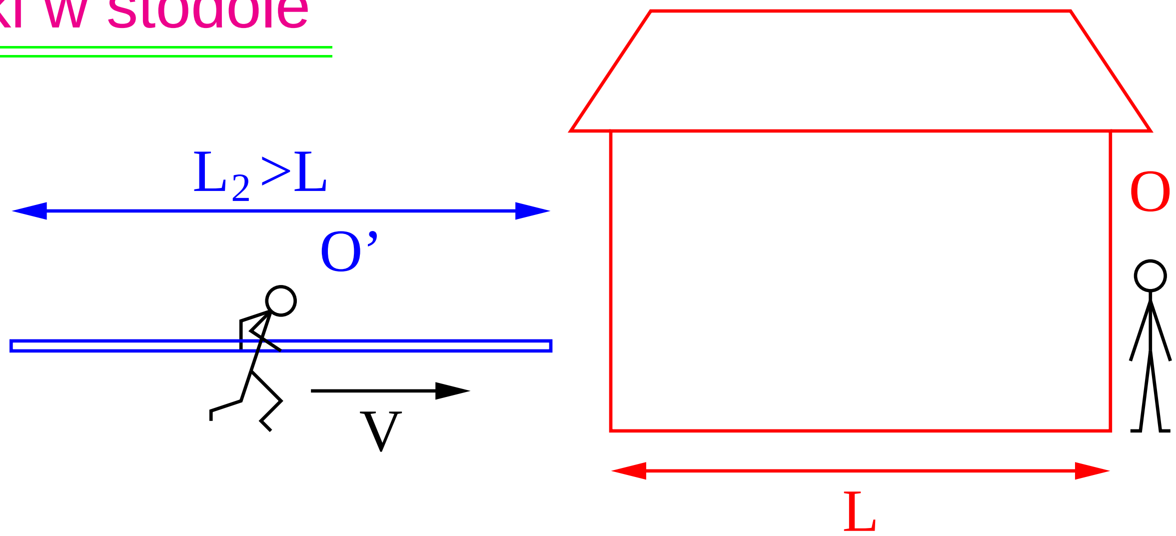


Obserwator O' stwierdzi, że wcześniej zmierzono położenie przodu niż tyłu rakiety ⇒ rakieta przesunęła się ⇒ zły pomiar



Skrócenie Lorenza

Paradoks "tyczki w stodole"



Obserwator O powie, że tyczka się skóciła i zmieściła w stodole. (jeśli $\frac{L_2}{\gamma} < L$)

Biegacz O' stwierdzi, że to stodoła się skróciła. Tyczka nie mogła się w niej zmieścić.

Obaj mają rację !!!

Różni ich zdanie na temat kolejności zdarzeń: minięcia wrót stodoły przez końce tyczki.

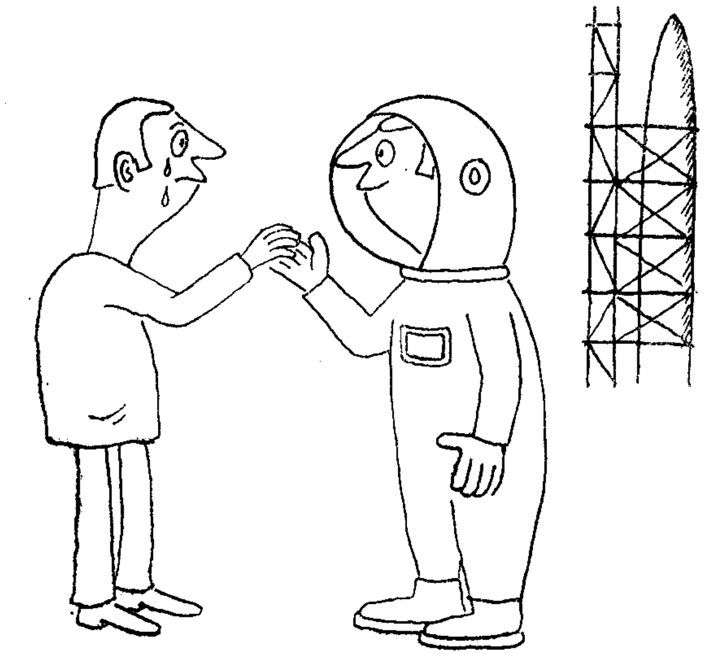
Zdarzenia te są rozdzielone przestrzennie ($s < 0$) - kolejność zależy od układu...

Paradoks bliźniąt

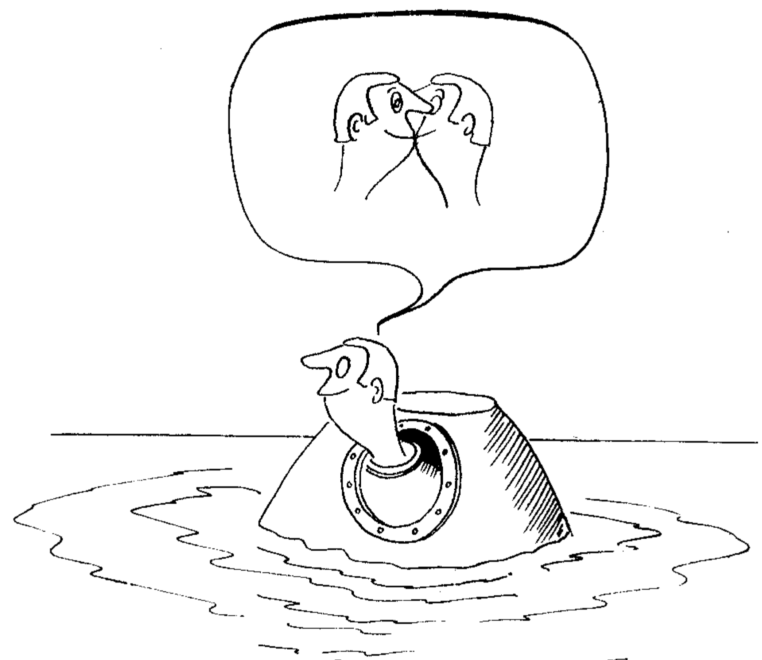
Kosmonauta wyrusza w podróż na $\alpha\ Cen$, jego brat bliźniak zostaje na Ziemi.

Obaj bracia - obserwatorzy mierzą czas pomiędzy dwoma zdarzeniami:

wylotem rakiety



powrotem na Ziemię



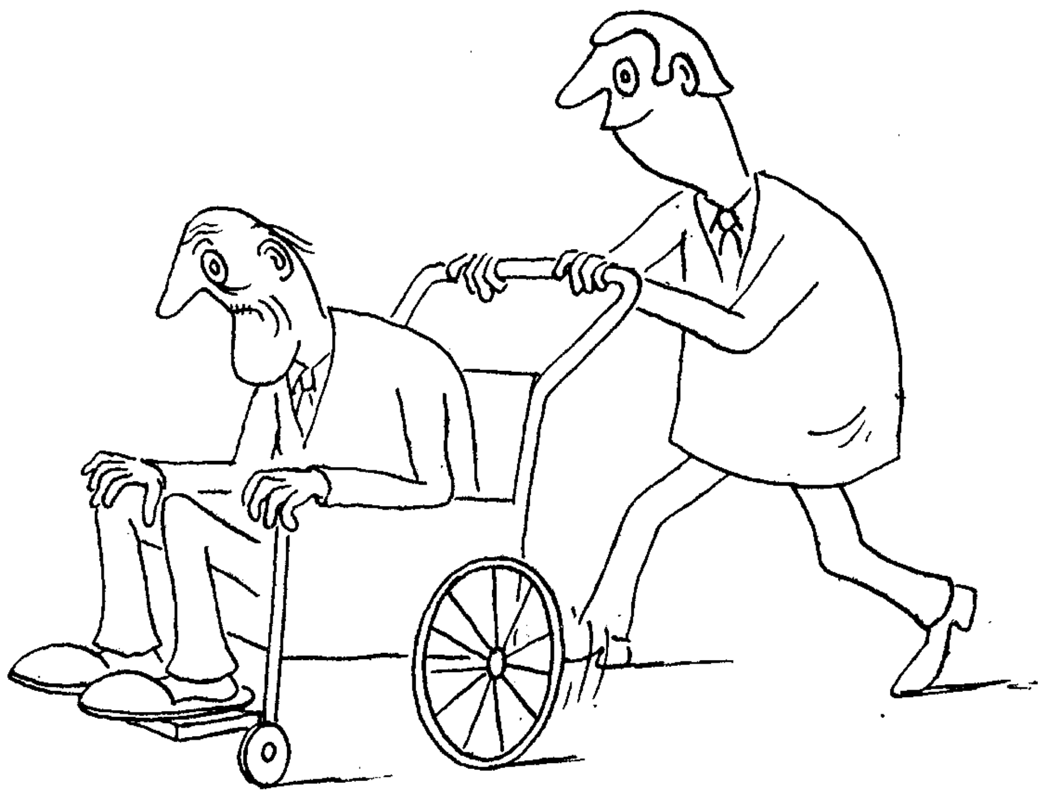
Poruszają się względem siebie z prędkością porównywalną z prędkością światła
$\Rightarrow$ każdy z nich stwierdzi, że jego brat powinien być młodszy (dylatacja czasu)

Paradoks bliźniąt

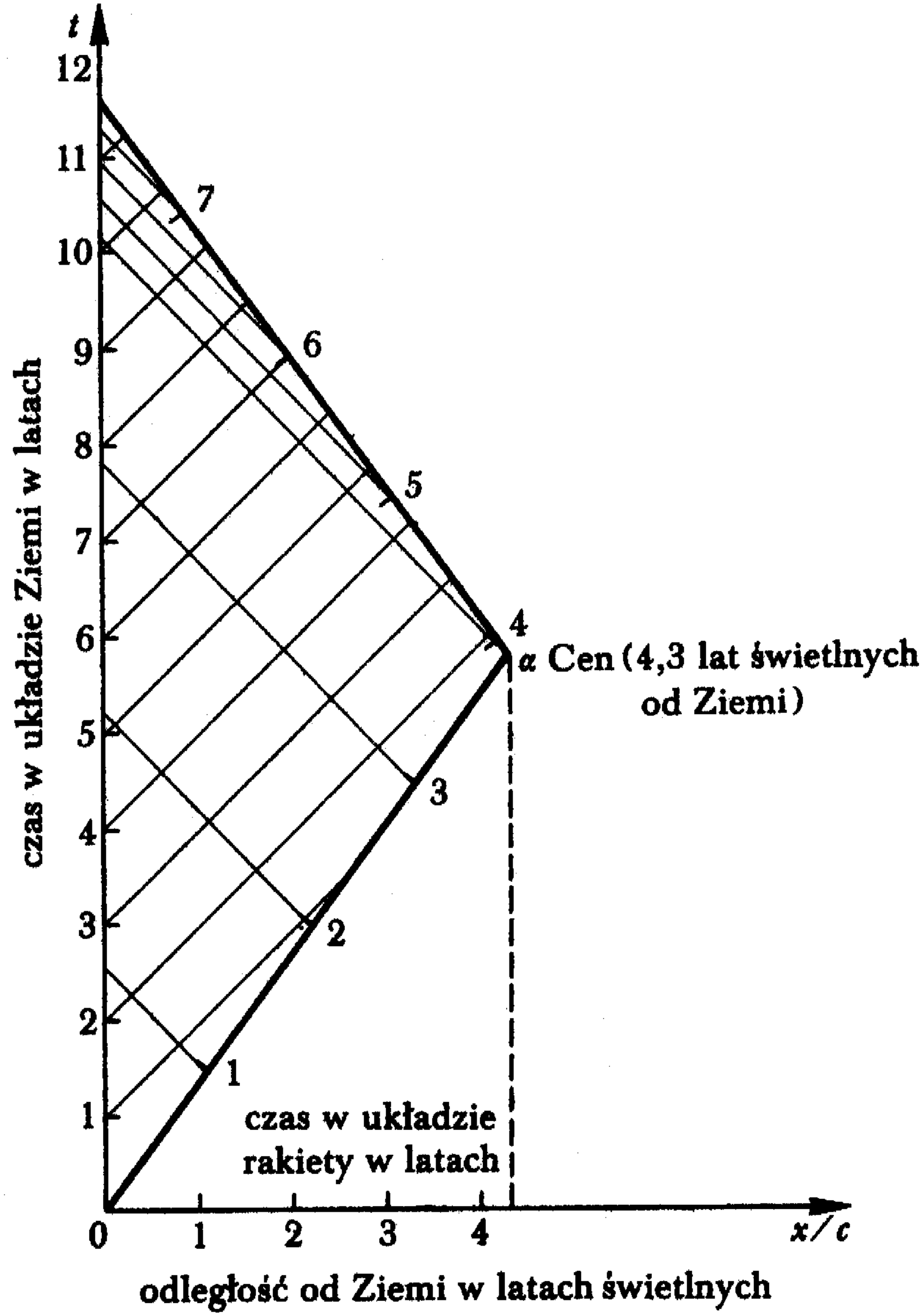
Ale dla obu z nich oba zdarzenia zaszły też w tym samym miejscu

$\Rightarrow$ powinni być w tym samym wieku !

(z niezmienniczości interwału)



Jak rozstrzygnąć czy i który z braci będzie młodszy ?



Paradoks bliźniąt

Przyjmijmy, że podróż odbywa się z prędkością $v = 0.745\ c$ $\quad (\gamma = 1.5)$

Według obserwatora na Ziemi podróż zajmie

$$\frac{2 \times 4.3}{0.745} \approx 11.5 \text{ lat}$$

Dzięki dylatacji czasu, mierzony przez kosmonautę czas podróży skróci się do:

$$\frac{11.5 \text{ lat}}{1.5} \approx 7.7 \text{ lat}$$

⇐ impulsy świetlne wysyłane przez obu braci co rok

Paradoks bliźniąt

Dla kosmonauty odległość skróci się do $\frac{4.3}{1.5} \approx 2.9$ lat świetlnych (skrócenie Lorenza)

Podróż będzie jego zdaniem trwała $\frac{2 \times 2.9}{0.745} \approx 7.7$ lat (to samo powiedział jego brat)

Ale dla kosmonauty bieg zegarów na Ziemi ulega spowolnieniu (dylatacja czasu)

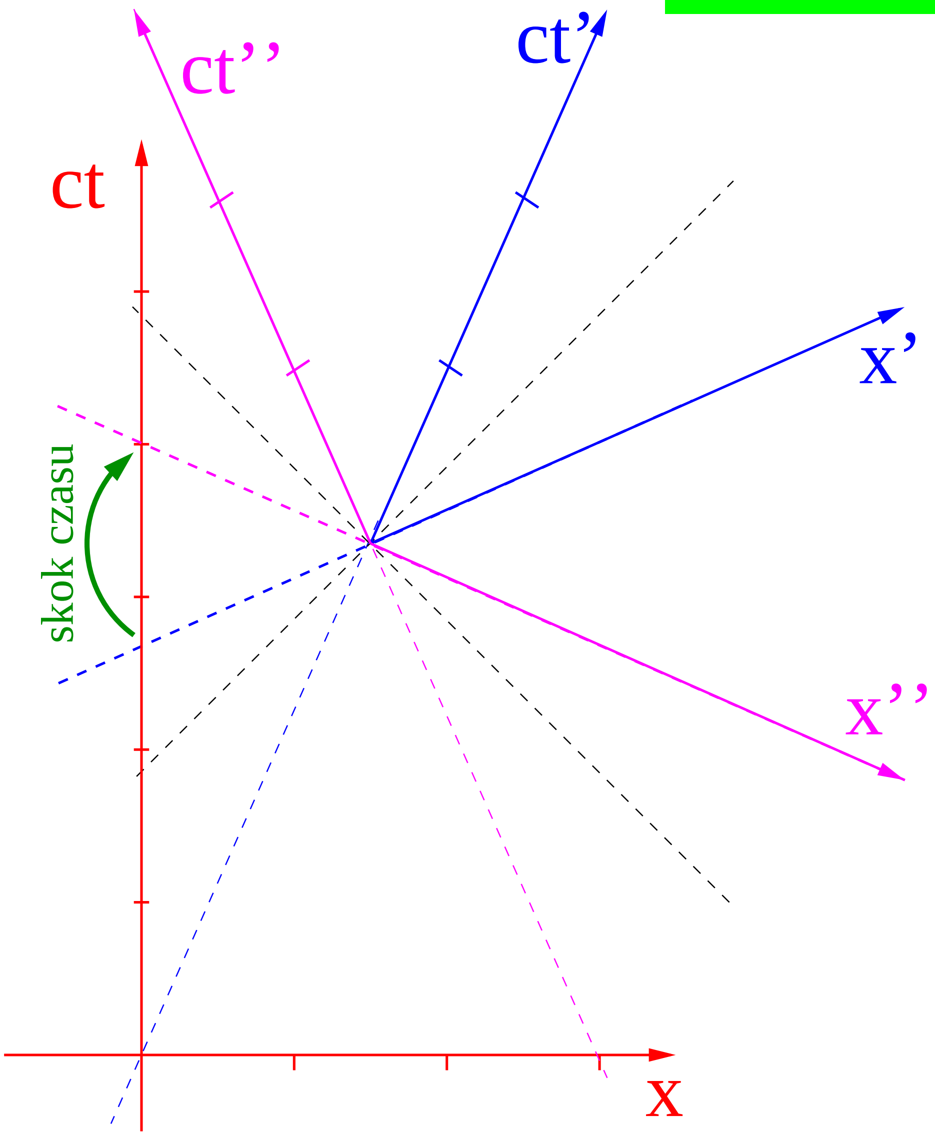
W czasie jego lotu do układu α-Centaura na Ziemi mija tylko $\frac{0.5 \times 7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 2.6$ lat,

tyle samo czasu mija na Ziemi w czasie jego podróży powrotnej.

Łącznie powinno minąć $\frac{7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 5.1$ lat, ale brat na Ziemi stwierdzi, że minęło 11.5 lat

Gdzie znika ponad 6 lat !?

Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi.

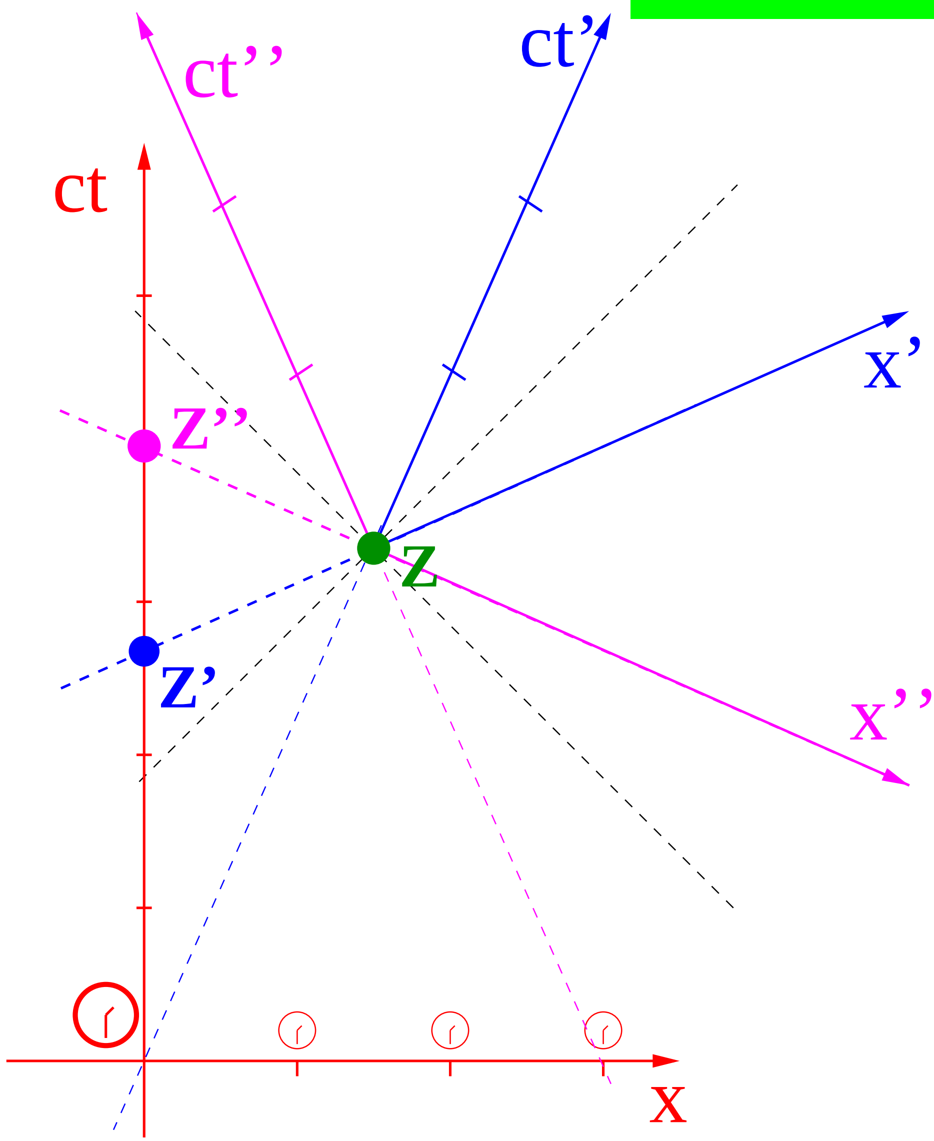
Na zegarze tym przybywa **"skokowo"** ponad 6 lat w momencie zmiany przez kosmonautę układu współrzędnych.

Zegar na Ziemi nie może być wprost porównywany z zegarem kosmonauty
$\Rightarrow$ zawsze porównywany jest z najbliższym zegarem układu współporuszającego się.

$\Rightarrow$ Istotna jest synchronizacja zegarów

Synchronizacja zmienia się przy zmianie układu odniesienia.

Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi porównując go zawsze z najbliższym zegarem jego układu.

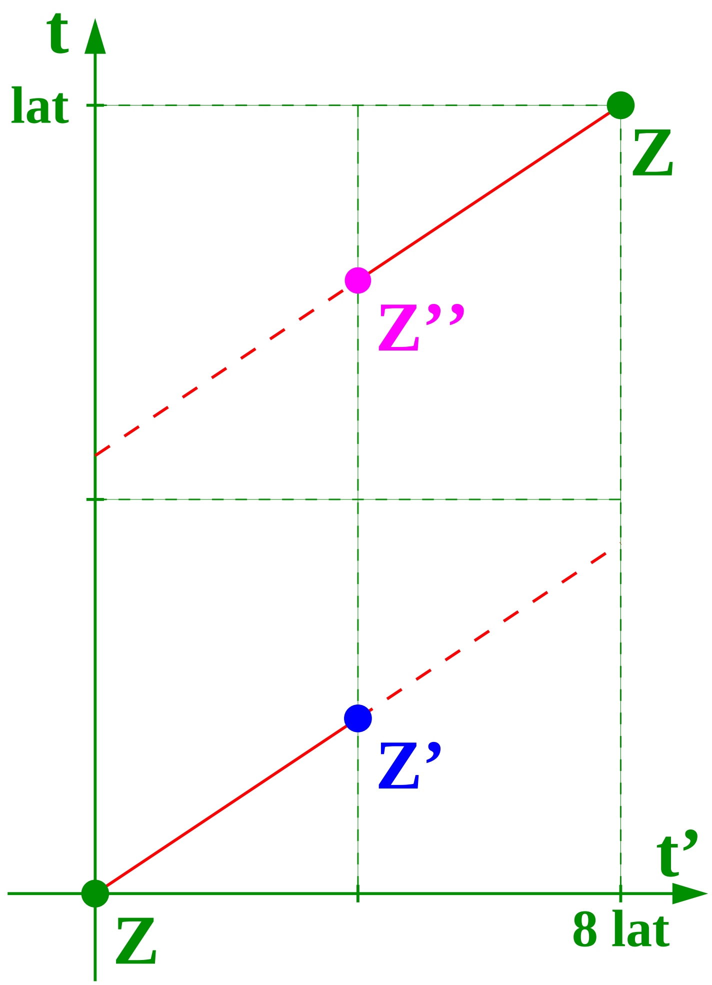
W chwili startu ($t = t' = 0$) jest to jego własny zegar **Z**.

Gdy dotrze do celu są to zegary **Z'** (przed) i **Z"** (po zawróceniu).

Także obserwator na Ziemi może obserwować wskazania zegarów kosmonauty (**Z**, **Z'** i **Z"**) porównując je ze swoją siatką zegarów.

Paradoks bliźniąt

Czas na Ziemi według kosmonauty



Rakieta

Dolatując do celu, po $t' \sim$ 4 latach (według swojego zegara **Z**), kosmonauta stwierdza, że na Ziemi minęło $t <$3 lata.

Kosmonauta opiera się na wskazaniach zegara **Z'** zsynchronizowanego z **Z**.

Po zawróceniu informacja o wskazaniach zegara na Ziemi pochodzi od zegara **Z"**, też zsynchronizowanego z **Z** ale w nowym układzie odniesienia.

Według zegara **Z"** w chwili zawracania zegar na Ziemi wskazywał $t >$9 lat.

Paradoks bliźniąt

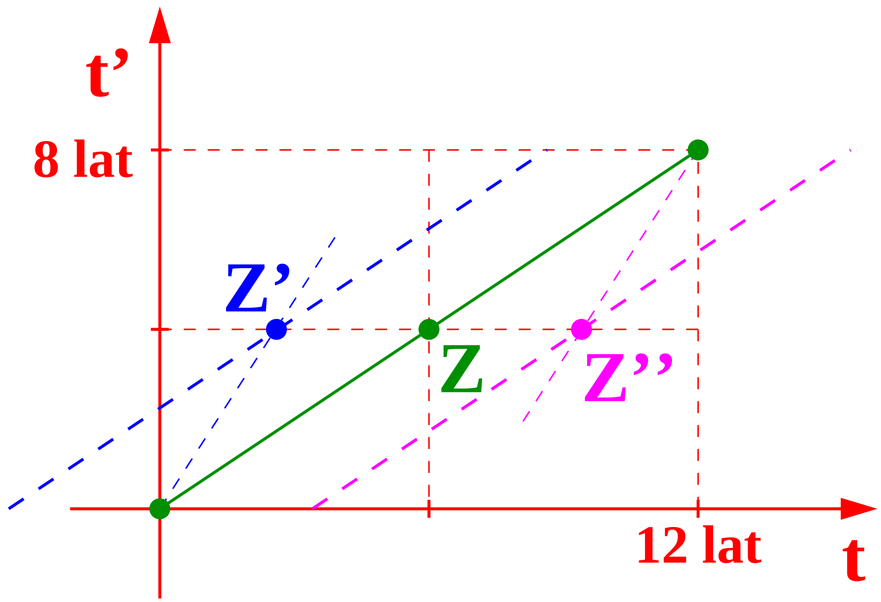
Ziemia

Według obserwatora na Ziemi bieg zegara **Z** kosmonauty jest spowolniony na skutek dylatacji czasu.

Kosmonauta źle ocenił bieg czasu na Ziemi gdyż:

- najpierw użył zegara **Z'** który spieszył się względem **Z**
- potem użył zegara **Z"** który spóźniał się względem **Z**

Wskazania zegarów kosmonauty rejestrowane przez obserwatora na Ziemi



Według obserwatora nia Ziemi, zawrócenie rakiety **Z**, oraz zdarzenia porównania czasu na Ziemi z przelatującymi zegarami **Z'** i **Z"** nie były równoczesne.

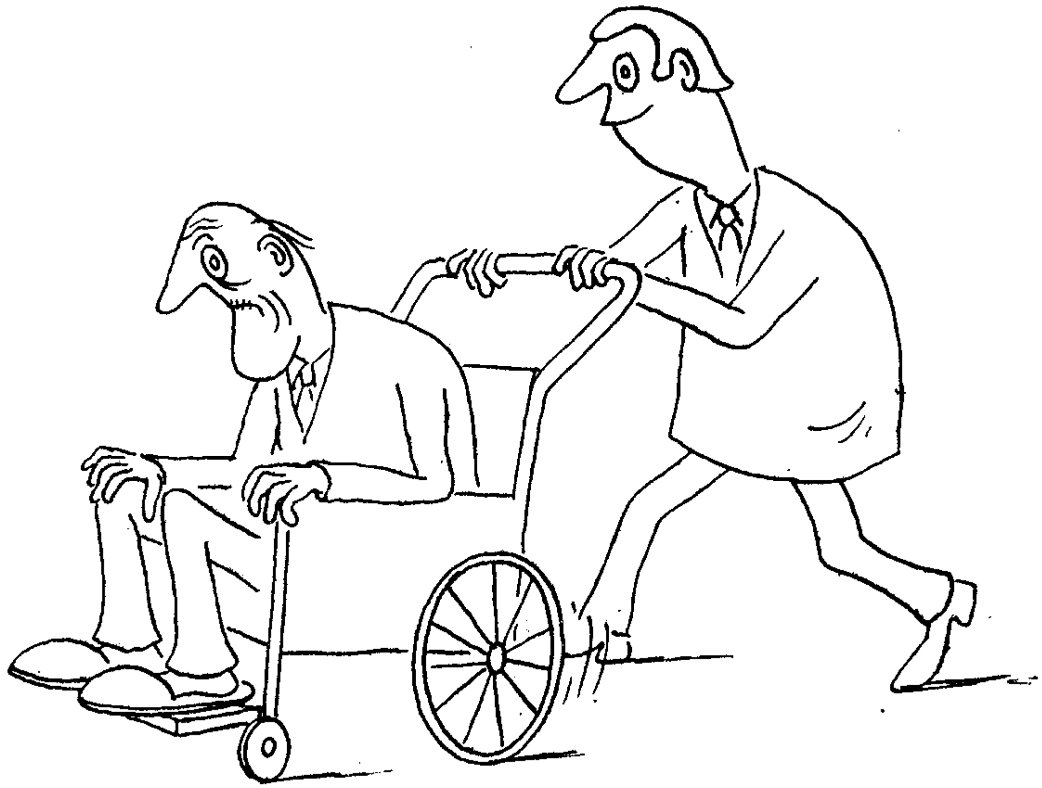
W chwili zawracania zegar **Z'** dawno minął Ziemię, a zegar **Z"** jeszcze do niej nie doleciał.

Paradoks bliźniąt

Dokonany przez kosmonautę pomiar czasu jaki upłynął na Ziemi jest nieprawidłowy, ze względu na zmianę układu odniesienia.

Na ziemi minęło 11.5 lat.

Obaj obserwatorzy zgadzają się, że dla kosmonauty minęło 7.7 lat.



“Ziemianin” kosmonauta