Szczególna teoria względności

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki
Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych
Instytut Fizyki Doświadczalnej

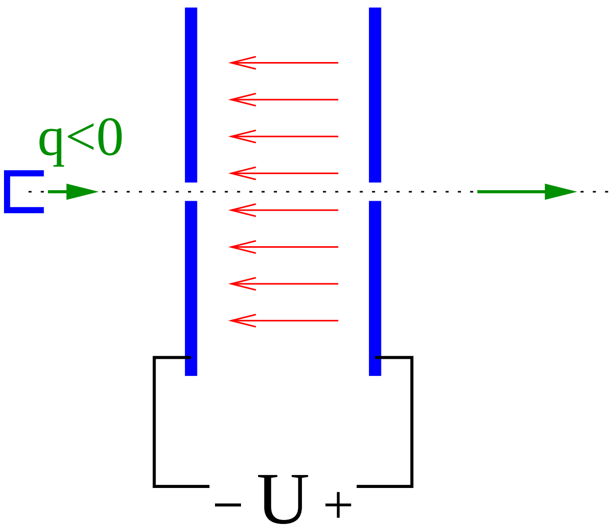
Wykład IV:

- relatywistyczna definicja pędu
- ruch pod wpływem stałej siły
- zasada zachowania energii
- transformacja Lorentza dla energii i pędu
- masa niezmiennicza

Pęd cząstki

Granice podejścia klasycznego

Elektron w kondensatorze
(najprostszy 'akcelerator' cząstek):



Klasycznie:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

Potrafimy wytwarzać pola elektryczne

$$E \sim 10\,MV/m = 10^7\,V/m$$

Dla elektronu:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} kg = 0.5\,MeV/c^2$$
$$|q_e| \equiv 1\,e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$\Rightarrow \quad a \approx 20\,m^{-1} \cdot c^2 \approx 2 \cdot 10^{18} m/s^2$$

W podejściu klasycznym elektron powinien osiągnąć prędkość światła już po przebyciu $\Delta x \approx 2.5\,cm$!!!

$\Rightarrow$ konieczność modyfikacji praw ruchu

Pęd cząstki

Uogólnienie praw ruchu

Załóżmy, ze chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Oznacza to jednak, że musimy zmienić definicję pędu, bo Newtonowska definicja

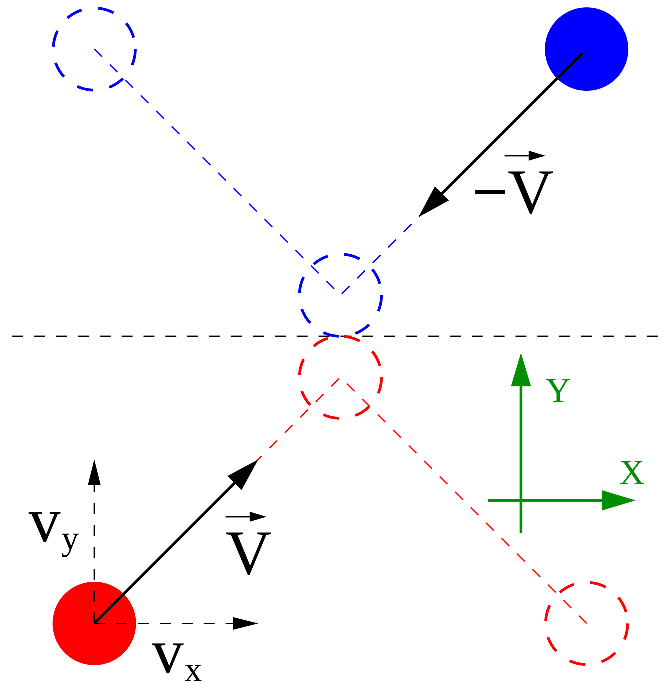
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

ogranicza wartość pędu od góry $(v < c)$
a przecież wciaż mogą działać siły...

Ale może definicja pędu jest OK,
a definicję siły trzeba zmienić?

Doświadczenie myślowe

Zderzenie dwóch kul o jednakowej masie m:

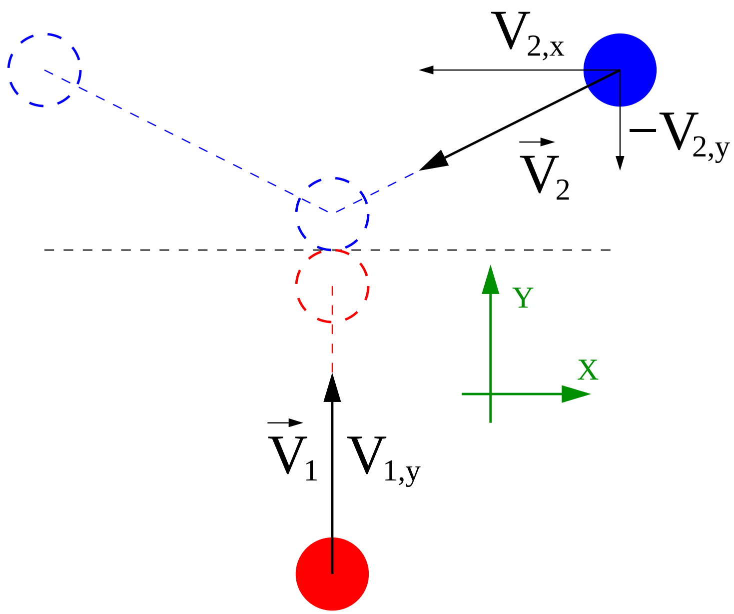


Pędy obu kul są równe co do wartości ale przeciwnie skierowane

Pęd cząstki

Doświadczenie myślowe

Przejdźmy do układu w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Pędy wzdłuż osi Y powinny być równe.

Dwia kule ⇒ dwa układy odniesienia

Wybór jednej z kul łamie symetrię zagadnienia !

Przesunięcia wzdłuż osi Y nie zmieniają się w transformacji Lorentza, ale zmienia się czas w jakim nastęują.

Prędkość wzdłuż osi Y pierwszej kuli:

$$V_{1,y} = \gamma\, V_y$$

Prędkość wzdłuż osi Y drugiej kuli:

$$V_{2,y} = \frac{V_y}{\gamma(1+\beta^2)}$$

$$\beta = \frac{V_x}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}$$

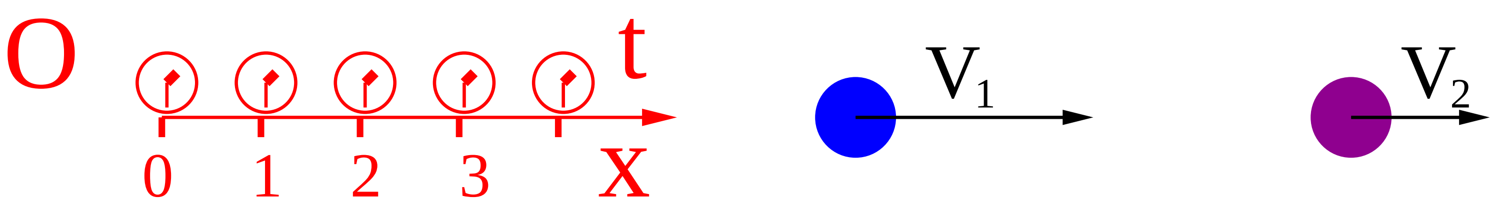
Czyli:

$$m\, V_{1,y} \neq m\, V_{2,y}$$

Zderzenia ciał

Czy możemy z “zasad pierwszych” powiedzieć jakie powinno być wyrażenie na pęd dla cząstek relatywistycznych?

Wyobraźmy sobie dwie identyczne kule lecące (w układzie O) z prędkościami V_1 i V_2 wzdłuż osi X:

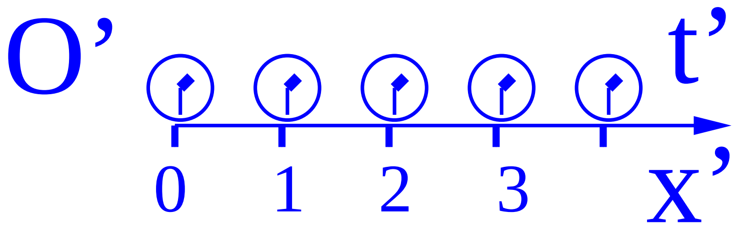


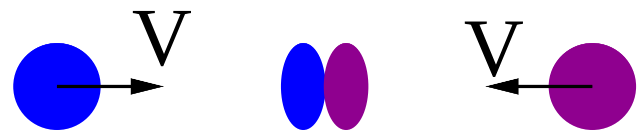
Przyjmijmy, że w którymś momencie ciało 1 dogania ciało 2 i zlepia się z nim.
Jaka będzie prędkość ciał po zlepieniu?

Klasycznie byłoby to $V_c = \frac{V_1 + V_2}{2}$, co wynikało właśnie z zasady zachowania pędu...

Zderzenia ciał

Przejdźmy do układu odniesienia O' związanego z powstającym "zlepkiem".





Ponieważ kule są identyczne z symetrii zagadnienia oczekujemy, że w układzie tym będą miały prędkości równe co do wartości, lecz przeciwnie skierowane.

Wiemy już jednak jak składają się prędkości!

Prędkości w układzie O' wyrażają się przez V_1 i V_2, oraz prędkość O względem O' ($-V_c$)
Ze wzoru na składanie prędkości:

$$V = \frac{V_1 - V_c}{1 - \frac{V_1 V_c}{c^2}} \qquad \text{i} \qquad -V = \frac{V_2 - V_c}{1 - \frac{V_2 V_c}{c^2}}$$

(wartość ujemna prędkości odpowiada zwrotowi przeciwnemu do osi X)

Zderzenia ciał

Dla uproszczenia rachunków wprowadźmy prędkości względne:

$$\beta_1 = \frac{V_1}{c} \qquad \beta_2 = \frac{V_2}{c} \qquad \beta_c = \frac{V_c}{c}$$

Z warunku, że wartości prędkości w układzie O' powinny być takie same otrzymujemy:

$$\frac{\beta_1 - \beta_c}{1 - \beta_1\,\beta_c} = \frac{\beta_c - \beta_2}{1 - \beta_2\,\beta_c}$$

Po przekształceniach:

$$(\beta_1 - \beta_c)(1 - \beta_2\,\beta_c) = (\beta_c - \beta_2)(1 - \beta_1\,\beta_c)$$

$$\beta_1 - \beta_1\,\beta_2\,\beta_c - \beta_c + \beta_2\,\beta_c^2 = \beta_c - \beta_1\,\beta_c^2 - \beta_2 + \beta_1\,\beta_2\,\beta_c$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe na β_c:

$$(\beta_1 + \beta_2)\,\beta_c^2 - 2(1 + \beta_1\,\beta_2)\,\beta_c + (\beta_1 + \beta_2) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4\,(1 + \beta_1\,\beta_2)^2 - 4\,(\beta_1 + \beta_2)^2 = 4\,(1 - \beta_1^2)\,(1 - \beta_2^2) = \frac{4}{\gamma_1^2\,\gamma_2^2}$$

Zderzenia ciał

Rozwiązując równanie wyznaczamy

$$\beta_c = \frac{2(1+\beta_1\,\beta_2) - \frac{2}{\gamma_1\,\gamma_2}}{2(\beta_1+\beta_2)}$$

Przekształcamy dalej to wyrażenie mnożąc licznik i mianownik przez $(\gamma_1+\gamma_2)$:

$$\begin{aligned}
\beta_c &= \frac{1+\beta_1\,\beta_2 - \frac{1}{\gamma_1\,\gamma_2}}{\beta_1+\beta_2} \cdot \frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} \\
&= \frac{\gamma_1+\gamma_2+\beta_1\,\beta_2\,\gamma_1+\beta_1\,\beta_2\,\gamma_2-\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}}{(\beta_1+\beta_2)\cdot(\gamma_1+\gamma_2)} \\
&= \frac{\beta_1^2\,\gamma_1+\beta_2^2\,\gamma_2+\beta_1\,\beta_2\,\gamma_1+\beta_1\,\beta_2\,\gamma_2}{(\beta_1+\beta_2)\cdot(\gamma_1+\gamma_2)}
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z zależności: $\gamma_i - \frac{1}{\gamma_i} = \gamma_i\left(1-\frac{1}{\gamma_i^2}\right) = \gamma_i\,\beta_i^2$

Zderzenia ciał

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\beta_c = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \cdot (\beta_1\,\gamma_1 + \beta_2\,\gamma_2)}{(\beta_1 + \beta_2) \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)}$$

Dla symetrii pomnóżmy licznik i mianownik po lewej stronie przez γ_c:

$$\frac{\beta_c\,\gamma_c}{\gamma_c} = \frac{\beta_1\,\gamma_1 + \beta_2\,\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Wartość ułamka nie zmienia się jeśli licznik i mianownik pomnożymy przez tą samą liczbę (M dla lewej i m dla prawej strony):

$$\boxed{\frac{\beta_c\,\gamma_c\,M}{\gamma_c\,M} = \frac{\beta_1\,\gamma_1\,m + \beta_2\,\gamma_2\,m}{\gamma_1\,m + \gamma_2\,m}}$$

Pęd relatywistyczny

Ale M i m są dowolne! Możemy zawsze tak dobrać stosunek ich wartości, żeby także liczniki i mianowniki po obu stronach równania były sobie równe:

$$\beta_c \, \gamma_c \, M = \beta_1 \, \gamma_1 \, m + \beta_2 \, \gamma_2 \, m$$

$$\gamma_c \, M = \gamma_1 \, m + \gamma_2 \, m$$

Wychodząc z bardzo ogólnych założeń otrzymalismy dwa prawa zachowania!

Symetria + zasada względności + właściwy dobór współczynników M i m

Uogólniając na dowolną liczbę cząstek w stanie początkowym (ini) i końcowym (fin):

$$\sum_{i \in ini} \beta_i \, \gamma_i \, m_i = \sum_{j \in fin} \beta_j \, \gamma_j \, m_j$$

$$\sum_{i \in ini} \gamma_i \, m_i = \sum_{j \in fin} \gamma_j \, m_j$$

Czy możemy zidentyfikować poszczególne człony?

Pęd relatywistyczny

W granicy małych prędkości ($\beta \ll 1$, $\gamma = 1$) równania te sprowadzają sie do

$$c \sum_i \beta_i \, m_i = \sum_i m_i \, V_i = const \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

$$\sum_i m_i = const \quad \text{zasada zachowania masy}$$

Wnioskujemy, że relatywistycznym wyrażeniem na pęd cząstki jest

$$\boxed{p = m \, c \, \gamma \, \beta = m \, \gamma \, V}$$

Wprowadzone współczynniki m są miarą bezwładności ciał i nazywamy je masą.

Jedną z mas mogliśmy ustalić dowolnie - wybór wzorca masy.

Masy pozostałych cząstek można następnie wyznaczyć w oddziaływaniu ze wzorcem (z wyprowadzonych praw zachowania).

Ruch pod wpływem stałej siły

Równanie ruchu

Chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie:

$$\vec{p} = m\,\gamma\,\vec{v} = mc\,\gamma\,\vec{\beta}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

W przypadku ruchu prostoliniowego

$$F = \frac{d}{dt}(mc\,\gamma\,\beta) = mc\,\gamma^3\,\frac{d\beta}{dt}$$

$\Rightarrow$ przyspieszenie maleje jak γ^{-3} !

Rozwiązanie ruchu pod wpływem stałej siły elektrycznej $F = qE$:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{qE}{mc}(1-\beta^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{qE}{mc}\,dt$$

Całkujemy podstawiając $\beta = \sin u$:

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{qE}{mc}\int dt$$

$$\Rightarrow \quad \tan u = \frac{qE}{mc}\cdot t$$

przyjmując, że cząstka spoczywała w $t = 0$

Tożsamość trygonometryczna:

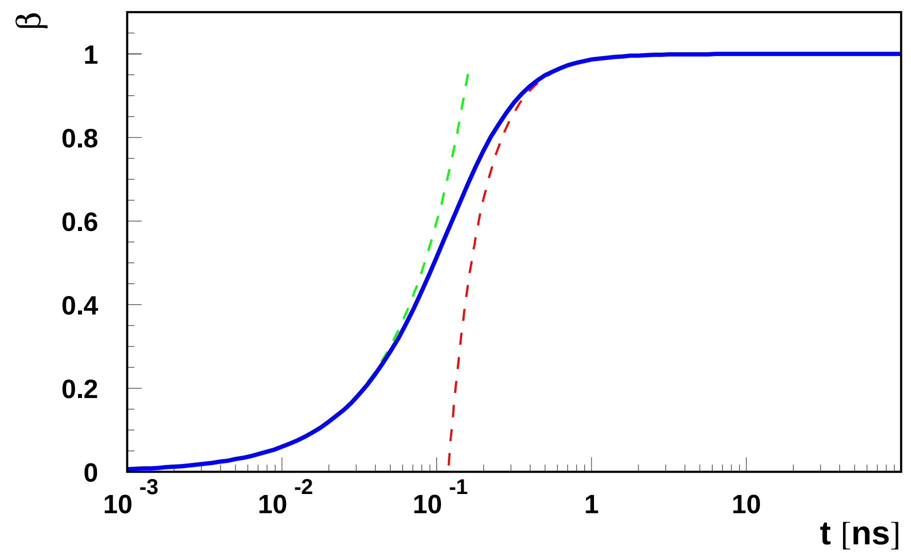
$$\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$$

Ruch pod wpływem stałej siły

Otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

gdzie: $\alpha = \frac{qE}{mc}$



W naszym przykładzie (e^- w polu $10\frac{MV}{m}$)

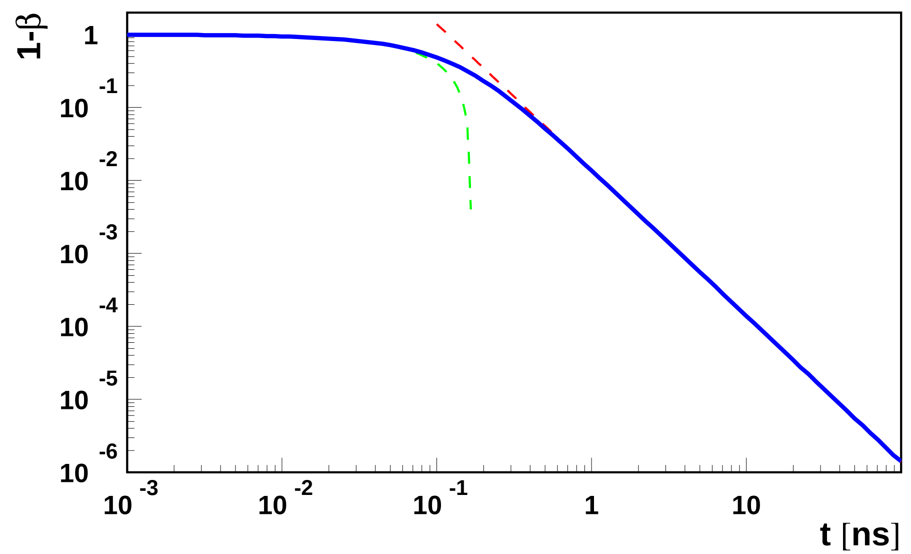
$\alpha \sim 6 \cdot 10^9\ s^{-1}$, $\alpha^{-1} \sim 0.17\ ns$

W granicy $\alpha\, t \gg 1$:

$$1 - \beta(t) \approx \frac{1}{2\alpha^2 t^2}$$

nigdy nie osiągniemy $\beta = 1$

Ale: $p(t) = mc\,\alpha \cdot t$ – rośnie $\sim t$!



Ruch pod wpływem stałej siły

Rozwiązując dalej otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\,\alpha t}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \int dx = \frac{c}{\alpha}\int \frac{\alpha t\; d(\alpha t)}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}}$$

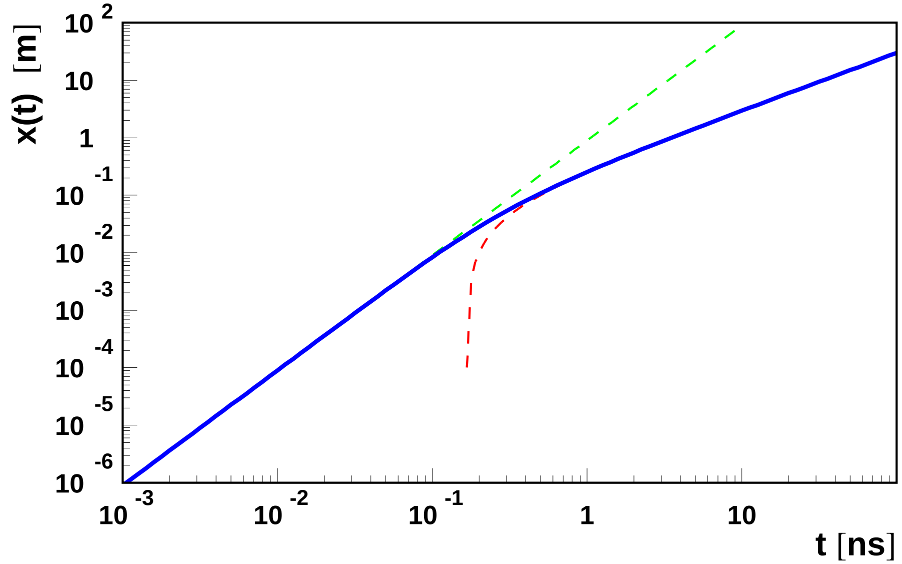
$$= \frac{c}{\alpha}\left(\sqrt{1+(\alpha t)^2} - 1\right)$$

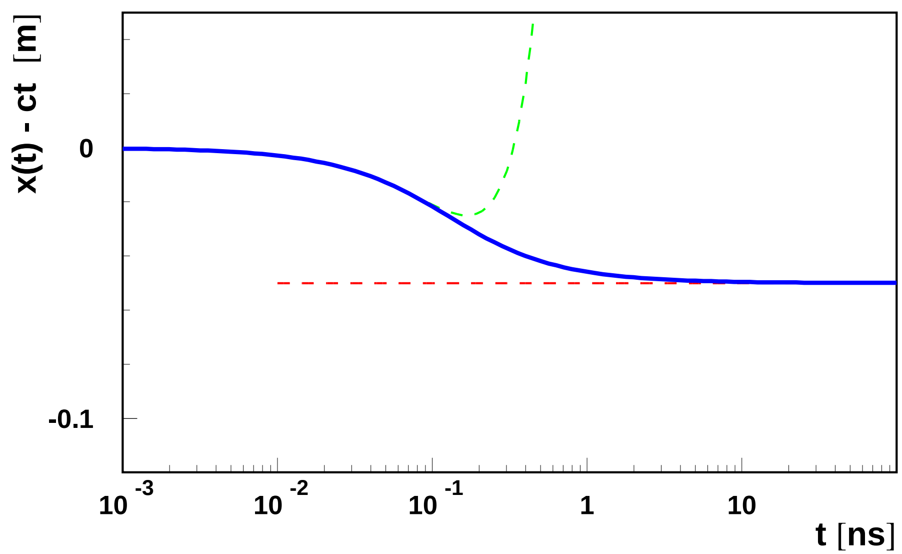
W granicy $\alpha\, t \gg 1$:

$$x(t) \approx c\,t - \frac{c}{\alpha}$$

W naszym przykładzie:

światło wyprzedzi elektron tylko o 5 cm !!!





Energia relatywistyczna

Dla ruchu ciała pod wpływem stałej siły otrzymaliśmy:

$$x(t) = \frac{c}{\alpha}\left(\sqrt{1+(\alpha t)^2} - 1\right)$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}} \qquad \text{gdzie:} \qquad \alpha = \frac{F}{mc}$$

Można zauważyć, że:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \sqrt{1+(\alpha t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{mc^2}{F}(\gamma - 1)$$

Energia kinetyczna jest równa pracy wykonanej przez siłę:

$$E_k(t) = F \cdot x(t) = m\,c^2\,(\gamma(t) - 1)$$

Energia relatywistyczna

Uzyskaną zasadę zachowania:

$$\sum_i \gamma_i \, m_i \, c^2 \; = \; const$$

możemy więc przepisać w postaci:

$$\sum_i \left[m_i \, c^2 \, (\gamma_i - 1) \; + \; m_i \, c^2 \right] \; = \; const$$

$$\sum_i \left[\, E_{k,i} \; + \; E_{0,i} \, \right] \; = \; const$$

Gdzie: $E_k = m \, c^2 \, (\gamma - 1)$ - energia kinetyczna
$E_0 = m \, c^2$ - energia spoczynkowa ciała

Konieczność wprowadzenia energii spoczynkowej wynika z otrzymanej postaci zasady zachowania energii!

Energia całkowita: $\boxed{E \; = \; E_k \; + \; E_0 = \gamma \cdot m \, c^2}$

Energia relatywistyczna

Wyrażenie na energię kinetyczną

$$E_k \;=\; m\,c^2\,(\gamma - 1) \;=\; m\,c^2\,\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

W granicy małych prędkości ($\beta \ll 1$) korzystamy ze wzorów na rozwinięcie w szereg:

$$\sqrt{1+\varepsilon} \;\approx\; 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \;\approx\; 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \gamma \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\approx\; 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$E_k \;=\; m\,c^2\,(\gamma - 1) \;=\; (1 + \frac{1}{2}\beta^2 \;-\; 1) \;=\; \frac{1}{2}m\,c^2\,\beta^2 \;=\; \frac{1}{2}m\,V^2$$

Odtwarzamy klasyczne wyrażenie na energię kinetyczną

Zasady zachowania energii i pędu

Energia całkowita ciała:

$$E = \gamma \cdot m\, c^2$$

pęd ciała:

$$\vec{p} = \gamma \cdot m\, \vec{V}$$

$$c\, \vec{p} = \vec{\beta}\, \gamma \cdot m\, c^2$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

Wychodząc z reguły składania prędkości (zasada bezwładności + zasada względności), wykorzystując symetrię rozważanego zagadnienia (zasada względności) oraz możliwość doboru współczynników opisujących bezwładność ciała (masę) otrzymaliśmy:

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i\, m_i\, c^2 = const$$

zasada zachowania enegrii

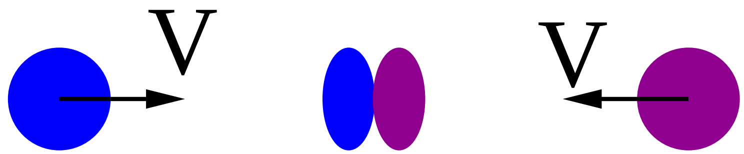
$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i\, \vec{V}_i = const$$

zasada zachowania pędu

Zasady te wyprowadziliśmy dla procesu zderzenia, ale okazuje się, że są one dużo bardziej ogólne. Zasady te obowiązują we wszystkich znanych nam procesach!!!

Zasady zachowania energii i pędu

Zasada zachowania energii ma jednak swoją "cenę"



Z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned} E_c &= E_1 + E_2 \\ M\,c^2 &= \gamma\,m\,c^2 + \gamma\,m\,c^2 \\ M &= 2\,\gamma\,m \end{aligned}$$

Masa "zlepka" jest większa niż suma mas cząstek! $M > m + m$

W świecie relatywistycznym przestaje obowiązywać zasada zachowania masy!

Energia kinetyczna zderzających się cząstek została zamieniona na energię wewnętrzną, co jest równoważne ze wzrostem masy (energii spoczynkowej) "zlepka".

Energia relatywistyczna

Transformacja

Energia spoczynkowa cząstki:

$$E_\circ = m\,c^2$$

Energia całkowita:

$$E = E_\circ + E_k = m\,c^2 \cdot \gamma$$

Wyrażenie na pęd:

$$p = m\,c \cdot \beta\,\gamma$$

W układzie własnym cząstki:

$$p_\circ = 0$$

Zgodnie z definicją układu środka masy.

Możemy zauważyć, że:

$$\begin{aligned} E &= \gamma\,E_\circ \\ p\,c &= \beta\,\gamma\,E_\circ \end{aligned}$$

Jeśli cząstka porusza się wzdłuż osi X:

$$\begin{aligned} E &= \gamma\,E_\circ \\ c\,p_x &= \beta\,\gamma\,E_\circ \\ c\,p_y &= 0 \\ c\,p_z &= 0 \end{aligned}$$

Energia relatywistyczna

Transformacja

Formalnie możemy zapisać:

$(p_\circ = p_{\circ,x} = p_{\circ,y} = p_{\circ,z} = 0)$

$$\begin{pmatrix} E \\ c\,p_x \\ c\,p_y \\ c\,p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,E_\circ + \gamma\,\beta\,c\,p_{\circ,x} \\ \gamma\,\beta\,E_\circ + \gamma\,c\,p_{\circ,x} \\ c\,p_{\circ,y} \\ c\,p_{\circ,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_\circ \\ c\,p_{\circ,x} \\ c\,p_{\circ,y} \\ c\,p_{\circ,z} \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że energia i pęd podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji Lorenza identycznej z transformacją czasu i położenia.

Masa niezmienicza

Niezmiennik transformacji

Z definicji czynnika Lorenza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

$$\gamma^2 E_\circ^2 - \beta^2\gamma^2 E_\circ^2 = E_\circ^2$$

$$\boxed{E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4}$$

niezależnie od prędkości cząstki,

czyli niezależnie od układu odniesienia

Wyrażenie:

$$s = M^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorenza dla dowolnego układu fizycznego

(nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$M \equiv \sqrt{s}$ - masa niezmienicza układu

(masa inwariantna)

Kluczowa wielkość w opisie zderzeń relatywistycznych...

Energia relatywistyczna

Transformacja Lorenza

Transformacja Lorenza ma zastosowanie do wszystkich czterowektorów:

- czterowektor położenia (w czasoprzestrzeni): (ct, x, y, z)
- czterowektor energii-pędu ("czteropęd"): (E, cp_x, cp_y, cp_z)
- czteropotencjał pola elektromagnetycznego: (Φ, A_x, A_y, A_z)

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

- różnica dwóch czterowektorów (np. odstęp między zdarzeniami, przekaz czteropędu...)

Niezmiennikiem transformacji Lorenza jest "kwadrat" każdego czterowektora

$$\left|A^{(4)}\right|^2 = A_0^2 - \left|\vec{A}\right|^2 = A_0^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2$$

- zmiana położenia ⇒ interwał: $s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- energia-pęd ⇒ masa niezmiennicza: $M^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$

Energia relatywistyczna

Linię świata cząstki możemy zparametryzować jej czasem własnym

$$\mathcal{X}(\tau) \;=\; (ct(\tau), \vec{r}(\tau)) \;=\; (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

Czas własny jest miarą odległości czasoprzestrzennej (interwału) między zdarzeniami na lini świata:

$$d\tau \;=\; \sqrt{d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Czterowektor energii-pędu

$$\mathcal{E} \;=\; (E, c\vec{p}) \;=\; (E, cp_x, cp_y, cp_z)$$

możemy zapisać w postaci:

$$\mathcal{E} \;=\; mc\,\frac{d\mathcal{X}}{d\tau} \;=\; mc\,\left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) \;=\; mc\,\left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

Nie musieliśmy rezygnować z klasycznej definicji pędu. Wystarczy, że "zwykłą" prędkość ($\frac{d\vec{r}}{dt}$) zastąpimy "prędkością" liczoną jako pochodna położenia po czasie własnym.

Fundamentalnie nowa jest relatywistyczna koncepcja energii!

$\mathcal{E}$ podlega transformacji Lorentza, gdyż wyraża się przez czterowektor $d\mathcal{X}$ i skalar (niezmiennik) $d\tau$.

Zderzenia relatywistyczne

Układ środka masy

Energia układu cząstek: $E = \sum_i E_i$

Pęd układu cząstek: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

$\Rightarrow$ masa niezmiennicza M

Jak znaleźć układ środka masy $\vec{P}^\star = 0$?

Wiemy, że w CMS $E^\star = M$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} E &= \gamma\, M \\ c\,P &= \beta\,\gamma\, M \end{aligned}$$

Otrzymujemy związki na współczynniki transformacji do układu środka masy:

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= \frac{c\,P}{E} \\ \gamma &= \frac{E}{M\,c^2} \\ \beta\,\gamma &= \frac{P}{M\,c} \end{aligned}}$$

obowiązują zarówno dla pojedyńczej cząstki jak i dowolnego układu cząstek