Szczególna teoria względności

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki
Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych
Instytut Fizyki Doświadczalnej

Wykład VI:

- energia progowa
- foton
- rozpraszanie Comptona
- efekt Doplera

Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia elastyczne $2 \to 2$

Cząstki rozproszone takie same jak cząstki zderzające się.
W szczególności: $m'_1 = m_1$ i $m'_2 = m_2$

W zderzeniach cząstek wysokiej energii jest to jednak wyjątek (!)

Zderzenia nieelastyczne

W oddziaływaniach cząstek elementarnych, zwłaszcza przy wysokiej energii, obserwujemy bardzo wiele reakcji, w których powstają nowe cząstki:

- Rozpady cząstek: $a \to b + c$
- Produkcja pojedyńczej cząstki (tzw. “rezonansu”): $a + b \to c$
- Rozproszenie nieelastyczne dwóch cząstek: $a + b \to c + d$
  jedna z cząstek na końcu może być cząstką stanu początkowego
- Produkcja wielu cząstek: $a + b \to X$
  gdzie X oznacza dowolny stan wielocząstkowy

Zderzenia relatywistyczne

Energia dostępna

w układzie środka masy jest równa masie niezmienniczej zderzających się cząstek $\sqrt{s}$.

Energia dostępna jest to część energii kinetycznej, która może zostać zamieniona na masę (energię spoczynkową) nowych cząstek.

Określoną wartość energii dostępnej możemy uzyskać na rózne sposoby:

Zderzenia z tarczą

Cząstka "pocisk" o energii E uderza w nieruchomą tarczę:

$$s = 2\,E_1\,m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy $E_1 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 2\,E_1\,m_2$$

Wiązki przeciwbieżne

Zderzenia wiązek o energiach E_1 i E_2:

$$s = 2\,E_1\,E_2 + 2\,p_1\,p_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy $E_1 \sim E_2 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 4\,E_1\,E_2$$

Dużo wyższe wartości !!!

Energia progowa

Zderzenia z tarczą

Minimalna energia wiązki E_{min} przy której możliwa jest dana reakcja.

Minimalna masa niezmiennicza:

$$s_{min} = \left(\sum_i m_i\right)^2$$

W zderzeniach z nieruchomą tarczą:

$$s_{min} = 2\,E_{min}\,m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

$\Rightarrow$ minimalna energia całkowita pocisku:

$$E_{min} = \frac{s_{min} - (m_1^2 + m_2^2)}{2\,m_2} = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2\,m_2}$$

$\Rightarrow$ minimalna energia kinetyczna pocisku:

$$E_{k,min} = E_{min} - E_\circ = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2\,m_2}$$

Energia progowa

Zderzenia z tarczą

Związek minimalnej energii kinetycznej pocisku z przyrostem masy:

$$2\,m_2\,E_{k,min} = \left(\sum_i m_i\right)^2_{\text{końcowe}} - \left(\sum_i m_i\right)^2_{\text{początkowe}}$$

$\Rightarrow$ energia kinetyczna pocisku jest "zużywana" na zwiększenie masy układu...

Przykład 1

Produkcja anty-protonów w reakcji $pp \to pppp\bar{p}$ $\quad \sum_i m_i = 4m_p \quad \Delta M = 2m_p$

$$E_{min} = \frac{(4\,m_p)^2 - (m_p^2 + m_p^2)}{2\,m_p} = 7\,m_p$$

$$E_{k,min} = E_{min} - m_p = 6\,m_p \quad \approx 5.63\,GeV$$

Energia progowa

Wiązki przeciwbieżne

Dla wiązek przeciwbieżnych: dla uproszczenia przyjmujemy $E_1 = E_2, m_1 = m_2$

$$s_{min} \approx 4\,E_1\,E_2 = 4\,E_{min}^2$$

$$E_{min} = \frac{1}{2}\sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sum_i m_i)^2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i$$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_i m_i\right)_{\text{końcowe}} - \left(\sum_i m_i\right)_{\text{początkowe}}\right]$$

$\Rightarrow$ energia rośnie liniowo z masą produkowanego stanu (na tarczy: kwadratowo)

$\Rightarrow$ dużo niższe energie potrzebne do wytworzenia tego samego stanu

Przykład 1 (c.d.)

Produkcja anty-protonów w reakcji $p\,p \rightarrow p\,p\,p\,\bar{p}$ $\quad \sum_i m_i = 4\,m_p$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2}\,[4m_p - 2m_p] = m_p \approx 0.94\,GeV$$ na tarczy: $5.63\,GeV$

Energia progowa

Wiązki przeciwbieżne

Przykład 2

Produkcja par bozonów W^+W^- w zderzeniach elektron-pozyton: $e^+ e^- \to W^+ W^-$

Gdybyśmy chcieli użyć pojedyńczej wiązki pozytonów i tarczy $\sum_i m_i = 2\, m_W$

$$E_{min} = \frac{(2\, m_W)^2 - (m_e^2 + m_e^2)}{2\, m_e} \approx \frac{2\, m_W^2}{m_e} \approx 25\,300\,000\, GeV$$

$$m_W = 80.4\, GeV \quad m_e = 0.000511\, GeV$$

Tak ogromnych energii nie jesteśmy w stanie wytworzyć !

Dotychczas wiązki pozytonów $E \approx 100\, GeV$, projektowane $E \approx 1000 - 5000\, GeV$...

Dla przeciwbieżnych wiązek elektron-pozyton: $s \approx 4\, E^2$

$$E_{min} = \frac{1}{2}\sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sum_i m_i\right)^2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i = m_W \approx 80\, GeV$$

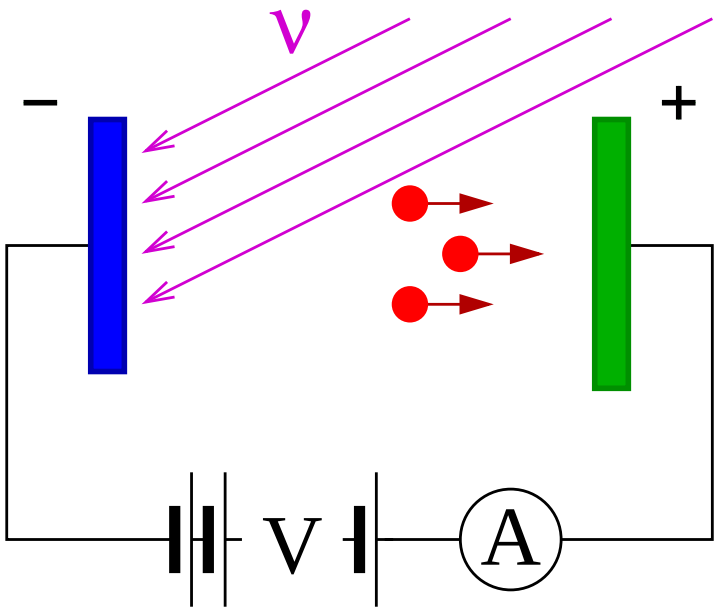
Takie energie to już nie problem...

Odkrycie fotonu

Zjawisko fotoelektryczne

Odkryte przypadkowo przez Hertza w 1887 r.

Światło padając na metalową płytkę powoduje uwalnianie elektronów $\Rightarrow$ przepływ prądu.



Doświadczenia wskazały, że energia uwalnianych elektronów zależy wyłącznie od częstości światła (długości fali) i materiału katody.

Opis falowy przewidywał, że prąd zależy wyłącznie od natężenia światła, a nie zależy od częstości !

Zjawisko fotoelektryczne wyjaśnił Einstein (1905) wprowadzając kwanty światła

FOTONY

Energia foto-elektronów:

$$E_e = E_\gamma - W = h\,\nu - W$$

W - "praca wyjścia",
minimalna energia potrzebna do uwolnienia elektronu z metalu.

Odkrycie fotonu

Natura światła

Fotony to kwanty promieniowania elektromagnetycznego.
Przenoszą oddziaływania między cząstkami naładowanymi.

Mają naturę korpuskularno-falową:

- fala elektromagnetyczna, opisana równaniami Maxwella $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

  podlega interferencji, dyfrakcji, załamaniu

- cząstka o ustalonej energii i pędzie, ale zerowej masie $m_\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \beta \equiv 1$

  może zderzać się z innymi cząstkami, być pochłaniana lub rozpraszana

Im wyższa częstość (mniejsza długość fali) promieniowania,
tym wyższa energia pojedyńczego fotonu $\Rightarrow$ wyraźniejsze efekty korpuskularne

$$E_\gamma = p_\gamma c = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad \lambda \cdot \nu = c$$

W zjawisku fotoelektrycznym, foton "zderza się" z elektronem, $\gamma + e^- \to e^-$
(proces typu $2 \to 1$), i przekazuje mu energię konieczną do opuszczenia metalu.

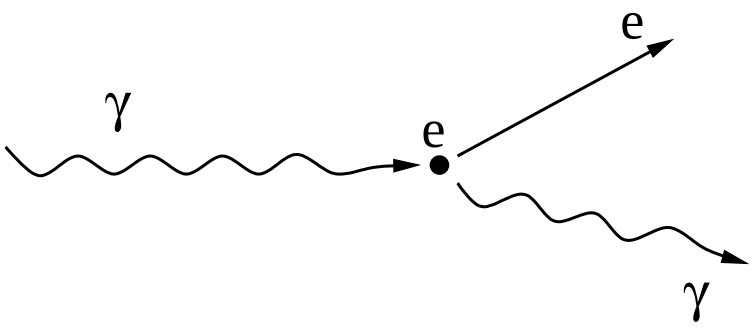
Efekt Comptona

Rozpraszanie fotonów

W wyniku rozpraszania w materii, promieniowanie X stawało się mniej przenikliwe $\Rightarrow$ zmieniało długości fali

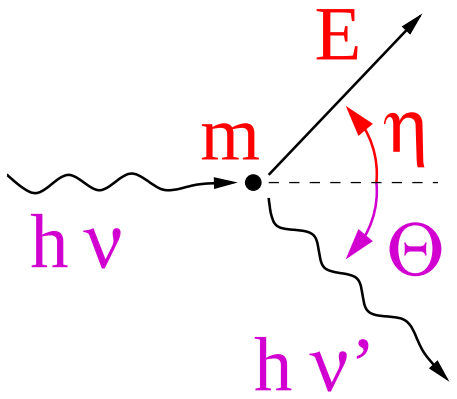
Opis tego zjawiska zaproponował w 1923 roku A.H.Compton.

Fotony promieniowania X rozpraszają się na elektronach w atomie



oddając im część swojej energii.

Relatywistyczne zderzenie dwóch ciał tak samo jak w przypadku cząstek



Zasady zachowania:

$$E: \quad h\nu + m = h\nu' + E$$
$$p_{\parallel}: \quad h\nu = h\nu' \cos\theta + p\cos\eta$$
$$p_{\perp}: \quad 0 = h\nu' \sin\theta - p\sin\eta$$

Efekt Comptona

Przekształcając otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E &= h(\nu - \nu') + m \\ p\cos\eta &= h(\nu - \nu'\cos\theta) \\ p\sin\eta &= h\nu'\sin\theta \end{aligned}$$

Podnosząc stronami do kwadratu i zestawiając do masy elektronu:

$$\begin{aligned} m^2 &= E^2 - p^2 \\ &= \left(h(\nu-\nu') + m\right)^2 - h^2\left(\nu - \nu'\cos\theta\right)^2 - \left(h\nu'\sin\theta\right)^2 \\ &= m^2 + h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + 2mh(\nu-\nu') \\ &\quad -h^2\nu^2 + 2h^2\nu\nu'\cos\theta - h^2\nu'^2\cos^2\theta - h^2\nu'^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad m\,h\nu = h\nu'\left(m + h\nu(1-\cos\theta)\right)$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m}(1-\cos\theta)} \qquad \lambda' = \lambda + \frac{h}{m\,c}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{h}{m\,c} = 2.43\cdot 10^{-12} m = 2.43\,pm$$

Efekt Comptona

Małe energie fotonów

W granicy małych energii fotonu $h\nu \ll m$

$$h\nu' = h\nu \frac{m}{m + h\nu(1-\cos\theta)} \approx h\nu$$

$\Rightarrow$ foton rozprasza się bez straty energii.

Odpowiada to klasycznemu zderzeniu "pocisku", m_1, z dużo cięższą "tarczą", $m_2 \gg m_1$.

Foton zachowuje energię, ale zmienia się wektor pędu (kierunek !)

Przykład: odbicie światła widzialnego
$h\nu = 1.8 - 3.1eV$ (700 nm - 400 nm)

Energia rozproszonego elektronu:

$$E = h\nu - h\nu' + m$$
$$= \frac{h\nu(h\nu+m)(1-\cos\theta)+m^2}{h\nu(1-\cos\theta)+m}$$

W granicy $h\nu \ll m$:

- energia elektronu:

$$E \approx m$$

- pęd rozproszonego elektronu:

$$p \approx h\nu\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

Efekt Comptona

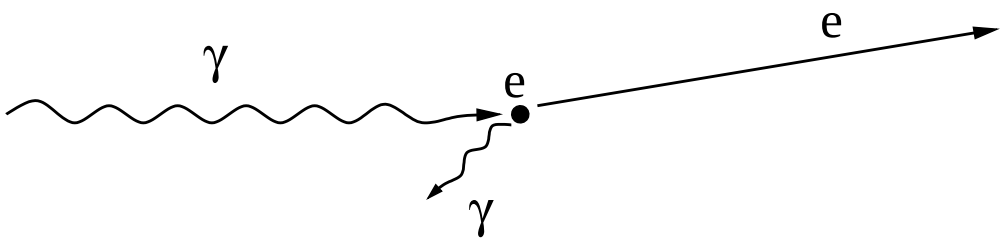
Duże energie fotonów

W granicy dużych energii fotonu $h\nu \gg m$ (przyjmując $\cos\theta \neq 1$, czyli $\theta \neq 0$)

$$h\nu' \approx \frac{m}{1-\cos\theta} \to 0$$

$$E \approx h\nu + m$$

$\Rightarrow$ foton przekazuje spoczywającemu elektronowi praktycznie całą swoją energię



Odpowiada to klasycznemu zderzeniu ciał o równych masach (zakładając zderzenie centralne i elastyczne)

Dla $h\nu \gg m$ masę elektronu można pominąć - elektron, tak jak foton, można traktować jako cząstkę bezmasową.

Efekt Comptona

Rozpraszanie do tyłu

W rozpraszaniu na spoczywającym elektronie najniższą energię będzie miał foton rozproszony "do tyłu" ($\cos\theta = -1$):

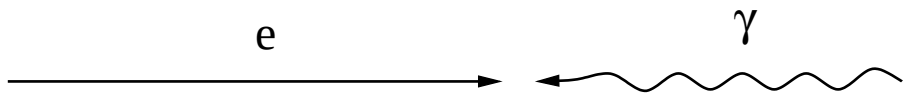
$$h\nu' = \frac{h\nu \cdot m}{2h\nu + m} < h\nu$$

To, że foton zawsze traci energię zwiazane jest jednak z wyborem układu odniesienia!

(układ związany z elektronem)

Rozpraszanie na wiązce elektronów

Możemy jednak rozważyć rozpraszanie fotonów o energii $h\nu$ na przeciwbieżnej wiązce elektronów o energii $E_e \gg m$.



Transformacja Lorenza do układu elektronu:

$$\gamma = \frac{E_e}{m}$$
$$\beta \approx 1$$

Energia fotonu w układzie elektronu:

$$h\nu^\star = \gamma(1+\beta)h\nu \approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu \gg h\nu$$

Photon Collider

Rozpraszanie na wiązce elektronów

Przyjmijmy, że foton rozprasza się "do tyłu" ($\cos\theta = -1$). Energia rozproszonego fotonu w układzie elektronu:

$$h\nu^{\star\prime} = \frac{h\nu^{\star} \cdot m}{2h\nu^{\star} + m}$$

$$\approx \frac{2E_e\, h\nu \cdot m}{4E_e\, h\nu + m^2}$$

Wracając do układu laboratoryjnego: (transformacja taka sama, bo pęd foton zmienił kierunek)

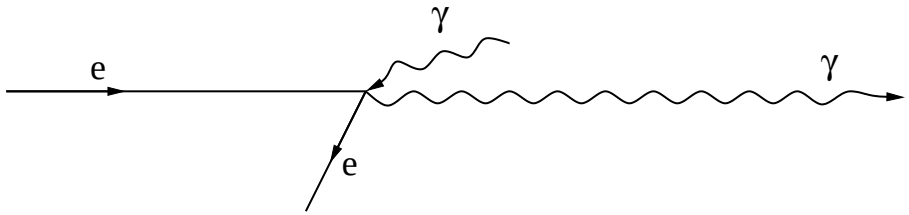
$$h\nu' \approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu^{\star\prime}$$

Otrzymujemy:

$$h\nu' \approx E_e \cdot \frac{4E_e\, h\nu}{4E_e\, h\nu + m^2}$$

Wysoke energia wiązki, $4E_e\, h\nu \gg m^2$

$\Rightarrow$ elektron może przekazać fotonowi większość swojej energii.



Przykład: dla $E_e = 250GeV$ i $h\nu = 1eV$

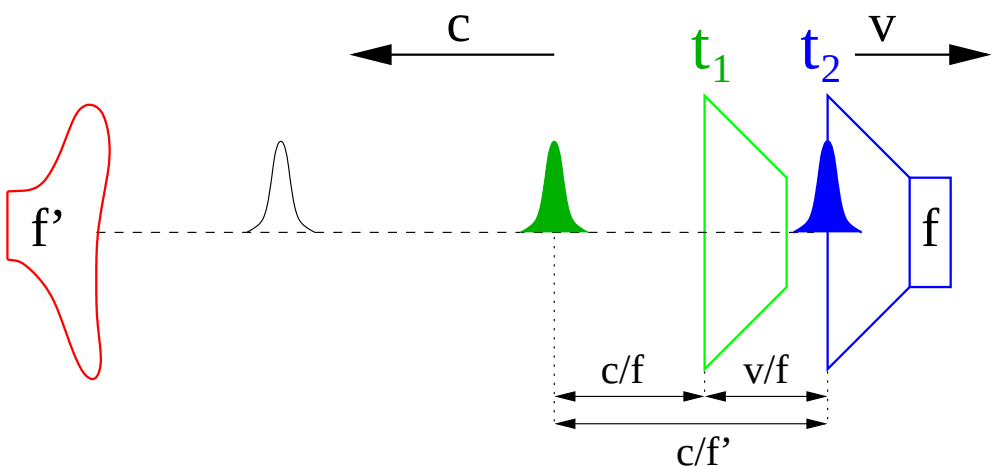
$h\nu' \approx 200GeV$

Efekt Dopplera

Przypadek klasyczny (I)

źródło dźwięku o częstości ν poruszające się z prędkością v
względem ośrodka w którym prędkość dźwięku wynosi c.

Dla uproszczenia: krótkie impulsy wysyłane co $\Delta t = 1/\nu$:



t_1 - wysłanie pierwszego impulsu

t_2 - wysłanie drugiego impulsu

odległość między impulsami:

$$\frac{c}{\nu'} = \lambda' = \frac{c}{\nu} + \frac{v}{\nu}$$

ruch impulsu ruch źródła

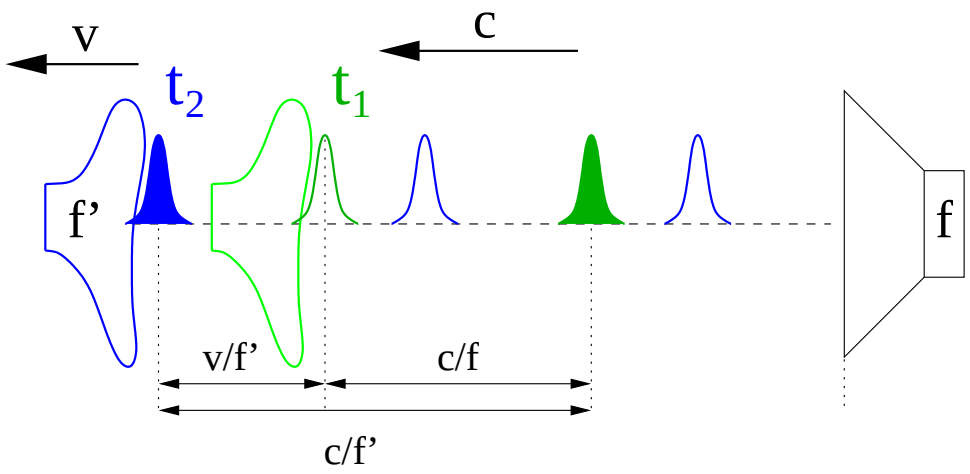
Częstość dźwięku i długość fali
mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{v}{c}\right) \qquad \nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}$$

Efekt Dopplera

Przypadek klasyczny (II)

obserwator porusza się z prędkością v względem ośrodka i źródła dźwięku



aby dogonić obserwatora impuls musi pokonać odległość

$$\frac{c}{\nu'} = \lambda' = \frac{c}{\nu} + \frac{v}{\nu'}$$

odległość początkowa — ruch obserwatora

Mierzona częstość i długość fali:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{c}}$$

W klasycznym efekcie Dopplera zmiana częstości zależy nie tylko od względnej prędkości źródła i obserwatora ale i ruchu względem ośrodka.

Efekt Dopplera

Przypadek relatywistyczny

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

$\Rightarrow$ należy uwzględnić dylatację czasu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

Ruchome źródło

Poruszające się źródło drga z częstością γ razy mniejszą:

$$\nu' = \frac{\nu/\gamma}{1+\beta} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Ruchomy obserwator

Dla poruszającego się obserwatora czas biegnie wolniej, mierzona częstość jest γ razy większa:

$$\nu' = \gamma\,\nu\,(1-\beta) = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$\Rightarrow$ Pełna symetria !

Efekt Dopplera

Ruch źródła

Wysłanie impulsu w układzie O':

$$A \;:\; (T, 0, 0, 0)$$

W układzie O: $(c = 1)$

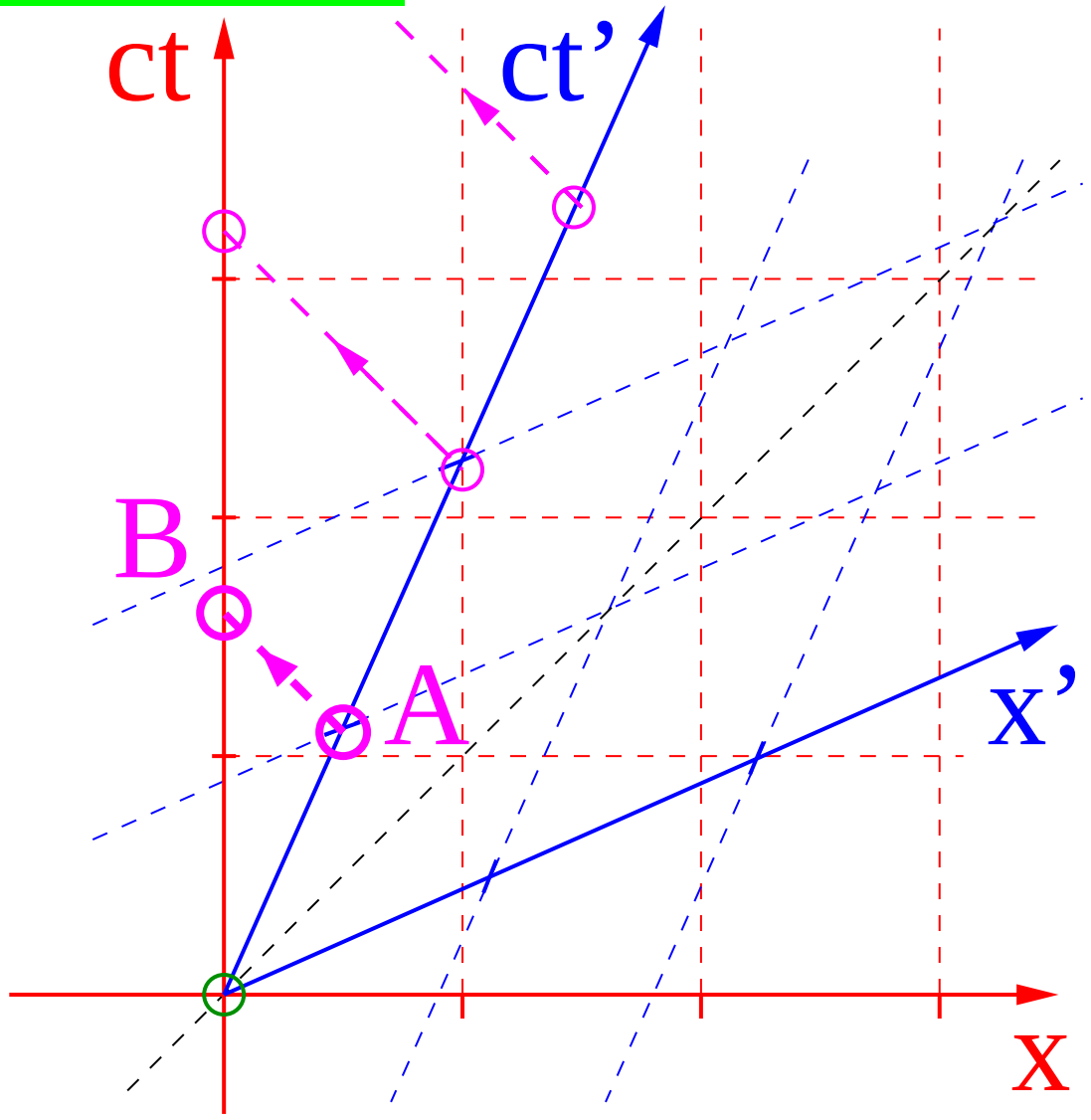
$$A \;:\; (\gamma\, T, \beta\gamma\, T, 0, 0)$$

Na pokonianie odległości $\beta\gamma T$ światło potrzebuje $\beta\gamma\, T$ czasu

$\Rightarrow$ dotarcie impulsu światła do obserwatora O:

$$B \;:\; (\gamma\, T + \beta\gamma\, T, 0, 0, 0)$$

$$T' \;=\; \gamma(1+\beta)\, T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, T$$



Efekt Dopplera

Wysłanie impulsu w układzie O:

$$A \;:\; (T,0,0,0)$$

Dotarcie impulsu do obserwatora O':

$$B \;:\; (T+\Delta T, \Delta T, 0, 0)$$

Prędkość O' względem O:

$$\beta = \frac{\Delta T}{T+\Delta T} \;\Rightarrow\; \Delta T = \frac{\beta}{1-\beta}\,T$$

Współrzędne dotarcia impulsu w O:

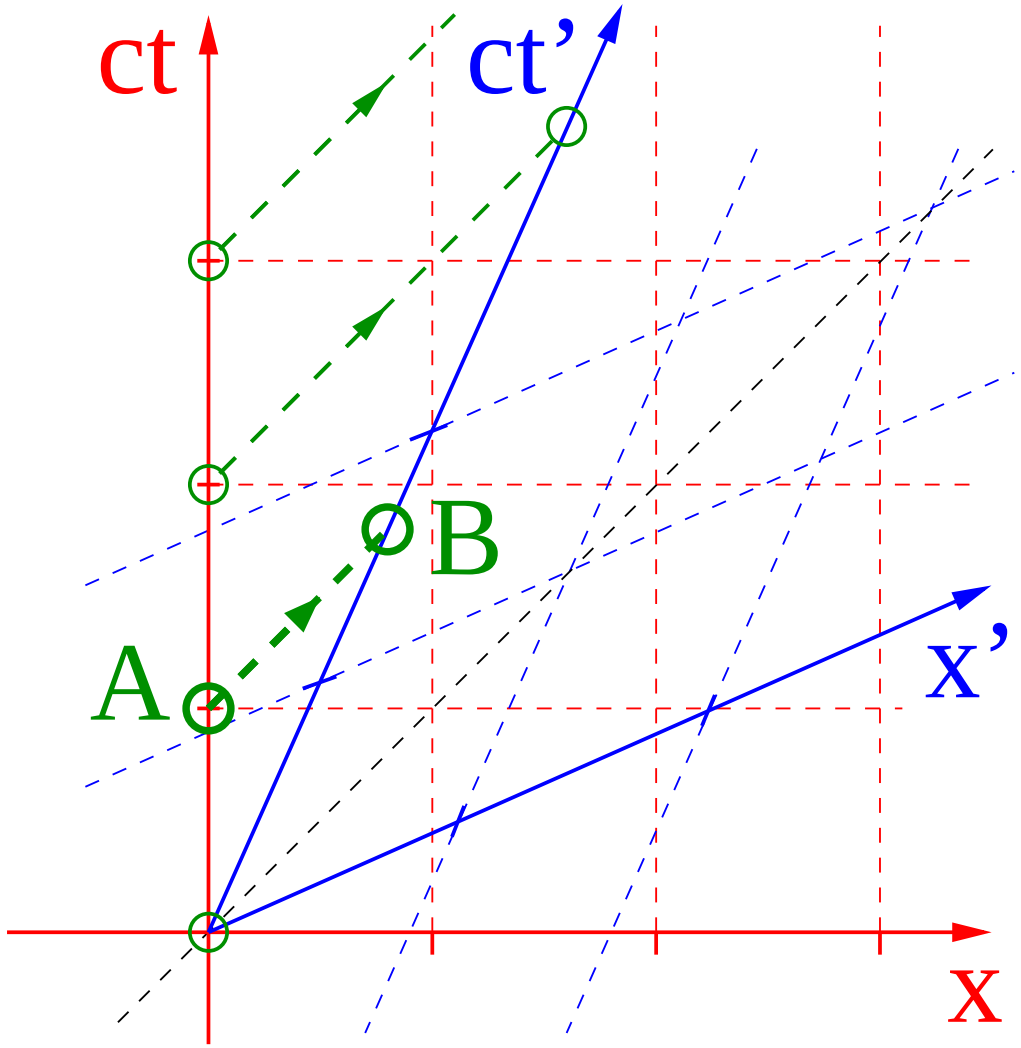
$$B \;:\; (\frac{T}{1-\beta}, \frac{\beta\,T}{1-\beta}, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ według O' (dylatacja czasu)

$$B \;:\; (\frac{T}{\gamma(1-\beta)}, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow\; T' \;=\; \frac{T}{\gamma(1-\beta)} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,T$$

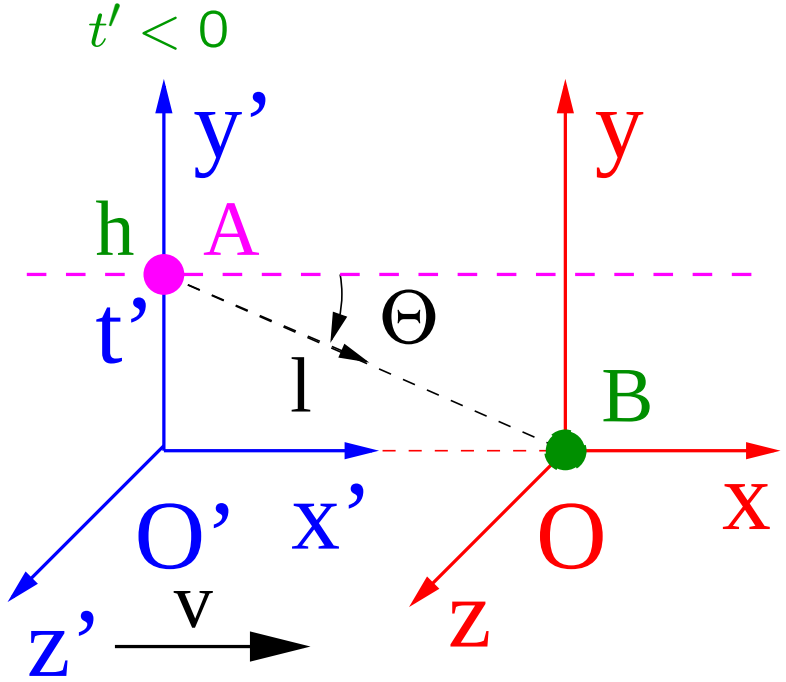
Ruch obserwatora



Efekt Dopplera

Przypadek ogólny

Źródło światła przelatuje w odległości h od obserwatora:



t - czas wysłania impulsu mierzony w układzie O':

$$A \;:\; (t', 0, h, 0)$$

Współrzędne tego zdarzenia w układzie O:

$$A \;:\; (\gamma\, t', \gamma\beta\, t', h, 0)$$

$\Rightarrow$ czas dotarcia impulsu do obserwatora O (B):

$$t \;=\; \gamma t' + l \;=\; \gamma t' + \sqrt{(\gamma\beta t')^2 + h^2}$$

Różnica dt między czasami dotarcia dwóch impulsów wysłanych w odstępie czasu dt'

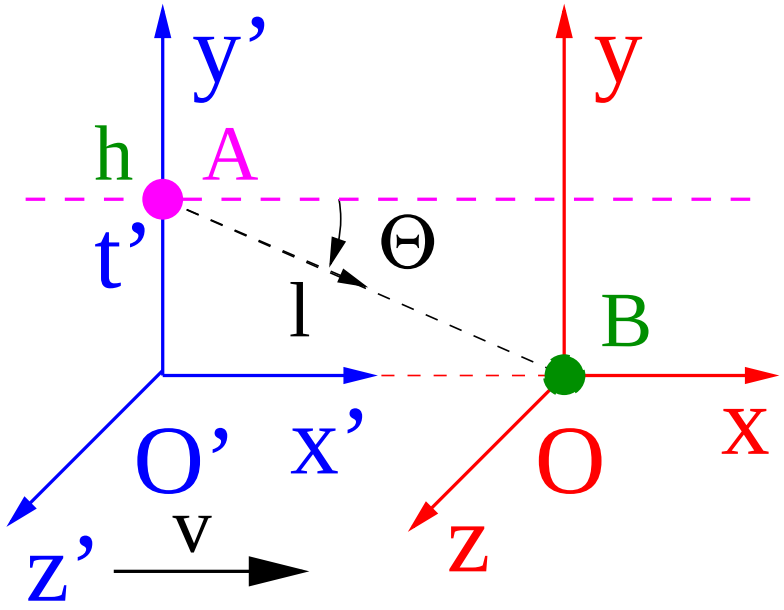
$\Rightarrow$ współczynnik przesunięcia dopplerowskiego:

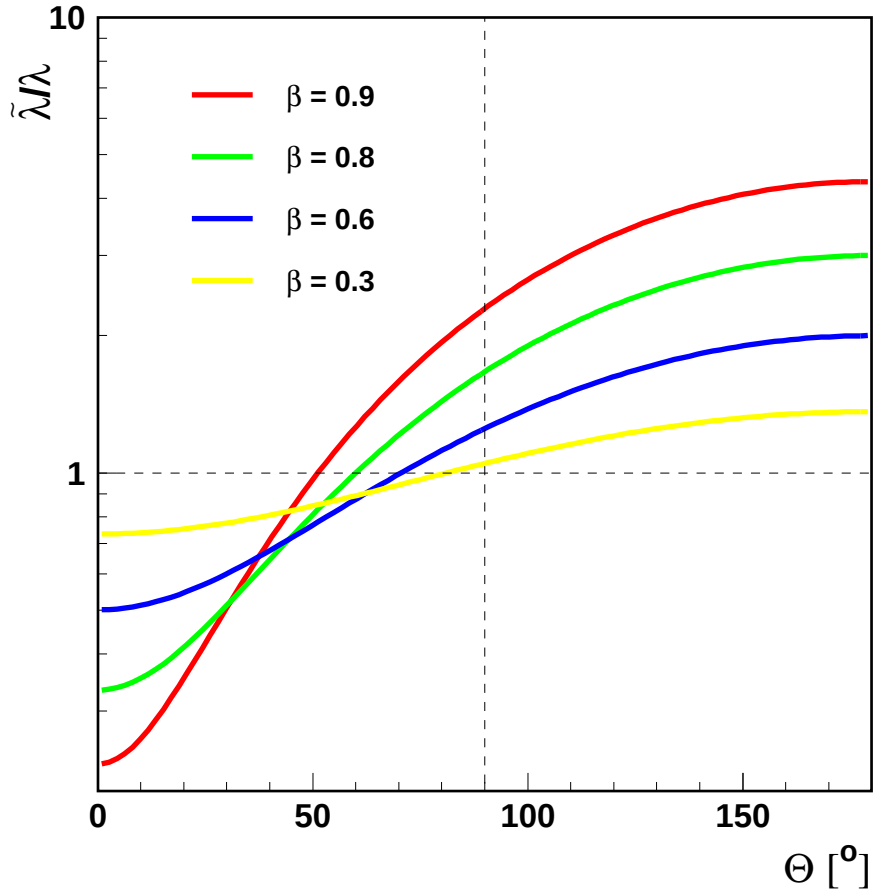
$$\text{mierzona} \quad \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \frac{dt}{dt'} \;=\; \gamma + \frac{\gamma^2\beta^2 t'}{\sqrt{(\gamma\beta t')^2 + h^2}} \;=\; \gamma\left(1 + \beta\,\frac{x}{l}\right) \;=\; \gamma\,(1 - \beta\,\cos\Theta)$$

Θ - rejestrowany w O kąt lotu fotonu, $(\pi - \Theta)$ - kierunek obserwacji (!)

Efekt Dopplera

Przypadek ogólny





Przesunięcie długości fali:

mierzona / emitowana $\quad \dfrac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \dfrac{\tilde{T}}{T} = \gamma\,(1 - \beta\cos\Theta)$

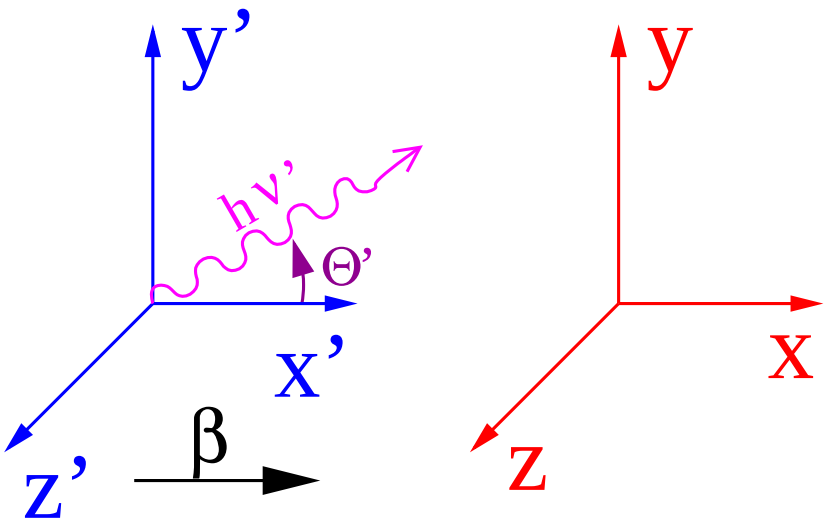
Zmiana częstości także dla $\Theta = 90^\circ$!!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

Efekt Dopplera

Alternatywne podejście

Wyrażenia na relatywistyczny efekt Dopplera (dla światła) wynikają wprost z transformacji Lorenza !



Foton o energii $E' = h\nu'$ emitowany jest pod kątem θ' w układzie O'.

$$p'_x = E' \cos\theta' \qquad p'_y = E' \sin\theta'$$

W układzie O z transformacji Lorenza:

$$\begin{aligned} h\nu = E &= \gamma E' + \beta\gamma p'_x \\ &= h\nu'\gamma(1 + \beta\cos\theta') \end{aligned}$$

Dla $\theta' = 0$ mamy:

$$\nu = \nu' \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

częstość (energia) rośnie

Dla $\theta' = \pi$ mamy:

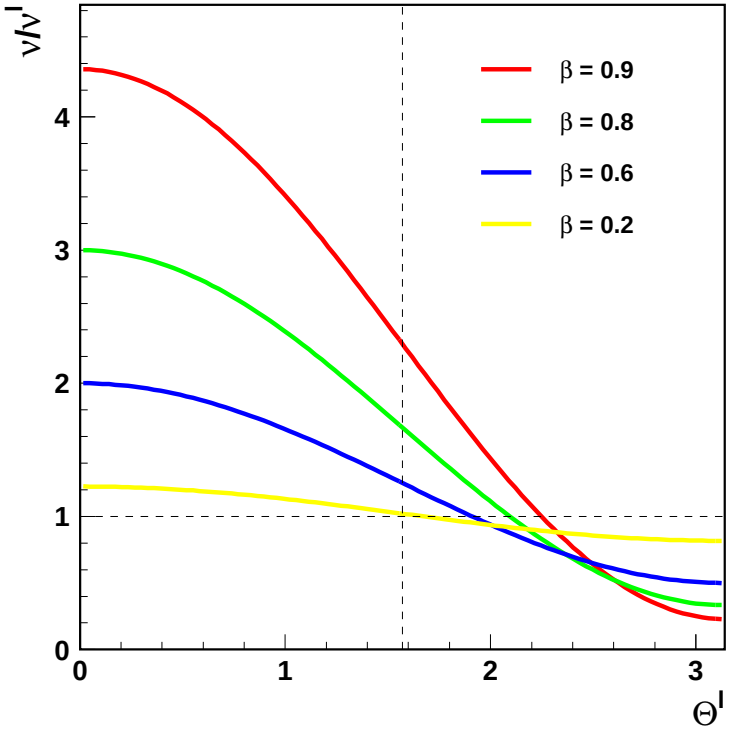
$$\nu = \nu' \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

częstość (energia) maleje

Efekt Dopplera

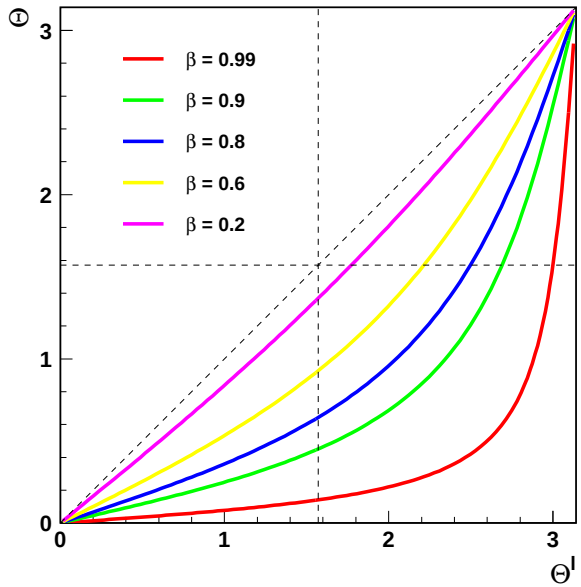
Rozkłady kątowe

Zależność częstości od kąta **emisji**



Obserwowany kąt lotu fotonu:

$$\cos\theta = \frac{p_x}{E} = \frac{\beta + \cos\theta'}{1 + \beta\cos\theta'}$$



Dla $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nu = \gamma\,\nu' > \nu'$

poprzeczny efekt Dopplera

Dla $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = \beta \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

Izotropowe promieniowanie szybko poruszającego się ciała jest skolimowane w kierunku ruchu...

Efekt Dopplera

Rozkłady kątowe

Mamy:

$$\nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos\theta')$$

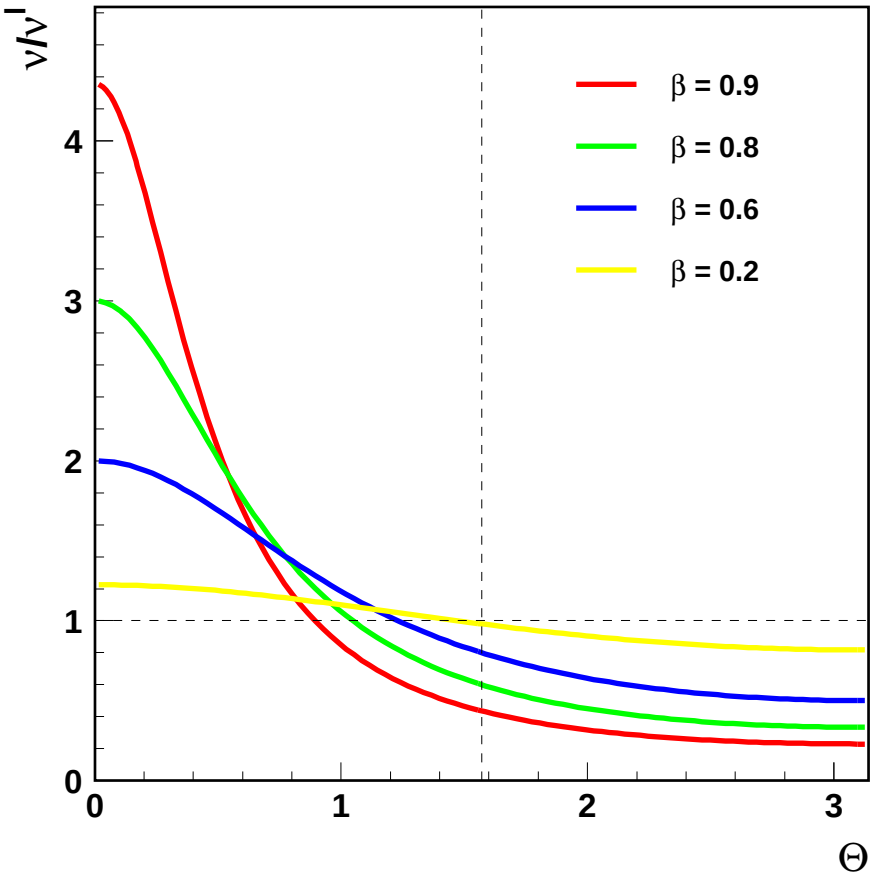
Możemy jednak zastosować odwrotną transformację Lorenza ($\beta \Leftrightarrow -\beta$)

$\Rightarrow$ energia w funkcji kąta **detekcji**:

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma (1 - \beta \cos\theta)}$$

Fotony rejestrowane pod kątem $\theta = \frac{\pi}{2}$ mają częstość: $\nu = \frac{\nu'}{\gamma} < \nu'$!!!

Zależność częstości od kąta **detekcji**



Efekt Dopplera

Efekt Dopplera obserwowany w warunkach laboratoryjnych dla dla fal elektromagnetycznych jest na ogół bardzo niewielki (z wyjątkiem akceleratorów cząstek i ciężkich jonów).

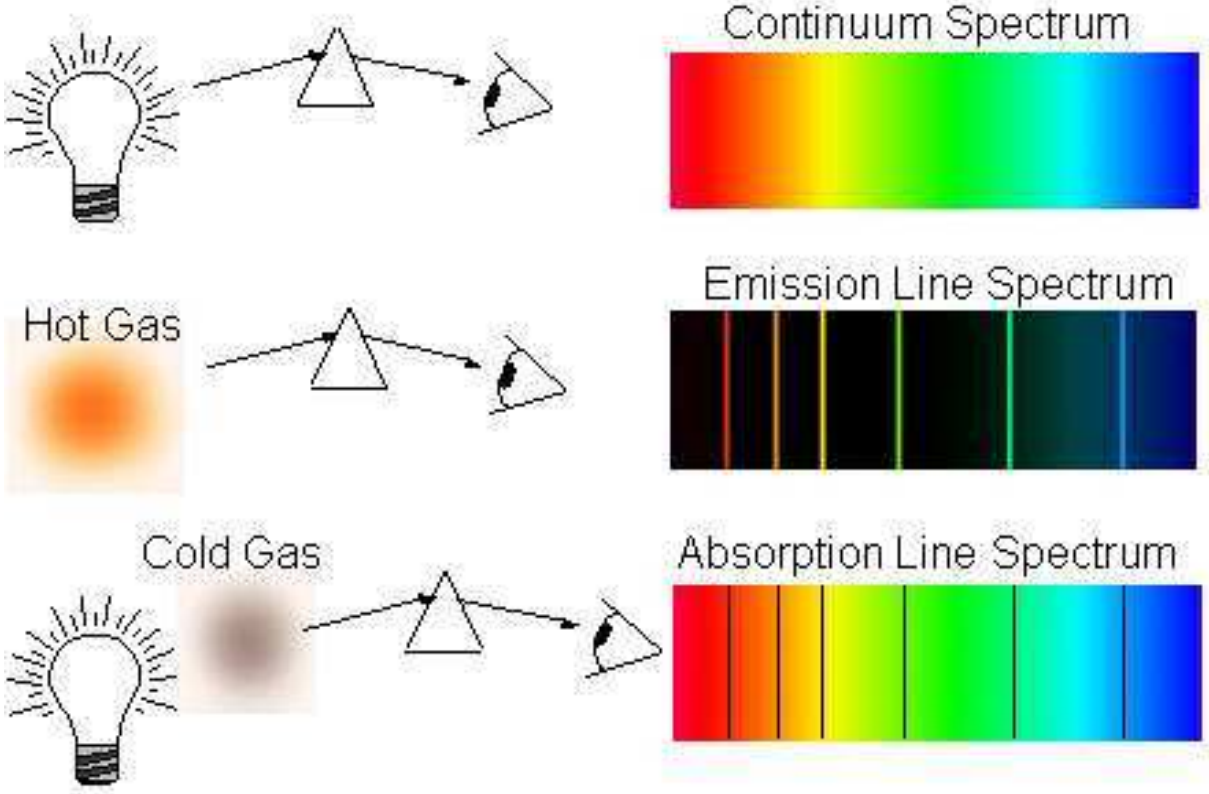
Duże efekty widoczne w obserwacjach astronomicznych

Linie emisyjne

Światło emitowane przez wzbudzone atomy.

Linie absorpcyjne

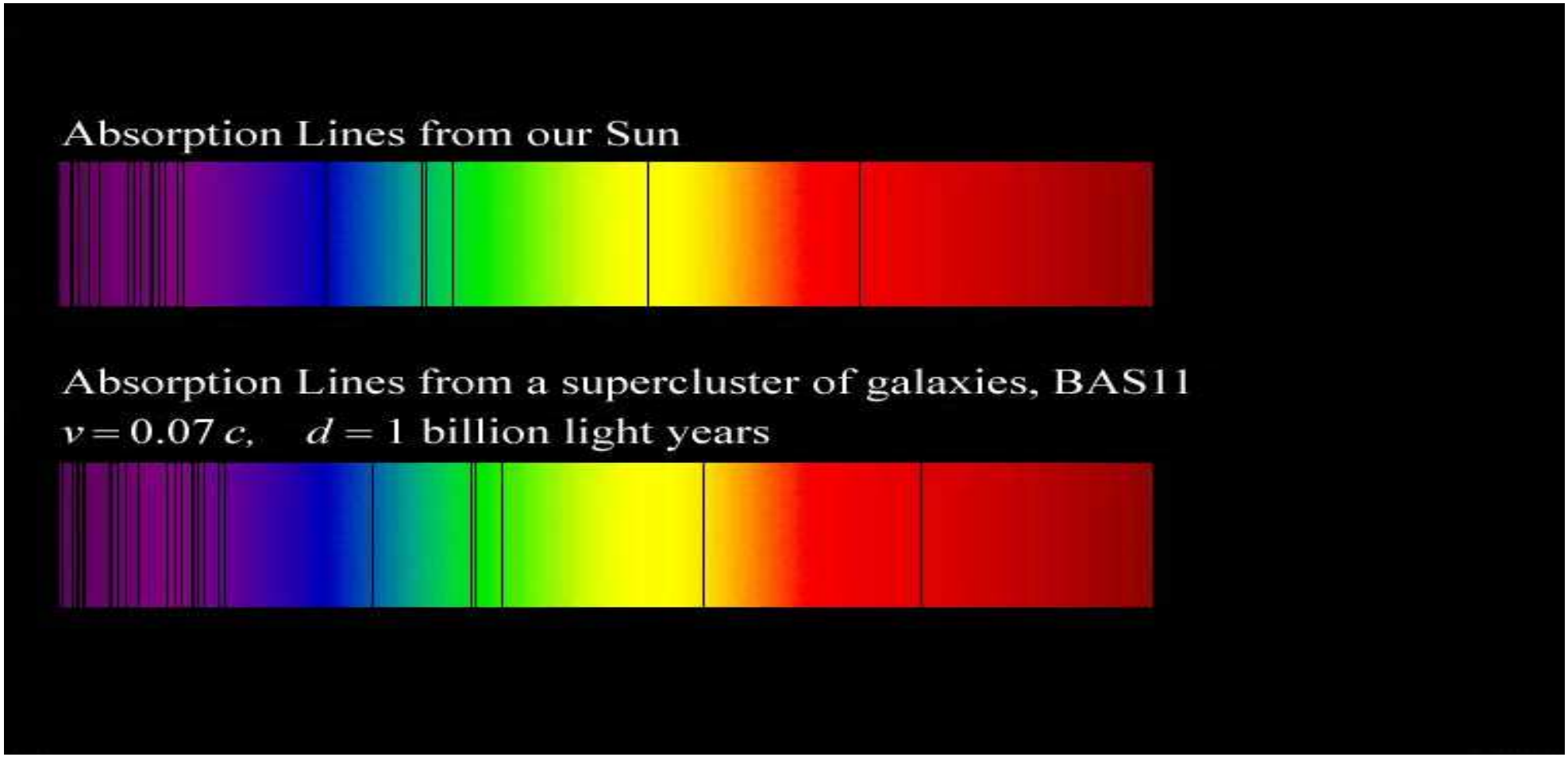
Widoczne w świetle przechodzącym przez gaz.



W obu przypadkach pozycja linii jest ściśle określona (dla danego atomu)

Efekt Dopplera

Mierząc linie absorpcyjne w widmie galaktyk możemy wnioskować o ich ruchu
i wyznaczyć ich prędkość względem nas



Prawo Hubbla

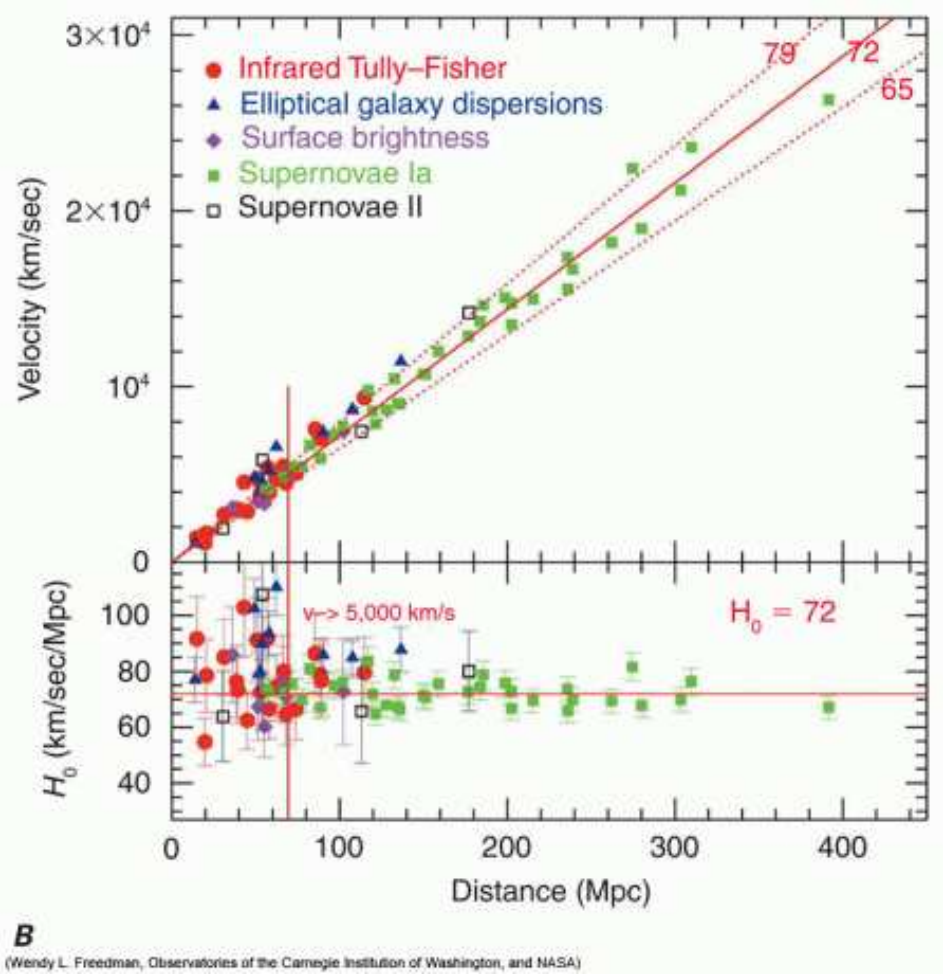
Dzięki efektowi Dopplera wiemy, że Wszechświat się rozszerza.

W 1929 roku Edwin Hubble jako pierwszy powiązał obserwowane prędkości mgławic z ich odległością od Ziemi.

Zauważył on, że prędkość 'ucieczki' rośnie z odległością od Ziemi:

$$v = H \cdot r$$

r - odległość, H - stała Hubbla

Obecne pomiary: $H \sim 72\ km/s/Mpc$

$$1Mpc \approx 3 \cdot 10^{22} m$$