

Szczególna teoria względności

prof. dr hab. Aleksander Filip Żarnecki
Zakład Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych
Instytut Fizyki Doświadczalnej

Wykład VII:

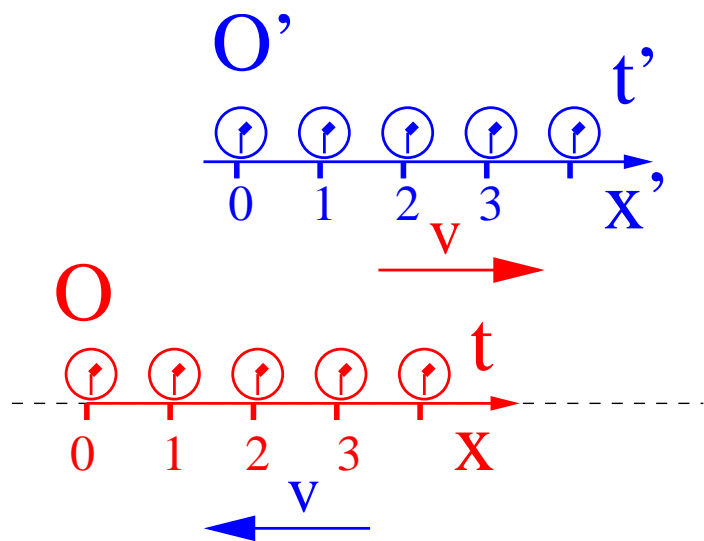
- postulaty Einsteina i transformacja Lorentza (przypomnienie)
- ruch cząstki w polu elektrycznym
- oddziaływanie przewodników z prądem
- natura magnetyzmu
- ruch cząstki w polu magnetycznym
- informacje o egzaminie

Postulaty Einsteina

opublikowane w pracy "O elektrodynamice ciał w ruchu" (1905):

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (zasada względności)
- prędkość światła w próżni, c , jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia... (uniwersalność prędkości światła)

prowadzą do wzoru na transformacje Lorentza



$$\begin{cases} ct = c\gamma t' + \gamma\beta x' \\ x = c\gamma\beta t' + \gamma x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

gdzie: $\beta = \frac{V}{c}$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Transformacja Lorentza

Transformacja Lorentza dla czterowektora **położenia** w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pełna symetria między ct (współrzędna czasowa) i x (współrzędna przestrzenna)

Transformacja Lorentza dla czterowektora **energii-pędu**:

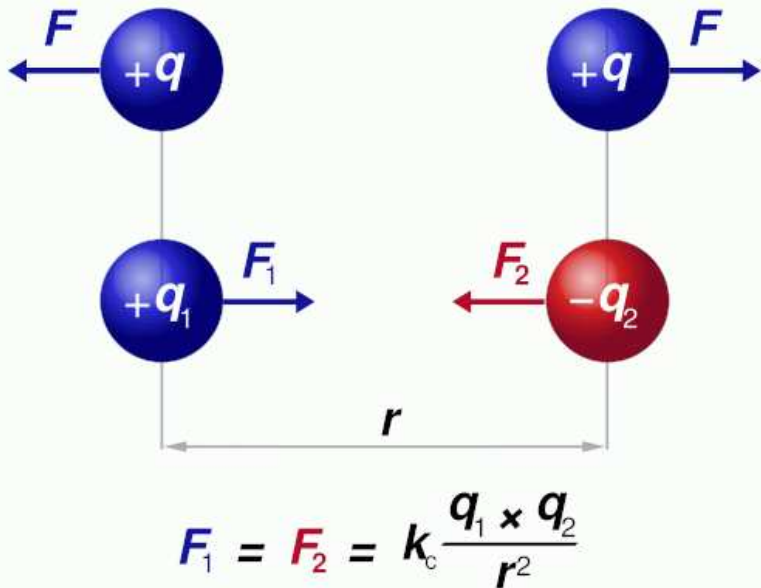
$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E' \\ c p'_x \\ c p'_y \\ c p'_z \end{pmatrix}$$

Wprowadzenie

Pole elektryczne

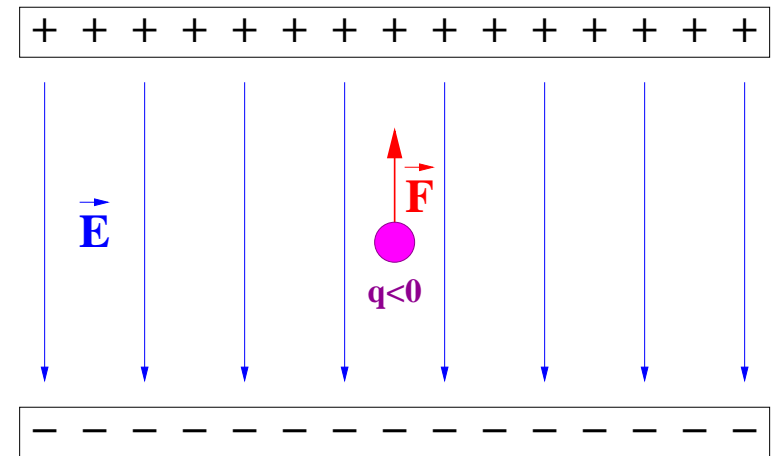
Prawo Coulomba

siła oddziaływania między ładunkami:



gdzie: $k_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

Gdy opisujemy ruch cząstki pod wpływem siły Coulomba wygodnie jest wprowadzić pojęcie "pola elektrycznego" \vec{E} :



Siła działająca na ładunek q :

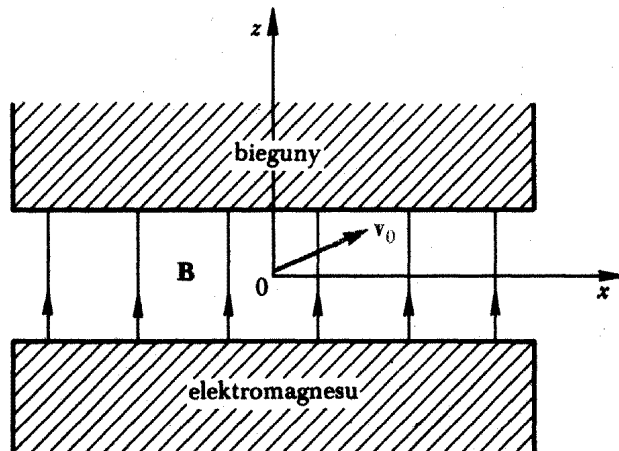
$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

Źródłem pola są ładunki elektryczne

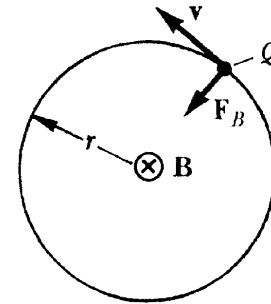
Wprowadzenie

Pole magnetyczne

Wytwarzane między biegunami magnesów lub elektromagnesów



Cząstka naładowana poruszająca się w płaszczyźnie prostopadłej do pola:



Na cząstkę działa siła Lorentza:

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Siła działa prostopadle do kierunku ruchu - nie zmienia prędkości (pędu, energii) cząstki

Co jest źródłem pola magnetycznego?

Nie istnieją ładunki magnetyczne

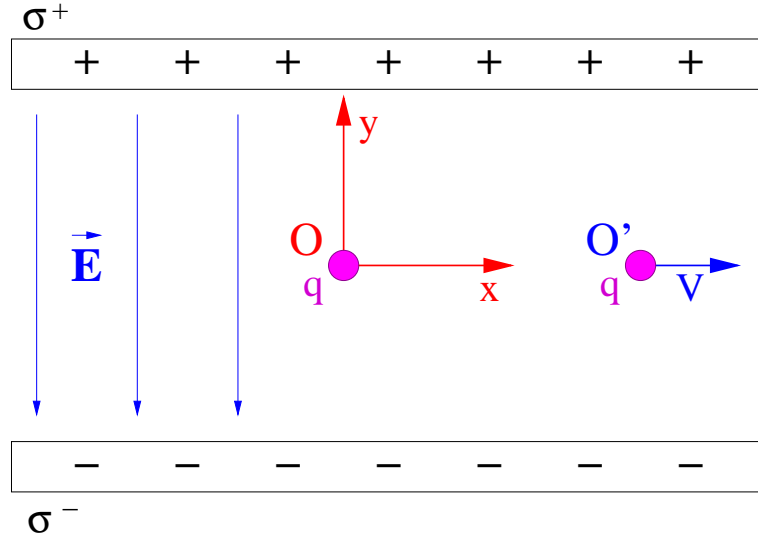
Siła Lorentza związana jest z **ruchem ładunków**.

Ale ruch jest względny!...

Ruch cząstki w polu elektrycznym

Pole elektryczne

Rozważmy pole elektryczne między okładkami kondensatora:



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

gdzie σ - gęstość powierzchniowa ładunku

Kondensator jest obojętny: $\sigma = \sigma^+ = \sigma^-$

Rozważmy dwa układy odniesienia: układ O nieruchomy względem kondensatora i układ O' , który porusza się z prędkością V równoległe do powierzchni okładek.

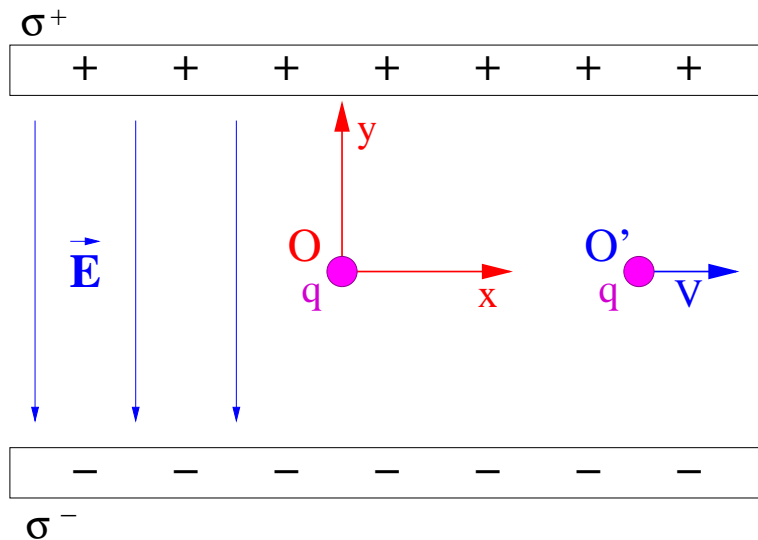
Niech w chwili $t = t' = 0$ w początkach obu układów zostanie umieszczona cząstka o ładunku q i masie m .

Na cząstki działa siła

$$\vec{F}_c = q \cdot \vec{E}$$

Ruch cząstki w polu elektrycznym

Pole elektryczne



W chwili $t = 0$ cząstka O spoczywa w kondensatorze, cząstka O' porusza się z prędkością V równoległe do powierzchni okładek.

Dla uproszczenia przyjmijmy, że prędkości ruchu w kierunku y : $v_y \ll c$.

Ruch pierwszego ładunku w O:

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{qE}{2m} t^2$$

Ruch drugiego ładunku:

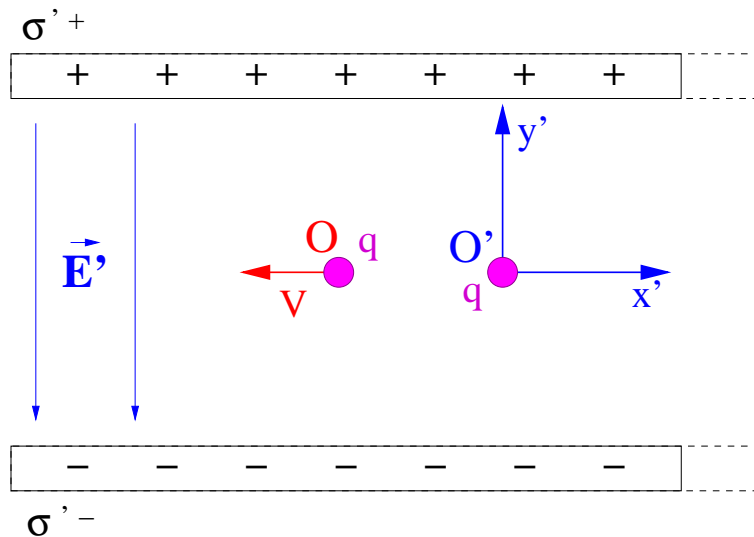
$$x_2 = V \cdot t$$

$$y_2 = \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{qE}{2m\gamma} t^2$$

przyspieszenie a_y maleje o czynnik γ , co wynika z wyrażenia na pęd: $p_y = m\gamma v_y$

Ruch cząstki w polu elektrycznym

Pole elektryczne



W układzie O' sytuacja się odwraca: w chwili $t' = 0$ cząstka O' spoczywa, cząstka O porusza się z prędkością v .

Jak teraz wygląda ruch cząstek?

Transformujemy opis ruchu z O do O' :

Ruch drugiego ładunku:

$$x'_2 = 0$$

$$y'_2 = y_2 = -\frac{qE}{2m\gamma} t^2 = -\frac{qE\gamma}{2m} t'^2$$

gdzie $t = \gamma t'$ (dylatacja czasu)

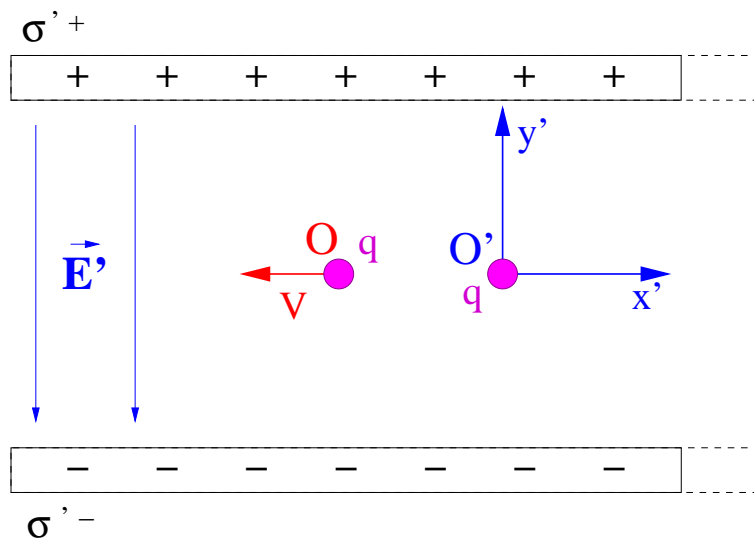
Ruch ładunku odpowiada natężeniu pola

$$E' = \gamma E$$

Zgadza się !!! W układzie O' długość okładek ulega skróceniu Lorentza, gęstość ładunku rośnie: $\sigma' = \gamma\sigma$

Ruch cząstki w polu elektrycznym

Pole elektryczne



W układzie O' sytuacja się odwraca: w chwili $t' = 0$ cząstka O' spoczywa, cząstka O porusza się z prędkością V .

Jak teraz wygląda ruch cząstek?

Ruch pierwszego ładunku:

$$x'_1 = -V \cdot t'$$

$$y'_1 = y_1 = -\frac{qE}{2m} t^2 = -\frac{qE'}{2m\gamma^3} t'^2$$

gdyż $t' = \gamma t$ (w drugą stronę!), a $E' = \gamma E$

Porównując z wynikiem uzyskanym dla drugiego ciała w O :

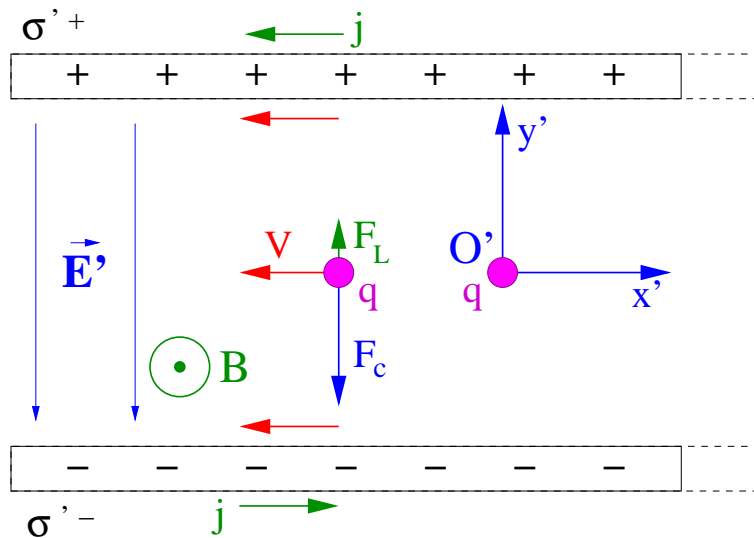
$$F = \frac{1}{\gamma^2} q E'$$

Siła ulega zmniejszeniu o czynnik γ^2 !?

Czy nie przeczy to równoważności układów?

Ruch cząstki w polu elektrycznym

Pole magnetyczne



Ale w układzie O' poruszają się także naładowane okładki kondensatora.

Płynie prąd o gęstości $j = V\sigma'$

Powstaje pole magnetyczne o indukcji

$$B = \mu_0 j = \mu_0 V \sigma' = \mu_0 \epsilon_0 V E'$$

Jaka siła musi działać na ładunek ze strony pola magnetycznego?

$$F_{tot} = \frac{1}{\gamma^2} q E' \quad \text{z transformacji}$$

$$F_c = q E' \quad \text{z równoważności układów odniesienia}$$

$$\Rightarrow \Delta F = F_c - F_{tot}$$

$$\Delta F = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) q E' = \beta^2 q E'$$

Ruch cząstki w polu elektrycznym

Pole magnetyczne

Aby uzyskać równoważny opis ruchu pierwszego ciała w układzie O' musi na nie działać dodatkowa siła równa

$$\Delta F = \beta^2 q E'$$

Przypuszczamy, że siła ta musi pochodzić od pola magnetycznego wytworzonego przez poruszające się ładunki.

Porównajmy ją z klasycznym wyrażeniem na siłę Lorenza

$$F_L = q V B$$

Indukcja pola magnetycznego:

$$B = \mu_0 j = \mu_0 \epsilon_0 V E'$$

$$\Rightarrow F_L = q V \mu_0 \epsilon_0 V E'$$

$$F_L = \mu_0 \epsilon_0 c^2 \beta^2 q E'$$

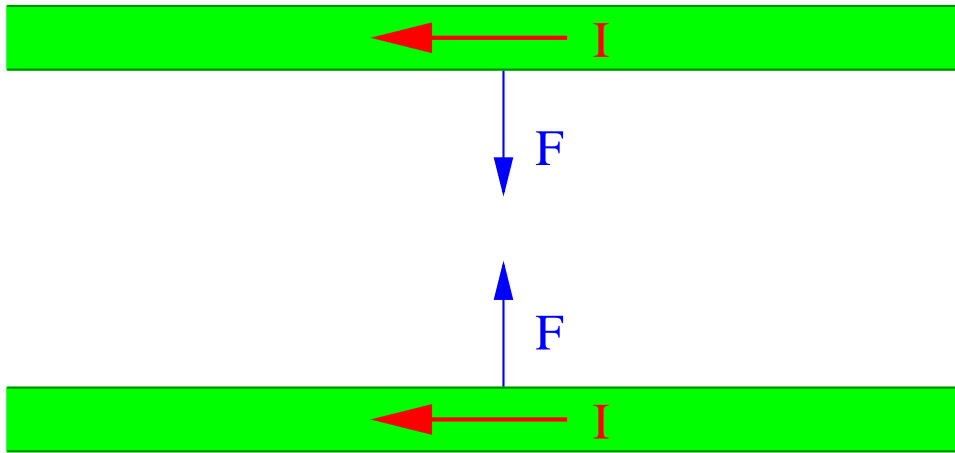
$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

Zjawiska magnetyczne są ściśle związane z teorią względności!

W granicy klasycznej $\frac{1}{c^2} \rightarrow 0$ oddziaływania magnetyczne znikają, $B \equiv 0$!

Oddziaływanie przewodników z prądem

Prawo Ampere'a



Dwa równoległe przewodniki z prądem przyciągają się z siłą

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

(na jednostkę długości przewodnika)

r - odległość między przewodnikami

Jak szybko płyną ładunki w przewodniku?

Przykład: drut miedziany $S = 1 \text{ mm}^2$

gęstość miedzi: $\rho = 9 \text{ g/cm}^3$

masa molowa: $\rho_m = 64 \text{ g/mol}$

\Rightarrow gęstość nośników: $n = \frac{\rho}{\rho_m} N_A$

liczba Avogadro $N_A \approx 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$

Gęstość ładunku na jednostkę długości:

$$\eta = n \cdot S \cdot e \approx 13.5 \frac{\text{C}}{\text{mm}}$$

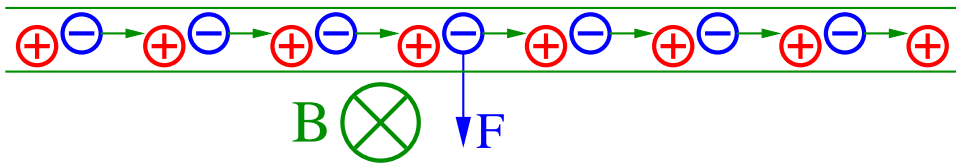
$$1 \text{ C} \approx 6.24 \cdot 10^{18} e$$

Prędkość nośników:

$$I = v \cdot \eta \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{\eta} \approx 0.74 \text{ mm/s}$$

Oddziaływanie przewodników z prądem

Prawo Ampere'a



Elektrony w przewodniku poruszają się z niewiarygodnie małymi prędkościami

$$v \sim 1 \text{ mm/s}$$

ale jest ich bardzo dużo:

$$n \cdot S \sim 8 \cdot 10^{19} \text{ 1/mm}$$

Przyciąganie przewodników jest wynikiem oddziaływania pola magnetycznego wytworzonego przez jeden z nich

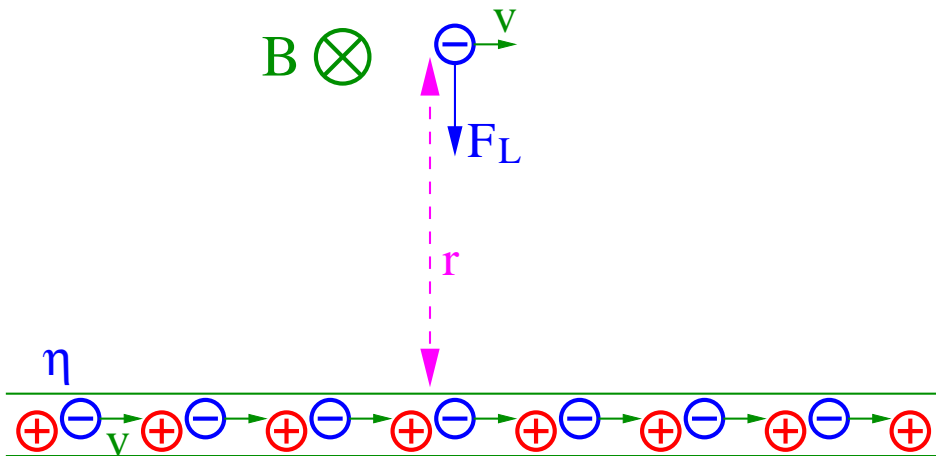
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

z elektronami poruszającymi się w drugim przewodniku.

Czy przy prędkościach rzędu mm/s jest wogóle sens mówić o efektach relatywistycznych?!

Oddziaływanie przewodników z prądem

Siła Lorentza



Rozważmy pojedynczy elektron.

Na nieruchome jony dodatnie pole magnetyczne nie działa.

Indukcja pola magnetycznego:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Natężenie prądu:

$$I = \eta v$$

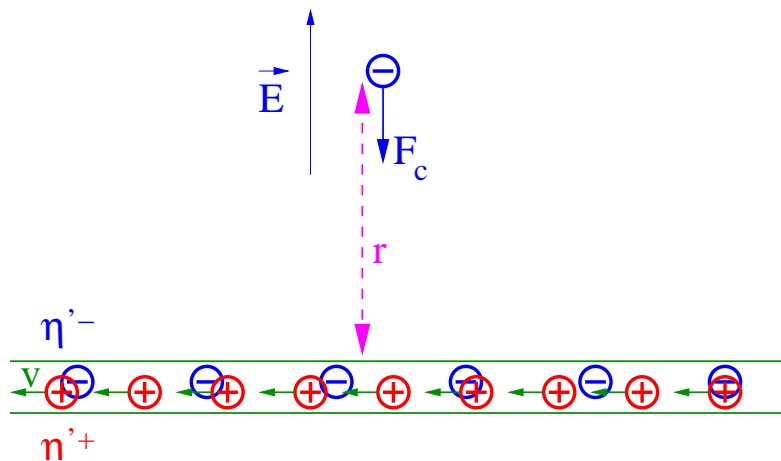
Siła Lorentza działająca na elektron:

$$F_L = q v B$$

$$F_L = \frac{\mu_0 q \eta v^2}{2\pi r}$$

Oddziaływanie przewodników z prądem

Gęstość ładunku



A jak to wygląda w układzie odniesienia związanym z elektronem?

W układzie tym **elektrony** w przewodniku są nieruchome, natomiast **jony dodatnie** poruszają się z prędkością v

Siła Lorentza znika.

Ale elektron jest **przyciągany** do drugiego przewodu! (wiemy to z obserwacji)

⇒ **Drut** przestaje być obojętny!

Odległości między jonami w przewodniku ulegają skróceniu:

$$\eta^{+'} = \gamma \cdot \eta > \eta$$

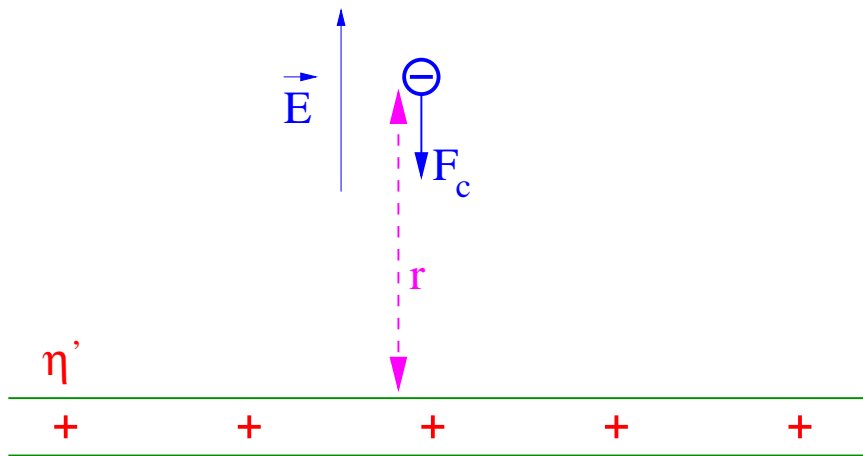
(skrócenie Lorentza)

odległości między elektronami w ulegają wydłużeniu:

$$-\eta^{-'} = \frac{1}{\gamma} \cdot \eta < \eta$$

Oddziaływanie przewodników z prądem

Pole elektryczne



W układzie odniesienia związanym z elektronem drut jest **naładowany dodatnio!**

Elektron jest przyciągany do drutu siłami Coulombowskimi

Przewody muszą się przyciągać!

Gęstość ładunku netto:

$$\eta' = \eta^{+'} + \eta^{-'} = \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \eta$$

$$\eta' = \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cdot \eta = \gamma \beta^2 \eta$$

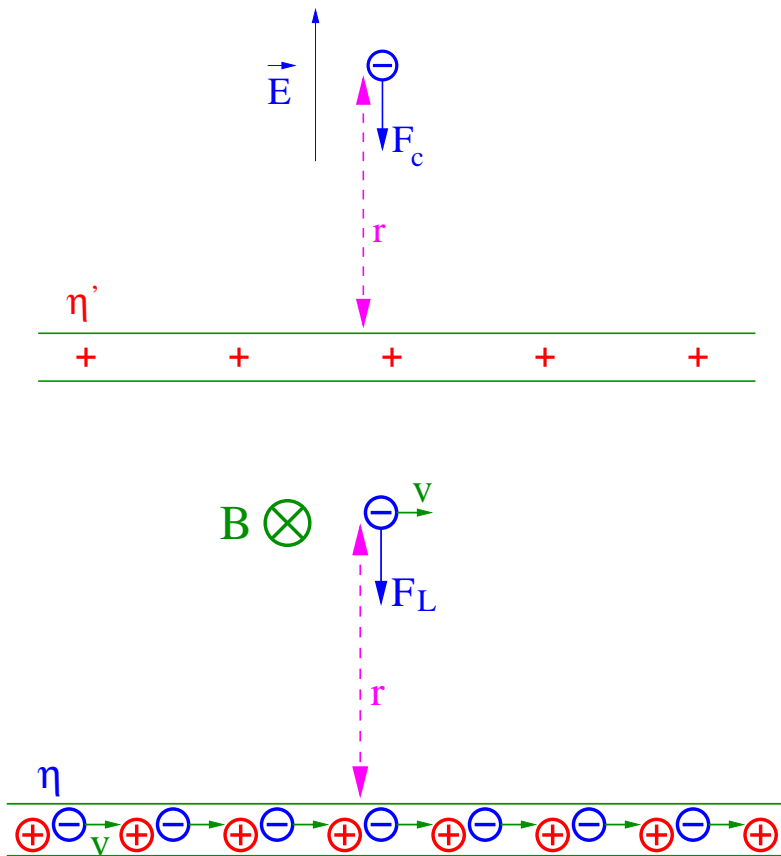
Pole elektryczne wytwarzane przez jednorodnie naładowany przewód:

$$E = \frac{\eta'}{2\pi r \epsilon_0}$$

$$E = \frac{\gamma \beta^2 \eta}{2\pi r \epsilon_0}$$

Oddziaływanie przewodników z prądem

Względność opisu



Siła działająca na elektron w jego układzie:

$$F_c = q \cdot E = \frac{q \gamma \beta^2 \eta}{2\pi r \epsilon_0}$$

Siła Lorentza w układzie laboratoryjnym:

$$F_L = \frac{\mu_0 q v^2 \eta}{2\pi r} = \frac{q \beta^2 \eta \mu_0 c^2}{2\pi r}$$

Z zasady względności efekt działania siły nie powinien zależeć od układu odniesienia.

Otrzymujemy ponownie:

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

Elektryczność i magnetyzm

Choć prędkość nośników ładunku w przewodniku jest niezwykle mała ($\beta \sim 3 \cdot 10^{-12}$), to jest kompensowana przez ich ogromną gęstość ($n \sim 8 \cdot 10^{19} \text{ 1/mm}^3$)

Dlatego efekty relatywistyczne są wciąż widoczne: $n \beta^2 \sim 0.001 \frac{1}{\text{mm}^3}$

Historycznie badania z zakresu **elektrostatyki** (oddziaływań ładunków) i **elektromagnetyzmu** (oddziaływania prądów i pól magnetycznych) rozwijały się zupełnie niezależnie.

Dopiero w **2 połowie XIX w.** ustalono relacje między jednostkami **ładunku i prądu**, **Maxwell** sformułował równania wiążące oddziaływania elektryczne i magnetyczne.

Pod końcu XIX w. (**odkrycie elektronu**) zrozumiano na czym polega przepływ prądu.

W “**świecie Galileusza**” oddziaływania magnetyczne wydawały się niezależne.

Ale gdyby Galileusz miał rację **magnetyzm by nie istniał !!!**

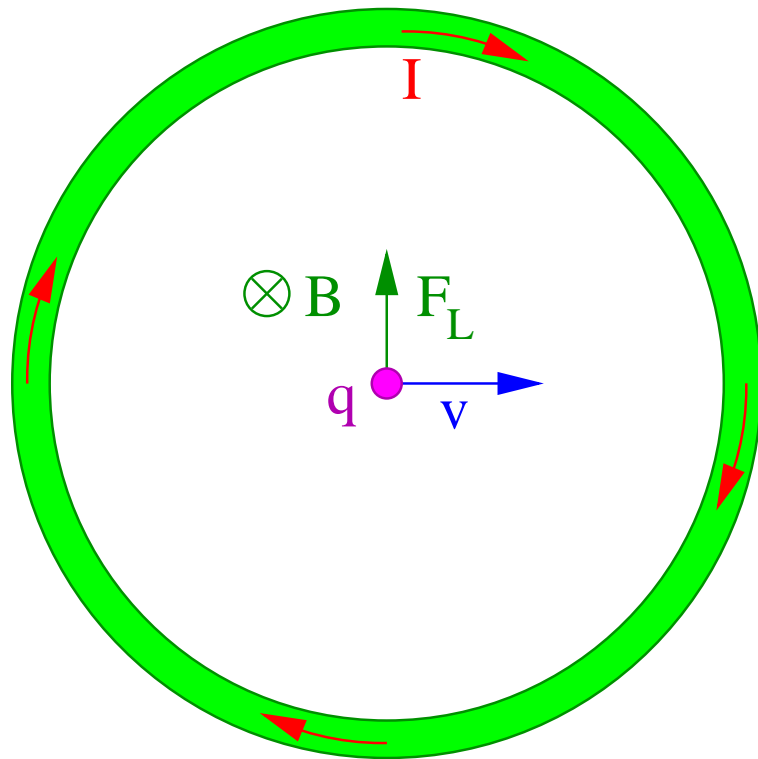
Siła Lorentza to relatywistyczna “**poprawka**” wynikająca z tego, że mierzymy rozkłady ładunków w “**złym**” układzie odniesienia...

Siłę działającą na ładunek powinniśmy wyznaczać w jego układzie odniesienia

Ruch cząstki w polu magnetycznym

Jednorodne pole magnetyczne

Rozważmy ładunek poruszający się w jednorodnym polu magnetycznym.



Pole magnetyczne solenoidu:

$$B = \mu_0 n I$$

n - liczba zwojów na jednostkę długości

$$B = \mu_0 u \sigma$$

u - prędkość nośników w przewodzie

σ - gęstość swobodnych nośników
(na jednostkę powierzchni solenoidu)

Siła Lorentza:

$$F_L = \mu_0 q v u \sigma$$

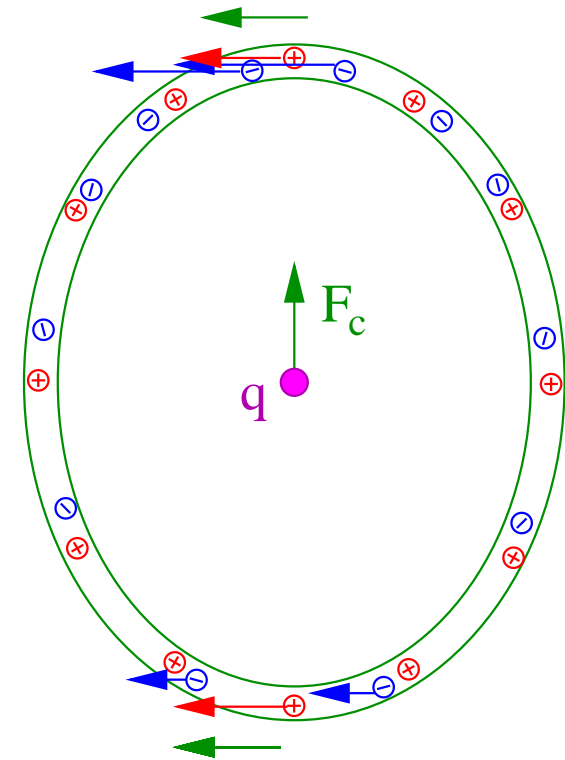
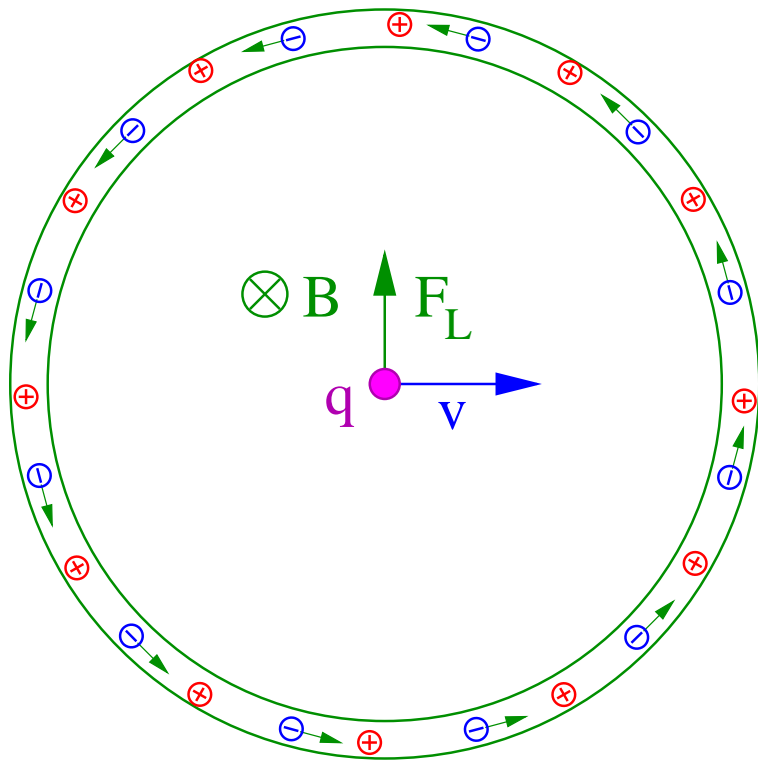
Ruch cząstki w polu magnetycznym

Jednorodne pole magnetyczne

Powstaje w wyniku ruchu elektronów w przewodniku

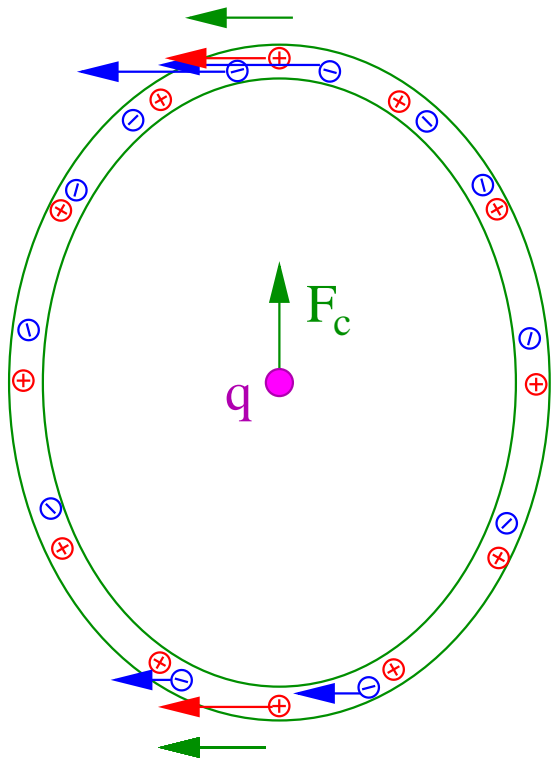
W układzie cząstki solenoid ulega spłaszczeniu.

Poruszają się zarówno elektrony jak i jony.

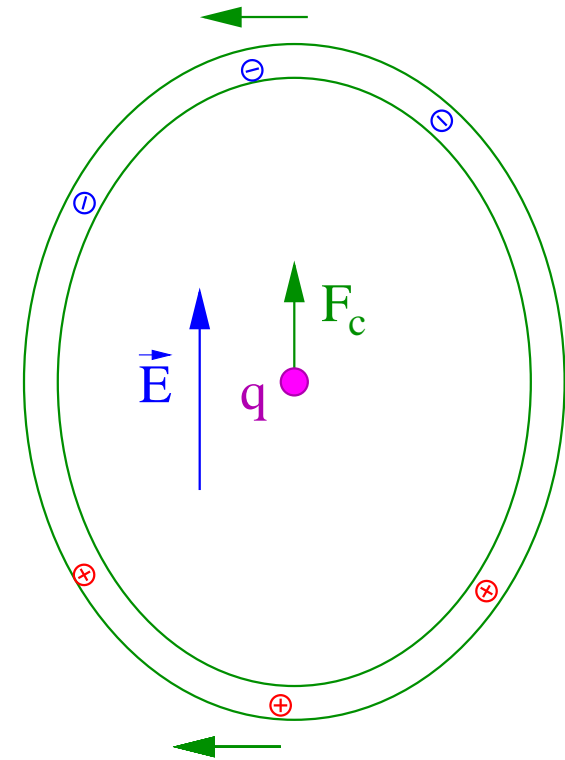


Ruch cząstki w polu magnetycznym

U góry prędkości elektronów są większe niż prędkości jonów $\Rightarrow \sigma^- > \sigma^+$



U góry mamy “netto” nadmiar ładunków ujemnych



Na dole prędkości jonów są większe: $\sigma^+ > \sigma^-$

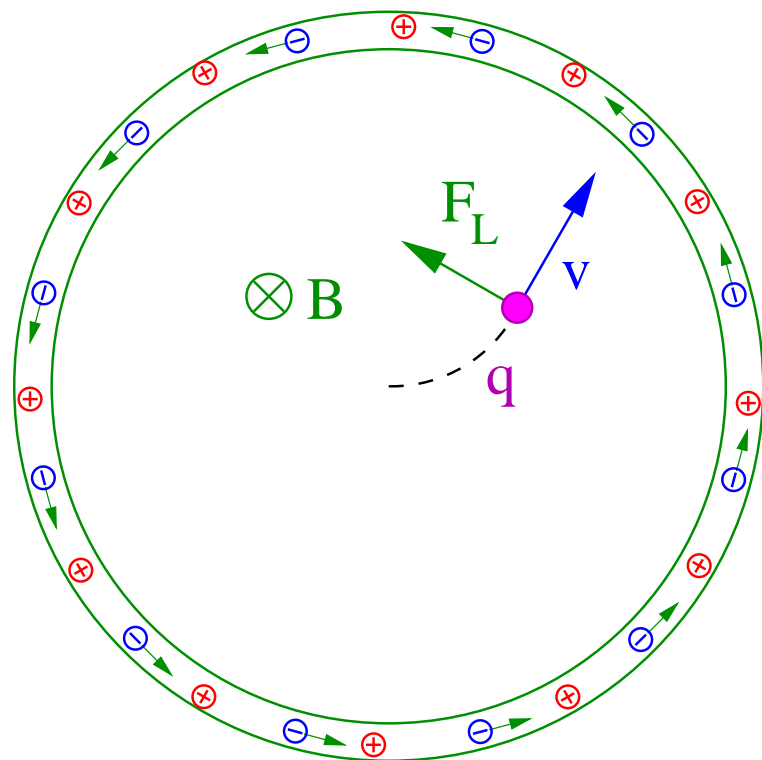
u dołu nadmiar ładunków dodatnich
 \Rightarrow (jednorodne) pole elektryczne

Ruch cząstki w polu magnetycznym

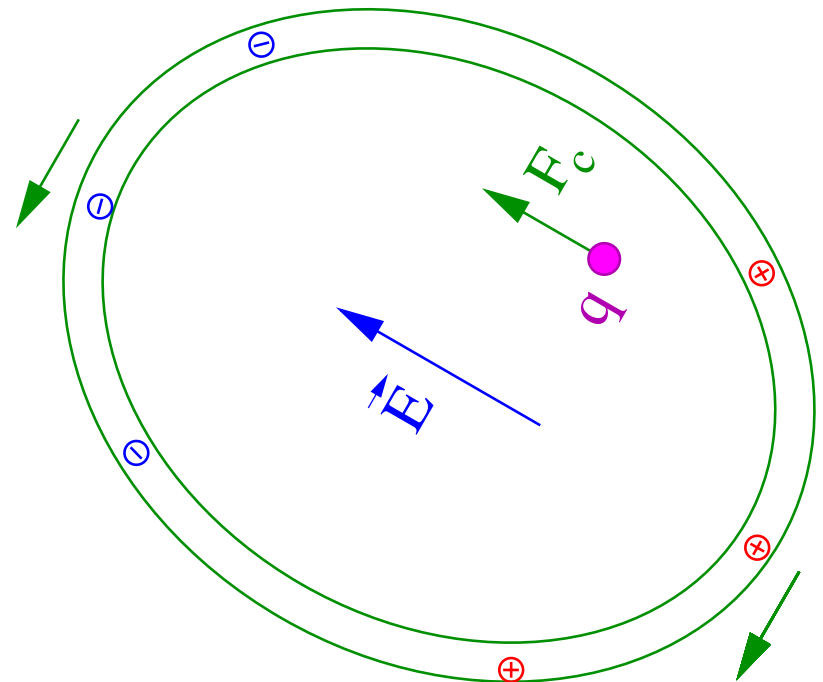
Jednorodne pole magnetyczne

Pod wpływem siły Lorentza następuje zakrzywienie toru cząstki

⇒ zmiana kierunku działania siły



W układzie cząstki spłaszczenie elipsy następuje zawsze wzdłuż kierunku ruchu, pole elektryczne prostopadłe do tego kierunku:



Egzamin

Egzamin pisemny **2 luty, 14⁰⁰ – 18⁰⁰, SDD+SSD+Aula**

Lista osób dopuszczonych do egzaminu, ze wskazaniem sali, będzie wywieszona.

Część teoretyczna będzie miała formę **testu**:

30 pytań z materiału przedstawionego na wykładach,
w miarę możliwości równomiernie rozłożonych tematycznie (**~4 pytania na wykład**)
czas pisania: **30 minut**

Do każdego pytania 4 odpowiedzi, z czego **dokładnie jedna** prawidłowa.

Punktacja:

- dobra odpowiedź $\Rightarrow +1$
- zła odpowiedź $\Rightarrow -0.5$ (losowe skreślanie nie opłaca się)

Egzamin

Egzamin pisemny (cd)

Część rachunkowa będzie polegała na rozwiązaniu **4 zadań**.

Większość zadań nawiązuje do problemów z zadań domowych.

Za rozwiązanie każdego z nich można dostać maksymalnie 5 punktów.

Czas pisania: **3 godziny**. **Nie wolno korzystać z żadnych pomocy!**

Zaliczenie części rachunkowej (≥ 12 punktów z zadań i kartkówek) i testu pisemnego jest warunkiem dopuszczenia do egzaminu ustnego.

Egzamin ustny **5 i 6 luty (?)**

- w sytuacjach wątpliwych (“granicznych”)
- w celu poprawienia zaproponowanej oceny (gdy jest to możliwe)

W przypadku gdy wyniki części rachunkowej i testu pisemnego pozwolą na zaproponowanie oceny końcowej student może zrezygnować z egzaminu ustnego.

Egzamin

Przykładowe pytania testowe:

1. Zasadę względności sformułował
 A Galileusz B Kopernik C Newton D Einstein
2. Zdarzeniem nie jest
 A wybuch supernowej B start rakiety C zachód Słońca
 D rozszczepienie jądra atomowego
3. Który z postulatów odrzucił Einstein
 A równoprawność układów odniesienia B zasadę bezwładności C uniwersalność czasu
 D uniwersalność prędkości światła
4. Energia dostępna w zderzeniach przeciwbieżnych wiązek elektronów o energiach 1 GeV i 9 GeV wynosi
 A 8 GeV B 6 GeV C 10 GeV D 5 GeV